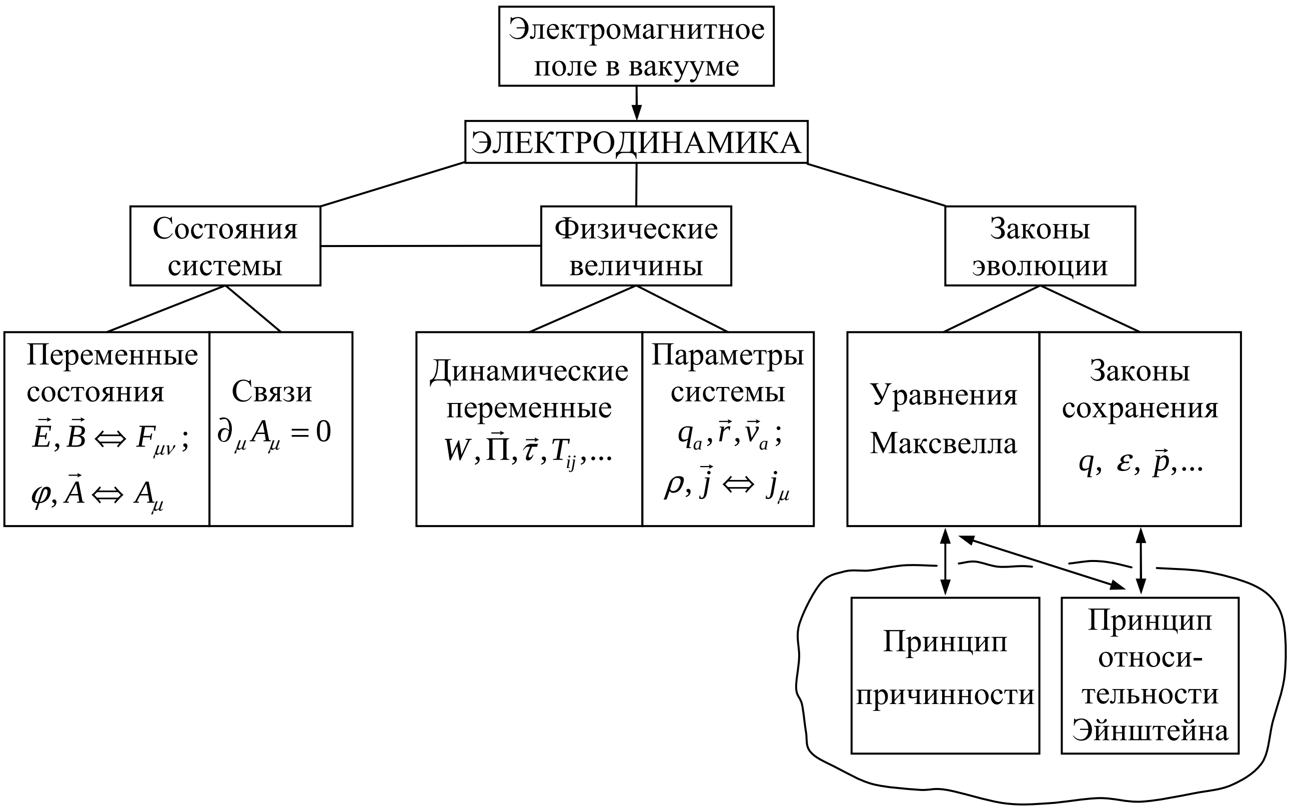
Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В ближайших трех главах решается одна из главных задач – построение и подробное обсуждение конструкции классической электродинамики. Она представлена в табл. 3. В данной главе формируются и анализируются основные понятия электродинамики, описывается ее эмпирический базис и на этой основе формулируются динамические уравнения для электромагнитного поля в вакууме.

Таблица 3



§1. Электрический заряд

Итак, считаем известным, что в природе существуют так называемые электрически заряженные частицы (тела), т.е. частицы, участвующие во взаимодействии с вполне определенными свойствами, которое именуется электромагнитным. Ближайшая наша цель состоит в том, чтобы сформировать и обсудить одно из важнейших понятий электродинамики – понятие электрического заряда. Он является параметром системы – внутренней характеристикой частицы, как раз и определяющей ее отношение к электромагнитному взаимодействию.

Вспомним, что говорится об электрическом заряде в школьном учебнике физики[1)]:

> «Величина электрического заряда определяет интенсивность электромагнитных взаимодействий… Мы, в сущности, ничего не знаем о заряде, если не знаем законов этих взаимодействий. Знание законов взаимодействий должно входить в наши представления о заряде. Законы эти не просты, изложить их в нескольких словах невозможно. Вот почему нельзя дать достаточно удовлетворительного краткого определения, что такое электрический заряд.»

[1)] Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9, – М.: Просвещение, 1986. – с.110–111.

Таким образом, в школьном курсе электрический заряд по вполне понятным причинам не может быть введен достаточно строго и операционально. В учебном же пособии по общей физике, предназначенном для студентов педагогических институтов[1)], это важное понятие практически вообще не обсуждается. Столь существенный пробел в физическом образовании будущего учителя и восполняется ниже. При этом будем отправляться от опыта, широко привлекая мысленный эксперимент, обобщающий богатый эмпирический материал.

Рассмотрим некоторую систему заряженных тел и обозначим переменные ее механического состояния единым символом X. Рассмотрим также исследуемую частицу a, считая пока, что она обладает следующими свойствами:

(а) размеры частицы малы по сравнению с расстоянием до ближайшего тела системы;

(б) частица мала в том смысле, что ее обратное воздействие на систему пренебрежимо мало, т.е. она не меняет состояние X;

(в) частица участвует только в электромагнитном взаимодействии[2)];

(г) сила $\vec{F}_a$, действующая на частицу со стороны окружения, однозначно определяется состоянием X внешней системы[3)] и состоянием $(\vec{r},\vec{v})$ частицы a, так что отношение последней к электромагнитному взаимодействию характеризуется некоторой скалярной величиной[4)].

Измерим теперь силу $\vec{F}_a$, а затем заменим a другой частицей b, сохраняя состояния X и $(\vec{r},\vec{v})$, и измерим силу $\vec{F}_b$:

$$\vec{F}_a = \vec{F}_a(\vec{r},\vec{v}|x) \qquad \text{и} \qquad \vec{F}_b = \vec{F}_b(\vec{r},\vec{v}|x).$$

Заменим, наконец, состояния X и $(\vec{r},\vec{v})$ на X' и $(\vec{r}\,',\vec{v}\,')$ и измерим силы

$$\vec{F}_a' = \vec{F}_a'(\vec{r}\,',\vec{v}\,'|x') \qquad \text{и} \qquad \vec{F}_b' = \vec{F}_b'(\vec{r}\,',\vec{v}\,'|x').$$

<u>Основной эмпирический факт</u>. Силы $\vec{F}_a$ и $\vec{F}_b$, а также $\vec{F}_a'$ и $\vec{F}_b'$, коллинеарны, их взаимная ориентация не зависит от состояния $(\vec{r},\vec{v}|x)$ полной системы, и

$$\frac{F_a}{F_b} = \frac{F_a'}{F_b'}, \tag{1.1}$$

где F_i – проекции векторов сил $\vec{F}_i$ на ориентированную прямую, вдоль которой они действуют.

Отсюда становится ясной корректность введения следующего понятия.

---

1) Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. – М.: Просвещение, 1980. – с.4–6.

2) При необходимости другие взаимодействия можно учесть и исключить.

3) Чтобы учесть возможные эффекты запаздывания, нужно фиксировать состояние x не только в данный, но и во все предшествующие моменты времени.

4) Это наиболее тонкое условие. Ему удовлетворяет, скажем, α–частица, но не электрон. У последнего есть векторная внутренняя характеристика – собственный магнитный момент. И в общей ситуации сила, действующая на электрон, зависит также от ориентации магнитного момента относительно внешних тел. К обсуждению данного условия мы еще вернемся в дополнении к данному параграфу.

Определение. Отношение проекций электромагнитных сил, действующих на частицы a и b, которые находятся в одинаковых условиях $\left(\vec{r}_a = \vec{r}_b,\ \vec{v}_a = \vec{v}_b,\ x_a = x_b\right)$ называется отношением их электрических зарядов:

$$\frac{F_a}{F_b} \stackrel{def}{=} \frac{q_a}{q_b}. \tag{1.2}$$

Видим, что на самом деле непосредственный и реальный смысл имеет только *отношение* зарядов q_a/q_b двух частиц a и b, как это часто и бывает в физике (вспомним хотя бы определение массы в ньютоновой механике). Но если в качестве b взять эталонную частицу 0 и положить по определению $q_0 = 1$, то из (1.2) найдем значение «самого» *электрического заряда* q_a частицы a

$$q_a = \frac{F_a}{F_0} \tag{1.3}$$

(сравн. с введением понятий массы, абсолютного показателя преломления среды и т.п.). Весьма существенно, что данное определение является *операциональным*: оно содержит принципиальный способ измерения электрического заряда частицы, а не просто некие общие слова, качественно описывающие это понятие.

Значение эталонного заряда q_0 принимается равным 1, но ему, вообще говоря, приписывается определенная размерность. Эта проблема связана с выбором системы единиц измерения физических величин. В СИ $q_0 = 1\,Кл$, причем кулон прямо связан с единицей силы тока ампером, считающейся основной: $1\,Кл = 1\,А \cdot с$. В СГСЭ и гауссовой системе единица заряда выражается через сантиметр, грамм и секунду с помощью закона Кулона, и размерность заряда задается формулой

$$[q] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1},$$

причем

$$1\,Кл \cong 3 \cdot 10^9\, СГСЭ - ед.\ заряда. \tag{1.4}$$

В физике элементарных частиц эталоном служит заряд протона

$$q_p \cong 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, Кл = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\, СГСЭ - ед.\ заряда, \tag{1.5}$$

а заряды всех прочих частиц выражают прямо в единицах q_p. В итоге электрический заряд оказывается безразмерной величиной (например, заряд электрона равен –1).

Перечислим основные свойства электрического заряда, которые во многом, но далеко не во всем вытекают из самого построения этого понятия. Приводимые ниже утверждения являются фундаментальными. Они представляют собой следствия огромного числа экспериментальных фактов. Большинство из них не выводится из каких-то первичных теоретических принципов, и все эти утверждения пока считаются абсолютно точными.

1. Заряд есть внутренняя характеристика частицы (параметр системы) – в том смысле, что значение заряда не зависит от ее состояния. Это есть следствие основного эмпирического факта (1.1).

2. Заряд есть <u>инвариантная</u> характеристика частицы, т.е. его значение не зависит от выбора системы отсчета. Это фактически следует также из (1.1), ибо переход к новой системе отсчета сводится в рассматриваемом контексте просто к изменению состояния частицы.

3. Заряд определяет <u>интенсивность электромагнитного взаимодействия</u> частицы. Это сразу видно из того, что согласно (1.2) действующую на нее электромагнитную силу можно представить в форме

$$\vec{F}_a = q_a \vec{f}\left(\vec{r},\vec{v}\middle|x\right), \tag{1.6}$$

где $\vec{f}$ уже не зависит от природы рассматриваемой частицы. Здесь уместно вспомнить школьное «определение», приведенное на с.8: «Величина электрического заряда определяет интенсивность электромагнитных взаимодействий». Теперь ему придан абсолютно строгий смысл.

4. Заряд, в отличие от массы, <u>не является знакоопределенной величиной</u>. Если в определении (1.2) силы $\vec{F}_a$ и $\vec{F}_b$ параллельны, то q_a и q_b имеют одинаковые знаки, если антипараллельны – разные знаки. Может случиться что $\vec{F}_a = 0$ при любых x и $\left(\vec{r},\vec{v}\right)$, и тогда $q_a = 0$. Знаки электрических зарядов всех тел фиксируются *соглашением*, согласно которому заряд электрона (протона) считается отрицательным (положительным). Именно такое соглашение принято в школьном учебнике (см. сноску на с.8):

> «Заряд элементарных частиц – протонов, входящих в состав всех атомных ядер, называют положительным, а заряд электронов – отрицательным. Между положительными и отрицательными зарядами нет никаких внутренних различий. Если бы знаки зарядов частиц поменялись местами, то от этого характер электромагнитных взаимодействий нисколько бы не изменился».

На этом фоне соглашение о положительности «стеклянного» и отрицательности «эбонитового» электричества (см. сноску на с. 8) выглядит как анахронизм.

5. Электрический заряд обладает свойством <u>аддитивности</u>. Иными словами, заряд любой системы, рассматриваемой в качестве единой частицы, равен алгебраической сумме зарядов составляющих ее элементов:

$$q = \sum_a q_a . \tag{1.7}$$

6. Распределение зарядов, строго говоря, всегда <u>дискретно</u>. Согласно современным воззрениям, фундаментальные частицы (лептоны и кварки) считаются точечными объектами. Во всяком случае, они не обнаруживают никакой внутренней структуры вплоть до расстояний $R \sim 10^{-18}\,м$.

7. Значения электрического заряда строго <u>квантованы</u>. Это значит, что заряд всякого тела кратен *элементарному* заряду e [совпадающему с зарядом протона (1.5)]:

$$q = ke . \tag{1.8}$$

Здесь k – целые числа, с которыми в физике элементарных частиц и отождествляются значения их зарядов. Факт квантованности электрического заряда является чрезвычайно строгим. Так, согласно самым последним намерениям, для относительного различия модулей зарядов протона и электрона имеет место следующая экспериментальная оценка:

$$\left|\frac{|q_p|-|q_e|}{|q_e|}\right|<10^{-21} \quad (!) \tag{1.9}$$

Правда, в современной теории фигурируют кварки – частицы с дробными зарядами $+2/3$ и $-1/3$. Но, скорее всего, они не могут существовать в свободном состоянии, а входят в состав других, реально детектируемых частиц – адронов (протонов, нейтронов и т.д.). Впрочем, даже если их зарегистрируют и непосредственно, это не нарушит справедливость утверждения о квантованности заряда. Просто теперешнее значение элементарного заряда уменьшится ровно втрое. Строгая квантованность электрического заряда (масса этим свойством не обладает!) весьма удивительна. Свое частичное объяснение она нашла только в самые последние годы в рамках унитарных теорий, которые трактуют все фундаментальные взаимодействия на некой единой основе.

8. Суммарный электрический заряд замкнутой системы сохраняется:

$$\sum_a q_a = const\,. \tag{1.10}$$

Это свойство является столь важным, что его обсуждению уместно посвятить отдельный параграф.

Дополнение к §1*

Выше при введении и обсуждении понятия электрического заряда подразумевалось, что его носителями являются «частицы». Этому классу принадлежат и реальные протяженные тела, если только для них выполнены условия (а)–(г), сформулированные на с.9. Первое из них означает, что внешние тела должны располагаться достаточно далеко от исследуемых, второе – что эти внешние тела должны быть достаточно массивными. О третьем условии сказано во второй сноске на с.9.

Сложнее всего дело обстоит с условием (г). До сих пор считалось, что отношение частицы к электромагнитному взаимодействию полностью характеризуется некоторой скалярной величиной, что и составляет суть этого условия. Такой характеристикой как раз является электрический заряд. Однако электромагнитные свойства частицы могут определять также физические величины более сложной математической природы – векторы и тензоры. Речь идет о мультипольных электрических и магнитных моментах (см. гл. IV и V). Примером служит дипольный магнитный момент электрона, упоминавшийся в сноске на с.9. При введении понятия электрического заряда определением типа (1.2) необходимо считаться с возможностью наличия у частицы такого рода внутренних характеристик.

В принципе учесть их не очень трудно, но сейчас мы еще не готовы к обсуждению этой проблемы. Вспомним школьный учебник (см. цитату на с.8): «Знание законов взаимодействий должно входить в наши представления о заряде». К данной проблеме мы вернемся в гл.IV, при анализе мультипольного разложения электростатического поля. Здесь же наметим только основную идею. Оказывается, что вклады в силу взаимодействия двух частиц (тел), обусловленные их векторными и тензорными внутренними характеристиками, убывают с ростом расстояния быстрее вклада, обусловленного скалярными характеристиками – электрическими зарядами. Поэтому по-прежнему можно пользоваться определением (1.2), но понимать его следует асимптотически – как предел при $R\to\infty$. На самом деле, отпадет необходимость и в этом уточнении, если только считать, что условие (а) на с.9 выполнено в достаточно сильной форме.

§2. Закон сохранения электрического заряда

Цель данного параграфа – математическая формулировка закона сохранения электрического заряда и обсуждение его простейших следствий. В своей наиболее конструктивной форме этот закон устанавливает определенную связь между локальными характеристиками пространственного распределения и движения заряженных частиц. С их введения мы и начнем соответствующий анализ.

Для описания распределения заряда в пространстве вводится скалярное поле – его *объемная плотность*

$$\rho\left(\vec{r}\,\middle|\,t\right) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \equiv \frac{dq}{dV}. \qquad (2.1)$$

В физике часто возникают ситуации, когда весь заряд сконцентрирован в малой окрестности некоторой поверхности (заряженные проводники) или кривой (заряженные нити). Такие сингулярные распределения зарядов описывают соответственно *поверхностная плотность*

$$\sigma\left(M\,\middle|\,t\right) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \equiv \frac{dq}{dS} \qquad (2.2)$$

и *линейная плотность*

$$\varkappa\left(M\,\middle|\,t\right) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \equiv \frac{dq}{dl}, \qquad (2.3)$$

где M – точка поверхности или кривой.

В случае пространственного распределения заряда для описания его движения вводится векторное поле – *плотность тока*

$$\vec{j}\left(\vec{r}\,\middle|\,t\right) = \rho\left(\vec{r}\,\middle|\,t\right)\vec{v}\left(\vec{r}\,\middle|\,t\right). \qquad (2.4)$$

Подчеркнем, что $\vec{v}\left(\vec{r}\,\middle|\,t\right)$ здесь есть также векторное поле. Это не скорость какой-то выделенной частицы, а скорости частиц, пролетающих через фиксированную точку пространства $\vec{r}$ в разные моменты времени t. Плотность тока $\vec{j}$ – это вектор, коллинеарный вектору $\vec{v}$. Его модуль задает количество электричества, протекающего в единицу времени через единичную площадку, которая перпендикулярна вектору скорости в данной точке пространства в данный момент времени.

Априори не исключено, что в пространстве распределены источники заряда с *интенсивностью* $I\left(\vec{r}\,\middle|\,t\right)$, понимаемой алгебраически. Эта величина задает количество заряда, порождаемого $\left(I > 0\right)$ или уничтожаемого $\left(I < 0\right)$ в единичном объеме, содержащем точку $\vec{r}$, в единичный промежуток времени, включающий момент t.

Локальные характеристики связаны с глобальными, и наоборот. Они выражаются друг через друга. Так, полный *заряд* в объеме V равен

$$q = \int_V \rho dV, \qquad (2.5)$$

а заряд на поверхности и на кривой равен соответственно

$$q = \int_S \sigma \, dS, \qquad q = \int_L \varkappa \, dl. \tag{2.6}$$

Величина

$$J = \int_S j_n \, dS = \int_S \left(\vec{j}, \, d\vec{S} \right) \tag{2.7}$$

есть *сила тока* (или просто *ток*), т.е. заряд, протекающий в единицу времени через поверхность S. Наконец, интеграл

$$Q = \int_V I dV \tag{2.8}$$

задает заряд, производимый источниками в единицу времени в объеме V. Из свойства аддитивности заряда очевидно, что введенные локальные и глобальные характеристики его распределения и движения тоже аддитивны:

$$\rho = \sum_i \rho^{(i)}, \quad q = \sum_i q^{(i)}; \quad \vec{j} = \sum_i \vec{j}^{(i)}, \quad J = \sum_i J^{(i)}; \quad I = \sum_i I^{(i)}, \quad Q = \sum_i Q^{(i)}, \tag{2.9}$$

где суммирование проводится по всем носителям электрического заряда.

Дальше довольно часто придется прибегать к модели линейных проводников. Реально к ним относится всякий проводник, длина которого гораздо больше его поперечного размера. Для него вводится весьма полезное понятие *элемента тока* $Jd\vec{l}$. Используя коллинеарность векторов $\vec{j}$ и $d\vec{l}$, его можно преобразовать следующим образом:

$$Jd\vec{l} = j\Delta S d\vec{l} = \vec{j}\Delta S dl = \vec{j}dV = \rho\vec{v}dV = dq \cdot \vec{v},$$

где обозначения и выкладки очевидны. В итоге приходим к соотношениям

$$Jd\vec{l} = dq \cdot \vec{v} \tag{2.10,а}$$

и

$$Jd\vec{l} = \vec{j}dV, \tag{2.10,б}$$

которые часто будут использоваться в дальнейшем.

Как говорилось в §1, на микроскопическом уровне распределение зарядов всегда является дискретным. Но при макроскопическом рассмотрении скалярное поле $\rho\left(\vec{r}\,\middle|\,t\right)$ и векторное поле $\vec{j}\left(\vec{r}\,\middle|\,t\right)$ часто в очень хорошем приближении можно считать непрерывными функциями своих аргументов. Тем не менее, и в рамках классической электродинамики понятие точечного заряда, которое здесь выступает как модельное (см. обсуждение в §1), чрезвычайно полезно. Выясним, как в этом случае записываются плотность заряда и плотность тока.

Из определения (2.1) следует, что для одного точечного заряда q_a, находящегося в данный момент времени в точке с радиус-вектором $\vec{r}_a$,

$$\rho_a = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_a \\ \infty, & \vec{r} = \vec{r}_a \end{cases},$$

причем, согласно (2.5), должно выполняться соотношение

$$\int \rho_a dV = q_a .$$

Поэтому, вспоминая определение дельта-функции, будем иметь

$$\rho_a\left(\vec{r}\,\middle|\,t\right) = q_a \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_a(t)\right). \tag{2.11}$$

Для плотности тока, порождаемого одним точечным зарядом, получим в соответствии с определением (2.4)

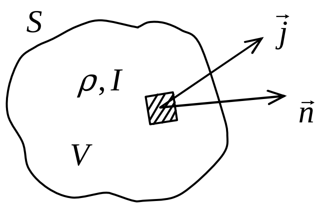
$$\vec{j}_a\left(\vec{r}\,\middle|\,t\right) = q_a \vec{v}_a(t) \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_a(t)\right). \tag{2.12}$$

Если имеется несколько точечных зарядов, то из свойств аддитивности (2.9) найдем, что

$$\rho = \sum_a q_a \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_a\right), \quad \vec{j} = \sum_a q_a \vec{v}_a \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_a\right). \tag{2.12}$$

В дальнейшем будут использоваться в зависимости от рассматриваемых задач как непрерывная, так и дискретная картина распределения зарядов.

Обратимся теперь непосредственно к закону сохранения заряда. Выделим в пространстве некоторый объем V, ограниченный неподвижной поверхностью S. Для заключенного внутри него заряда можно записать уравнение баланса



$$\frac{dq}{dt} = -J + Q. \tag{2.13}$$

Слева стоит скорость изменения заряда, т.е. его изменение в объеме V в единицу времени. Оно обусловлено протеканием заряда через поверхность (слагаемое $-J$) и возможной генерацией его внутри объёма (слагаемое Q). Наличие знака минус у J связано с тем, что нормаль к поверхности – внешняя, и положительный поток заряда отвечает его вытеканию из объема, которое приводит к убыли q.

Перепишем теперь уравнение (2.13), вводя локальные характеристики:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV = -\oint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) + \int_V I \, dV. \tag{2.14}$$

Проделаем следующие преобразования: в первом члене внесем производную по времени под знак интеграла, в результате чего она превратится в частную (заряд зависит только от времени, а ρ есть функция и времени, и координат); во втором члене используем теорему Гаусса–Остроградского, чтобы превратить поверхностный интеграл в объемный; все члены перенесем в левую часть. В итоге получим

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} - I \right) dV = 0\,. \qquad (2.15)$$

Поскольку область интегрирования V здесь произвольна, то равенство нулю интеграла означает равенство нулю подынтегрального выражения. Поэтому приходим к следующей локальной форме записи уравнения баланса электрического заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = I\,. \qquad (12.16)$$

При надлежащей трактовке величин $\rho, \vec{j}$ и I оно справедливо и для других «субстанций» (энергии, импульса и т.п.), чем в дальнейшем мы еще воспользуемся.

Теперь можно сформулировать закон сохранения заряда в виде трех различных по форме, но эквивалентных по сущности утверждений.

Закон сохранения заряда (глобальная формулировка)

Суммарный электрический заряд замкнутой системы сохраняется:

$$\sum_a q_a = const\,. \qquad (2.17)$$

Закон сохранения заряда (локальная формулировка)

В природе отсутствуют источники электрического заряда:

$$I\left(\vec{r}\,|\,t\right) \equiv 0\,. \qquad (2.18)$$

Закон сохранения заряда (уравнение непрерывности)

Для электрического заряда справедливо уравнение непрерывности

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0}\,. \qquad (2.19)$$

Первая формулировка наиболее проста и наглядна, с нее мы начинали обсуждение проблемы в §1, и именно она приводится в школьном учебнике: «В изолированной системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остаётся неизменной: $q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n = const$ ». Вторая формулировка говорит о том, что электрический заряд нигде и никогда не может порождаться или уничтожаться. Третья формулировка сразу следует из второй и из уравнения баланса (2.16). Она наиболее конструктивна и потому чаще всего применяется в теоретической физике. Смысл названия «уравнение непрерывности» выяснится чуть позже.

Рассмотрим частный, но важный случай стационарного движения зарядов. Это понятие требует некоторого комментария, так как его часто путают с понятием равномерного движения. Любой процесс называется *стационарным*, если все характеризующие его локальные величины $f\left(\vec{r}\,|\,t\right)$ на самом деле от времени не зависят:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0\,. \tag{2.20}$$

Тонкость здесь в том, что величина f относится не к каким-то выделенным частицам, а к фиксированным пространственным точкам, т.е. $f\left(\vec{r}\,|\,t\right)$ есть поле в математическом смысле этого слова [сравн. с обсуждением формулы (2.4)]. И стационарность процесса вовсе не означает, что значение f, скажем, скорости, для каждой частицы неизменно во времени. Требуется лишь, чтобы значения f, в том числе скорости, для всех частиц, проходящих каждую данную точку пространства, в разные моменты времени были одинаковыми. В разных же точках эти значения, вообще говоря, различны.

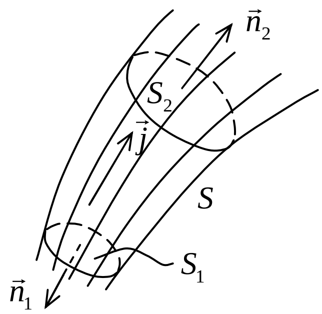
Когда говорится о стационарном движении зарядов, подразумевается, что рассмотрение является макроскопическим, так что функции ρ и $\vec{j}$ считаются непрерывными. Ведь на микроскопическом уровне распределение зарядов всегда дискретно, и в данной точке пространства плотность ρ то равна нулю (частицы нет), то обращается в бесконечность (частица проходит). Поэтому значение ρ в этой точке явно зависит от времени.

Согласно определению (2.20), для стационарного движения зарядов в только что разъясненном смысле $\partial\rho/\partial t = 0$. Поэтому уравнение непрерывности (2.19), выражающее закон сохранения электрического заряда, принимает в этом случае вид

$$div\,\vec{j} = 0\,. \tag{2.21}$$

Таким образом, плотность тока $\vec{j}\left(\vec{r}\right)$ есть соленоидальное векторное поле. Это означает, что всякая *линия тока*, т.е. линия, которой вектор $\vec{j}$ касателен в каждой точке (вспомним силовые линии электрического поля), либо замкнута, либо уходит обоими концами на бесконечность. Во всяком случае линии тока при стационарном движении зарядов непрерывны – они нигде не начинаются и нигде не кончаются, т.е. не имеют источников. Именно поэтому соотношение (2.19) и в самой общей ситуации именуется *уравнением непрерывности*. В нестационарном случае единственными источниками векторного поля $\vec{j}$ служат локальные изменения плотности заряда: $div\,\vec{j} = -\partial\rho/\partial t$.

Выделим в пространстве некоторую *трубку тока*, поверхность S которой образована непрерывно расположенными линиями тока. В качестве таковой можно взять реальный проводник конечного сечения, по которому протекает стационарный электрический ток. Ясно, что заряженные частицы не могут пересекать поверхность трубки тока, так что на ней



$$j_n\big|_S = 0\,. \tag{2.22}$$

Выберем теперь какой-то отрезок трубки тока (проводника), ограниченный с торцов поверхностями S_1 и S_2. Проинтегрируем по его объему стационарное уравнение непрерывности (2.21) и используем теорему Гаусса:

$$0 = \int_V div\,\vec{j}\;dV = \oint_\Sigma \left(\vec{j}, d\vec{S}\right),$$

или

$$\int_{S_1}\left(\vec{j}, d\vec{S}\right)+\int_{S_2}\left(\vec{j}, d\vec{S}\right)+\int_{S}\left(\vec{j}, d\vec{S}\right)=0. \tag{2.23}$$

Первый интеграл здесь есть сила тока J_1 второй – сила тока J_2, а третий интеграл равен нулю благодаря условию (2.22). В итоге получаем

$$J_1 + J_2 = 0. \tag{2.24}$$

Таким образом, при стационарном движении зарядов алгебраическая сумма токов, втекающих в данный объем трубки тока, равна нулю. Мы пришли к первому правилу Кирхгофа, известному из общей физики. Оно означает, что полный электрический заряд в выделенном объеме остается постоянным. Этот результат можно сформулировать несколько иначе. Примем обычное соглашение о знаках, считая ток положительным, если он вытекает из объема, и отрицательным, если он втекает в него (или наоборот), и обозначим через J модуль силы тока. Тогда равенство (2.24) перепишется как $-J_1 + J_2 = 0$ (см. рисунок), или

$$J_1 = J_2. \tag{2.25}$$

Таким образом, закон сохранения заряда при стационарном его движении приводит к постоянству силы тока вдоль трубки тока. Заметим, что постоянство его во времени в любом заданном сечении есть следствие одной лишь стационарности.

Предположим теперь, что в каждой точке сечений S_1 и S_2 вектор плотности тока $\vec{j}$ перпендикулярен соответствующей поверхности. Тогда, учитывая (2.22) и вводя обозначение $\left|\vec{j}\right| = j$, равенство (2.23) можно будет переписать как

$$-\int_{S_1} j\ dS + \int_{S_2} j\ dS = 0. \tag{2.26}$$

Здесь принято во внимание, что в сечении S_1 векторы $\vec{j}$ и $\vec{n}$ антипараллельны, а в сечении S_2 они параллельны (см. рисунок), ибо нормали к замкнутой поверхности выбраны, как и всегда, внешними. Пусть, далее, плотность тока постоянна в каждом сечении. Вынося ее из-под интегралов, получим из (2.26) $-j_1S_1 + j_2S_2 = 0$, или

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \tag{2.27}$$

Если, наконец, плотность заряда постоянна в трубке тока (в проводнике), так что $\rho_1 = \rho_2$, то из (2.27) будем иметь

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \tag{2.28}$$

Соотношения (2.27) и (2.28) идентичны по форме тем, которые приводятся в общем[1)] и даже школьном[2)] курсах физики при изучении движения жидкостей и газов. Первое из них

[1)] Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. – М.: Просвещение, 1979. §10.2.
[2)] Кикоин И.К., Кикоин А.К. Физика 8. – М.: Просвещение, 1986. §74.

справедливо для любой сплошной среды, второе – только для жидкостей, которые можно считать практически несжимаемыми. Указанное совпадение формул, разумеется, не случайно. Ведь мы исходили из уравнения баланса (2.13) или (2.16), которое, как отмечалось, является универсальным. И в конечном итоге соотношения (2.27) и (2.28) выражают, при сделанных предположениях и надлежащей трактовке плотности ρ, как закон сохранения электрического заряда, так и закон сохранения массы. Мы видим, что различные по своей физической сути процессы или явления могут описываться одинаковыми по форме математическими уравнениями. Такие ситуации очень часто встречаются в физике, и они свидетельствуют о мощи и универсальности применяемого в ней математического аппарата.

§3. Электромагнитное поле

Как говорилось во введении, основной физической системой, рассматриваемой в электродинамике, является *электромагнитное поле* – особый вид материи, выступающий в качестве переносчика электромагнитного взаимодействия. Ближайшая наша задача – ввести переменные состояния электромагнитного поля. Напомним, что *состояние* системы – важнейшее для всей физики предельно общее теоретическое понятие. Оно расшифровывается следующим образом. Во-первых, если известно состояние физической системы в данный момент времени, то мы имеем максимально полную информацию о всех ее характеристиках в этот момент («статический» аспект). Во-вторых, задание состояния системы в начальный момент времени t_0 предопределяет состояния этой системы во все прочие моменты времени t («динамический» аспект). Последнее утверждение составляет суть принципа причинности в его общей конструктивной формулировке. Состояния системы задаются определенными *переменными состояния*, в качестве каковых могут выступать как конечные наборы чисел (в классической механике это координаты $\vec{r}_a$ и скорости $\vec{v}_a$ частиц), так и функции. Как мы сейчас увидим, именно последняя ситуация характерна для электродинамики.

В основу понятия состояния электромагнитного поля следует положить какой-то самый главный атрибут этой физической системы. Причины возникновения поля могут быть самыми разнообразными. Достаточно вспомнить, что электромагнитное поле может порождаться покоящимися зарядами, движущимися зарядами, переменным магнитным полем, химическими элементами и т.п. Поэтому переменные состояния электромагнитного поля естественно связывать с основным его проявлением – *воздействием* на электрические заряды.

Иными словами, для характеризации поля в данной точке пространства $\vec{r}$ в данный момент времени t следует поместить в эту точку какой-то пробный заряд q_a и измерить действующую на него силу. Такой подход уже использовался в §1, при формировании понятия электрического заряда. При этом мы исходили из анализа силы

$$\vec{F}_a = \vec{F}_a\left(\vec{r}_a, \vec{v}_a \,|x|\, t\right), \tag{3.1}$$

действующей на заряженную частицу со стороны окружения. Такая ее запись соответствует духу «теории дальнодействия», ибо состояния всех тел системы считаются взятыми в один момент времени.

Теперь же у нас появилось понятие поля, что соответствует «теории близкодействия». И в духе этой теории ту же самую силу следует записывать как

$$\vec{F}_a = \vec{F}\left(\vec{r}; t \,|\, q_a, \vec{v}_a\right), \tag{3.2}$$

чем подчеркивается, что она есть функция точки поля $\vec{r}$ (и времени), а характеристики q_a и $\vec{v}_a$ пробной частицы выступают в качестве параметров (мы не включили в их число положение частицы $\vec{r}_a$, ибо по самой постановке задачи $\vec{r}_a = \vec{r}$).

Для описания поля в целом нужно знать значения силы $\vec{F}_a$ во *всех* пространственных точках. Вектор $\vec{r}$ выступает в качестве «номера частицы», и поэтому электромагнитное поле есть физическая система с *бесконечным* числом степеней свободы.

Итак, величины, задающие состояние поля, связываются с силами, общую структуру которых выявляет формула (3.2). Сила $\vec{F}_a$ зависит от самого поля в данной точке пространства $\vec{r}$ в данный момент времени t, и это как раз то, что нам нужно. Но она зависит также от характеристик пробной частицы q_a, $\vec{v}_a$, и это то, от чего следует избавиться. Иными словами, чтобы охарактеризовать поле в точке $\vec{r}$ в момент t, нужно из силы (3.2) как-то исключить, точнее, выделить заряд пробной частицы q_a и ее скорость $\vec{v}_a$. С зарядом дело обстоит весьма просто.

Первый эмпирический факт. Электромагнитная сила, действующая на пробную частицу, пропорциональна ее заряду:

$$\vec{F}_a = q_a \vec{f}\left(\vec{r};t\middle|\vec{v}_a\right), \tag{3.3}$$

где вектор $\vec{f}$ не зависит от q_a.

Собственно, данное утверждение не является каким-то новым. По сути дела оно равнозначно определению электрического заряда [сравн. с формулой (1.6)], которое основывается на эмпирических фактах, обсуждавшихся в §1.

Наименее тривиальна зависимость силы $\vec{F}_a$ от скорости $\vec{v}_a$ пробной частицы. Ее исследование, к которому мы и переходим, приводит к возможности разбиения электромагнитного поля (в фиксированной системе отсчета!) на два компонента – электрическое и магнитное поля. Кроме того, оно приведет к возможности описания состояния поля посредством задания двух векторнозначных функций.

Определение. Часть $\vec{F}_a^E$ электромагнитной силы $\vec{F}_a$, не зависящая от скорости пробной частицы, называется *электрической* силой.

Можно сказать также, что электрическая сила $\vec{F}_a^E$ – это электромагнитная сила, действующая на пробную частицу, которая в данной системе отсчета покоится ($\vec{v}_a = 0$):

$$\vec{F}_a^E = \vec{F}\left(\vec{r};t\middle|q_a,\vec{0}\right). \tag{3.4}$$

В случае, когда такая же сила действует и на движущийся заряд $\left(\vec{v}_a \neq 0\right)$, электромагнитное поле именуется *электрическим*. Еще раз подчеркнем, что электрическое поле определяется через его воздействие на заряженные частицы, а не через конкретные причины, порождающие это поле. Так, многие учащиеся сознательно или бессознательно отождествляют электрическое поле с полем, создаваемым неподвижными зарядами. Этому заблуждению способствует то обстоятельство, что в школьном и общем курсах физики изучение электромагнитных явлений начинается с подробного анализа электростатического поля. Следует подчеркнуть также, что электрическое поле определяется через воздействие на заряженные частицы, неподвижные в данной системе отсчета. Полное осознание двух указанных простых фактов является очень важным, ибо позволяет:

(а) избежать смешивания понятия электрического поля и электростатического поля, которое является лишь частным случаем первого;

(б) избежать иногда бытующего представления о всяком электрическом поле как о поле потенциальном;

(в) наиболее логичным и естественным способом ввести понятие магнитного поля (см. ниже) – на фундаментальном уровне, а не путем привлечения макроскопических объектов типа витков с током;

(г) сразу выявить относительность разбиения электромагнитного поля на электрический и магнитный компоненты, так как понятие покоящейся частицы само является относительным.

Из сопоставления формул (3.4) и (3.3) заключаем, что электрическую силу можно представить в форме

$$\vec{F}_a^E = q_a \vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right), \tag{3.5}$$

где вектор $\vec{E}$ уже не включает никаких характеристик пробной частицы, а относится к самому полю. Векторное поле $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right)$ называется *напряженностью* электрического поля, или просто электрическим полем. В научной литературе (и в ряде учебников[1)]) ныне почти повсеместно используется второй термин, имеющий тем самым двоякий смысл. Во-первых, электрическое поле – частный случай электромагнитного поля, а потому оно выступает в качестве некоего материального агента. Во-вторых, электрическое поле – одна из характеристик электромагнитного поля, т.е. это поле в математическом смысле слова. Подобная двузначность весьма удобна в силу своей экономности, а к недоразумениям она обычно не приводит. Из формулы (3.5), которую формально следует трактовать как определение напряженности $\vec{E}$, явствует, что

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_a^E}{q_a}. \tag{3.6}$$

Таким образом, определение напряженности электрического поля операционально: наряду с прочим оно содержит в себе способ измерения определяемой физической величины $\vec{E}$.

Если электрическое поле рассматривается с точки зрения причин, его порождающих, то, как явствует из эксперимента, имеет место следующее фундаментальное утверждение.

<u>Принцип суперпозиции для электрического поля</u>. Полное электрическое поле, создаваемое несколькими источниками, есть векторная сумма электрических полей, создаваемых отдельными источниками:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}^{(i)}. \tag{3.7}$$

Разумеется, если принять принцип независимости взаимодействий

$$\vec{F}_a = \sum_i \vec{F}_a^{(i)}, \tag{3.8}$$

справедливый в классической механике, то принцип суперпозиции (3.7) будет простым следствием определения напряженности (3.5) или (3.6). Но электромагнитные силы, вообще

[1)] См., например: Астахов А.В., Широков Ю.М. Курс физики, т. II. Электромагнитное поле. – М.: Наука, 1980.

говоря, не принадлежат классу механических сил, а электромагнитное поле есть специфический вид материи. Поэтому его свойства следует формулировать, как можно реже прибегая к основным положениям механики.

Пусть теперь в выбранной системе отсчета заряженная частица не покоится, а движется с некоторой скоростью $\vec{v}_a \neq 0$. На нее по-прежнему будет действовать электрическая сила (3.5), зависящая только от положения $\vec{r}$ частицы (и времени t). Но, как показывает опыт, теперь частица будет испытывать со стороны поля и некоторое дополнительное воздействие, весьма специфическое и связанное с самим фактом движения.

Определение. Электромагнитная сила, действующая на заряженную частицу, которая движется в данной системе отсчета, и дополнительная к силе электрической, называется *магнитной* силой.

Объединяя формулы (3.2) и (3.4), магнитную силу $\vec{F}_a^M$ можно будет записать как

$$\vec{F}_a^M = \vec{F}_a - \vec{F}_a^E = \vec{F}\left(\vec{r};t\middle|q_a,\vec{v}_a\right) - \vec{F}\left(\vec{r};t\middle|q_a,\vec{0}\right). \tag{3.9}$$

Как следует из самого определения магнитной силы, на покоящийся заряд ($\vec{v}_a = 0$) она не действует. С особой ясностью это видно из формулы (3.9). Если электромагнитное поле таково, что для него $\vec{E} \equiv 0$, то только магнитный компонент силы $\vec{F}_a^M$ и имеется. В этом случае поле называется *магнитным* полем. И здесь уместно еще раз подчеркнуть, что магнитное поле определяется через воздействие на заряженные частицы (а не какие-то витки с током), причем на частицы движущиеся. Отсюда, в частности, наиболее четко видно, что понятия электрического и магнитного полей являются относительными (подробнее см. §4).

Второй эмпирический факт. Магнитная сила, действующая на частицу, есть линейная однородная функция ее скорости, причем вектор $\vec{F}_a^M$ всегда ортогонален вектору $\vec{v}_a$.

Из сопоставления этого утверждения с формулой (3.3) заключаем, что магнитную силу можно представить в форме

$$\vec{F}_a^M = kq_a\left[\vec{v}_a,\vec{B}\right], \tag{3.10}$$

где k – коэффициент, определяемый выбором системы единиц. В СИ $k=1$; в гауссовой системе $k = 1/c$, где c – электродинамическая постоянная (априори не скорость света!), имеющая размерность скорости и равная примерно $3\cdot 10^{10}$ см/с. Таким образом,

$$\vec{F}_a^M = \frac{q_a}{c}\left[\vec{v}_a,\vec{B}\right] \text{ (гауссова система)} \tag{3.11}$$

или

$$\vec{F}_a^M = q_a\left[\vec{v}_a,\vec{B}\right] \text{ (СИ).} \tag{3.12}$$

Поскольку $\vec{F}$ и $\vec{v}$ – обычные (полярные) векторы, а векторное произведение есть псевдовекторная операция, то $\vec{B}$ – псевдовектор (аксиальный вектор).

Он уже не включает никаких характеристик пробной частицы и относится к самому магнитному полю. (Псевдо)векторное поле $\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{r}\middle|t\right)$ называется *индукцией* магнитного поля, или просто магнитным полем (сравн. с обсуждением названия векторного поля $\vec{E}$).

Разнобой в терминологии – напряженность электрического поля, но индукция магнитного поля – как раз и устраняется в современной научной литературе, когда говорят об электрическом поле $\vec{E}$ и магнитном поле $\vec{B}$. Этот разнобой обусловлен причинами чисто исторического характера.

Формула (3.10) по сути своей есть определение индукции магнитного поля $\vec{B}$, корректность которого подтверждается всей совокупностью эмпирических фактов. Выразить из него $\vec{B}$ в явном виде, переписав (3.10) в форме, подобной (3.6) для электрического поля, не удается. Но это не столь уж существенно, поскольку определение $\vec{B}$ все равно является операциональным, ибо содержит в себе способ измерения этой величины. Только для отыскания вектора $\vec{B}$ в данной точке $\vec{r}$ нужно проделать не одно, а два измерения: узнать силу $\vec{F}_a^M$, которая действует на частицу a, движущуюся со скоростью $\vec{v}_a$, а затем силу $\vec{F}_b^M$, которая действует на частицу b, движущуюся со скоростью $\vec{v}_b \perp \vec{v}_a$ (см. дополнение к данному параграфу).

Если магнитное поле рассматривается с точки зрения причин, его порождающих, то для него имеет место следующее утверждение, вполне аналогичное принципу суперпозиции для электрического поля и потому не требующее дополнительных комментариев.

Принцип суперпозиции для магнитного поля. Полное магнитное поле, создаваемое несколькими источниками, есть векторная сумма магнитных полей, создаваемых отдельными источниками:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}^{(i)} . \tag{3.13}$$

Итак, мы ввели две характеристики электромагнитного поля – напряженность электрического поля $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right)$ и индукцию магнитного поля $\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{r}\,|t\right)$. Как будет ясно из дальнейшего, именно они и являются его переменными состояния в смысле, разъясненном в начале параграфа. Но чтобы осознать всю важность этого обстоятельства, нужно сначала, отправляясь от каких-то фундаментальных экспериментальных фактов, сформулировать систему уравнений, которым подчиняются векторные поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Решению данной проблемы фактически и посвящена вся оставшаяся часть данной главы.

Дополнение к §3*

Понятия электрического и магнитного полей можно ввести более экономно и математически более четко и строго, если воспользоваться аппаратом тензорного исчисления.

Основной эмпирический факт. Электромагнитная сила, действующая на частицу, пропорциональна ее заряду и есть линейная функция ее скорости.

Это утверждение равнозначно тому, что i-й компонент силы $\vec{F}_a$ имеет следующий вид:

$$F_{ai} = q_a \left\{ E_i + T_{ij} v_{aj} \right\}, \tag{3.14}$$

где $E_i = E_i\left(\vec{r}\,|t\right)$ – некоторое векторное поле, $T_{ij} = T_{ij}\left(\vec{r}\,|t\right)$ – некоторое тензорное поле второго ранга, которые и есть характеристики поля, причем по дважды повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование от 1 до 3 (по x, y, z).

Поскольку электрическая сила по определению есть сила, действующая на покоящуюся частицу ($\vec{v}_a = 0$), то из (3.14) для нее получаем

$$\vec{F}_a^{\,E} = q_a \vec{E}\,, \tag{3.15}$$

где вектор $\vec{E}$ называется напряженностью электрического поля. Для магнитной силы, дополнительной к электрической, из (3.14) получаем

$$F_{ai}^{M} = q_a T_{ij} v_{aj}\,, \tag{3.16}$$

где T_{ij} – характеристика магнитного поля. На данном этапе электромагнитное поле описывают 12 величин: 3 компонента электрического поля $\vec{E}$ и 9 компонентов магнитного поля T_{ij}. Однако существует еще одно важное свойство, которое позволит нам уменьшить это число с 12 до 6.

Дополнительный эмпирический факт. Магнитная сила, действующая на частицу, всегда ортогональна ее скорости: $\vec{F}_a^{M} \perp \vec{v}_a$.

Это условие записывается как равенство нулю скалярного произведения:

$$\left(\vec{F}_a^{M}, \vec{v}_a\right) \equiv F_{ai}^{M} v_{ai} = 0\,. \tag{3.17}$$

Подставляя сюда (3.16), получим ограничение на тензорное поле T_{ij}:

$$T_{ij} v_i v_j = 0 \tag{3.18}$$

(индекс a, нумерующий частицы, для краткости записи опускается).

Всякий тензор второго ранга инвариантным способом представляется в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) \equiv \alpha_{ij} + \beta_{ij}\,. \tag{3.19}$$

Подстановка этого представления в (3.18) дает

$$\alpha_{ij} v_i v_j + \beta_{ij} v_i v_j = 0\,. \tag{3.20}$$

Второе слагаемое тождественно равно нулю как полная свертка антисимметричного и симметричного тензоров β_{ij} и $v_i v_j$. Но тогда должно быть

$$\alpha_{ij} v_i v_j = 0\,. \tag{3.21}$$

Равенство нулю симметричной квадратичной формы при всех v_i и v_j равнозначно равенству нулю ее коэффициентов: $\alpha_{ij} = 0$. В итоге получаем

$$F_i^{M} = q \beta_{ij} v_j\,, \tag{3.22}$$

где $\beta_{ij} = \beta_{ij}\left(\vec{r}\,|\,t\right)$ – антисимметричное тензорное поле второго ранга, полностью характеризующее магнитное поле и имеющее 3 независимых компонента.

Всякий антисимметричный тензор второго ранга дуален (псевдо)вектору – в том смысле, что его можно представить в форме

$$\beta_{ij} = k\varepsilon_{ijl} B_l \,, \tag{3.23}$$

где ε_{ijl} – символ Леви-Чивита, а k – коэффициент, определяемый выбором системы единиц. Подставляя (3.23) в (3.22), получим

$$F_i^M = kq\varepsilon_{ijl} B_l v_j = kq\varepsilon_{ijl} v_j B_l = kq\left[\vec{v}, \vec{B}\right]_i \,, \tag{3.24}$$

где на последнем этапе использована тензорная форма записи векторного произведения. Таким образом, восстанавливая индекс a, окончательно находим

$$\vec{F}_a^M = kq_a\left[\vec{v}_a, \vec{B}\right]. \tag{3.25}$$

Псевдовекторное поле $\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{r}\,\middle|\,t\right)$ есть индукция магнитного поля.

Этот результат можно получить из выражения (3.22) несколько более элементарным способом, не предполагающим знание операции дуализации. Из свойства антисимметрии $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$ явствует, что тензор β_{ij} имеет три независимых компонента: диагональные элементы равны нулю, а недиагональные элементы с одинаковыми парами индексов различаются лишь знаками. Поэтому матрицу данного тензора можно записать как

$$\beta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & \beta_{13} \\ -\beta_{12} & 0 & \beta_{23} \\ -\beta_{13} & -\beta_{23} & 0 \end{pmatrix} \equiv k\begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

где введены обозначения

$$\beta_{12} = kB_z, \quad \beta_{13} = -kB_y, \quad \beta_{23} = kB_x \,. \tag{3.27}$$

Расписывая теперь выражение (3.22) в матричной символике

$$F_i^M = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = kq\begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = kq\begin{pmatrix} B_z v_y - B_y v_z \\ -B_z v_x + B_x v_z \\ B_y v_x - B_x v_y \end{pmatrix} = kq\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}_i \,, \tag{3.28}$$

вновь придем к формуле (3.25).

Обсудим, как, используя эту формулу, можно экспериментально измерить магнитное поле $\vec{B}$ в данной точке пространства. Возьмем в качестве пробной частицу a, скорость $\vec{v}_a$ которой направлена вдоль оси x. Измерим действующую на нее магнитную силу

$$\vec{F}_a^M = kq_a\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_a & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left\{0, \; -kq_a v_a B_z, \; kq_a v_a B_y\right\}, \tag{3.29}$$

откуда получим

$$B_y = \frac{F_{az}^M}{kq_a v_a}\ , \qquad \mathrm{B}_z = -\frac{F_{ay}^M}{kq_a v_a}\ . \tag{3.30}$$

Таким образом, это измерение позволяет найти компоненты B_y и B_z магнитного поля $\vec{B}$, т.е. его поперечную (относительно оси x) составляющую $B_\perp$. Взяв затем другую пробную частицу b, скорость $\vec{v}_b$ которой направлена вдоль оси y, совершенно аналогично получим

$$B_x = -\frac{F_{bz}^M}{kq_b v_b}\ , \qquad B_z = \frac{F_{bx}^M}{kq_b v_b}\ . \tag{3.31}$$

Это измерение позволяет найти уже известный компонент B_z, но главное – компонент B_x магнитного поля $\vec{B}$, т.е. его продольную (относительно оси x) составляющую $B_\parallel$. В итоге двух указанных измерений вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ определяется полностью и однозначно. Мы видим, что определение магнитного поля, как и определение электрического поля, является операциональным.

§4. <u>Сила Лоренца</u>

Прежде чем обсуждать эмпирический базис и динамические уравнения классической электродинамики, проанализируем подробнее выражение для силы, действующей на заряженные частицы со стороны электромагнитного поля. Считаем, что путем экспериментирования с пробными частицами найдены электрическое поле $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}\,|t)$ и магнитное поле $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}\,|t)$. Тогда в соответствии с результатами §3 на произвольную частицу с зарядом q, помещенную в данную точку пространства, будет действовать сила, равная (в гауссовой системе единиц)

$$\boxed{\vec{F} = q\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right]\right\}}\ . \tag{4.1}$$

Она представляет собой сумму электрической и магнитной сил и называется *силой Лоренца*[1)]. Формула (4.1) является важнейшим соотношением электродинамики, так как позволяет связать уравнения электромагнитного поля с уравнениями движения заряженных частиц.

Рассмотрим теперь непрерывно распределенный заряд (в смысле, разъясненном в §2) и выделим в пространстве некоторый элемент объема dV. Для заключенных внутри него частиц имеем

$$dq = \rho dV \quad \text{и} \quad dq \cdot \vec{v} = \rho\vec{v}dV = \vec{j}dV\ , \tag{4.2}$$

а потому действующая на них полная сила Лоренца

[1)] Иногда, в частности в школьном учебнике, силой Лоренца называют только ее магнитную составляющую, т.е. второе слагаемое в (4.1). Мы придерживаемся терминологии, более принятой в современной физике.

$$d\vec{F} = dq\cdot\vec{E} + \frac{dq}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right] \tag{4.3}$$

будет равна

$$d\vec{F} = \left\{\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{j},\vec{B}\right]\right\}dV\,. \tag{4.4}$$

Интегрирование по конечному объему V дает суммарную силу, действующую на все находящиеся в нем частицы:

$$\vec{F} = \int\limits_V \left\{\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{j},\vec{B}\right]\right\}dV \equiv \int\limits_V \vec{f}dV\,, \tag{4.5}$$

где величина

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{j},\vec{B}\right] \tag{4.6}$$

есть, очевидно, *плотность* силы Лоренца, т.е. электромагнитная сила, рассчитанная на единицу объема.

Пусть теперь поле чисто магнитное, и в него помещен линейный проводник, по которому протекает постоянный ток J. Как явствует из формулы (4.4), на элемент объема dV проводника действует сила

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\left[\vec{j},\vec{B}\right]dV\,. \tag{4.7}$$

Учитывая, что рассматривается линейный проводник, сделаем подстановку (2.10) $\vec{j}dV = Jd\vec{l}$. В итоге получим выражение для силы, действующей на элемент длины dl проводника с током J со стороны магнитного поля $\vec{B}$:

$$d\vec{F} = \frac{J}{c}\left[d\vec{l},\vec{B}\right]. \tag{4.8}$$

Это есть *закон Ампера*, известный из школьного курса физики[1)], только записанный в векторной форме. Исторически первым экспериментально был открыт именно этот закон. Формулу (4.1) Х.А. Лоренц получил, отправляясь от (4.8) и используя рассуждения, обратные проведенным выше[2)]. Тем не менее, в настоящее время фундаментальным физическим законом считается именно выражение для силы Лоренца, действующей со стороны электромагнитного поля на первичный объект – движущуюся заряженную частицу. Закон Ампера представляет собой результат макроскопического суммирования по отдельным зарядам, а потому рассматривается в современной физике как вторичная закономерность.

Теперь о работе силы Лоренца, совершаемой в единицу времени, т.е. о ее *мощности* $\mathcal{P}$. Вспоминая, что

$$\mathcal{P} = \left(\vec{v},\vec{F}\right), \tag{4.9}$$

[1)] Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9, – М.: Просвещение, 1986. §88.

[2)] Именно так получается выражение для силы Лоренца в школьном учебнике (см. там же, §89).

мы из исходного выражения (4.1) для силы Лоренца, действующей на заряженную частицу, сразу получим

$$\mathcal{P} = q\left(\vec{v}, \vec{E}\right), \tag{4.10}$$

где учтена ортогональность магнитной силы вектору скорости.

Если рассматривается непрерывно распределенный заряд, то имеет смысл говорить о *плотности* мощности p силы Лоренца – ее работе в единицу времени в единичном объеме. Подставляя в (4.9) вместо $\vec{F}$ плотность силы $\vec{f}$, задаваемую формулой (4.6), будем иметь

$$p = \left(\vec{v}, \vec{f}\right) = \left(\vec{v}, \rho\vec{E}\right) = \left(\rho\vec{v}, \vec{E}\right),$$

т.е.

$$p = \left(\vec{j}, \vec{E}\right). \tag{4.11}$$

Этот результат потребуется нам при обсуждении энергетических соотношений для электромагнитного поля и движущихся в нем заряженных частиц.

Выражение для силы Лоренца уже на данном этапе позволяет нам предварительно обсудить с количественной точки зрения *относительность* понятий электрического и магнитного полей. В исходной инерциальной системе отсчета S на частицу действует сила Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right]. \tag{4.12}$$

В системе отсчета S', движущейся относительно S поступательно со скоростью $\vec{V}$, на ту же частицу будет действовать сила

$$\vec{F}' = q\vec{E}' + \frac{q}{c}\left[\vec{v}', \vec{B}'\right], \tag{4.13}$$

где учтена инвариантность электрического заряда. Вспоминая классический закон сложения скоростей $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$, перепишем (4.12) как

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\left[\vec{v}', \vec{B}\right] + \frac{q}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]. \tag{4.14}$$

Вспомним теперь, что для нерелятивистских систем, которые сейчас и рассматриваются, сила есть инвариант преобразований Галилея: $\vec{F}' = \vec{F}$. Это позволяет приравнять правые части (4.13) и (4.14):

$$q\vec{E}' + \frac{q}{c}\left[\vec{v}', \vec{B}'\right] = q\vec{E} + \frac{q}{c}\left[\vec{v}', \vec{B}\right] + \frac{q}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]. \tag{4.15}$$

Чтобы выделить электрическое поле $\vec{E}'$ в системе отсчета S', выберем частицу, которая покоится в этой системе, т.е. для которой $\vec{v}' = 0$. В этом случае равенство (4.20) превратится в

$$q\vec{E}' = q\vec{E} + \frac{q}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]. \tag{4.16}$$

Отсюда сразу приходим к закону преобразования электрического поля:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right] . \tag{4.17}$$

Аналогичный закон для магнитного поля мы приведем пока без вывода (он будет установлен в гл. III):

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{E}\right] . \tag{4.18}$$

Из полученных результатов следует, в частности, что если в исходной системе отсчета поле было чисто электрическим ($\vec{B} = 0$), то в S'

$$\vec{E} = E, \qquad \vec{B}' = -\frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{E}\right] , \tag{4.19}$$

т.е. в движущейся системе отсчета наряду с электрическим будет существовать и магнитное поле. Сходным образом, если в S нет электрического поля ($\vec{E} = 0$), то в системе отсчета S'

$$\vec{E}' = \frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right], \qquad \vec{B}' = \vec{B} , \tag{4.20}$$

и здесь уже $\vec{E}' \neq 0$. Таким образом, при переходе к движущейся системе отсчета магнитное поле может «порождать» электрическое поле, и наоборот. Это и есть свидетельство относительности данных понятий. Мало того, оказывается, что при некоторых условиях один из компонентов поля с $\vec{E} \neq 0$ и $\vec{B} \neq 0$ можно «уничтожить», переходя в подходящую систему отсчета (см. гл. III).

§5. Основные задачи классической электродинамики

Все общие задачи классической электродинамики можно разделить на три большие группы.

1. Задано электромагнитное поле, т.е. векторные поля $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right)$ и $\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{r}\,|t\right)$; требуется найти закон движения $\vec{r} = \vec{r}\left(t\right)$ заряженной частицы, помещенной в это поле.
2. Задано пространственное распределение и движение заряженных частиц, т.е. функции $\rho = \rho\left(\vec{r}\,|t\right)$ и $\vec{j} = \vec{j}\left(\vec{r}\,|t\right)$; требуется найти создаваемое ими электромагнитное поле $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right)$, $\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{r}\,|t\right)$.
3. Априори не задано ни электромагнитное поле, ни распределение заряженных частиц, а известны лишь их природа и число; требуется определить поле, создаваемое частицами, и их движение, вызываемое этим полем.

Задачи из первой группы относятся, по сути дела, к области механики – классической или релятивистской. Их специфика в том, что сила, действующая на частицу, фиксирована – это сила Лоренца. Математически проблема состоит в отыскании решения дифференциального уравнения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left\{\vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right) + \frac{1}{c}\left[\dot{\vec{r}}, \vec{B}\left(\vec{r}\,|t\right)\right]\right\} \tag{5.1}$$

при заданных начальных условиях

$$\vec{r}\left(t_0\right) = \vec{r}_0, \qquad \dot{\vec{r}}\left(t_0\right) = \vec{v}_0 \ . \tag{5.2}$$

Нерелятивистское и релятивистское уравнения движения различаются выражениями для импульса частицы:

$$\vec{p}_{нерел} = m\vec{v} \qquad \text{и} \qquad \vec{p}_{рел} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \ . \tag{5.3}$$

Большую пользу приносит закон изменения энергии частицы

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\vec{v}, \vec{F}\right) = q\left(\vec{v}, \vec{E}\right) \ . \tag{5.4}$$

В нерелятивистском случае ε – обычная кинетическая энергия, в релятивистском случае

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \ . \tag{5.5}$$

Задачи из второй группы – основные, которые нас будут интересовать, и именно их анализу посвящена практически вся первая часть курса. О тех модификациях, которые необходимо внести в постановку подобных задач при наличии макроскопических тел (проводников и диэлектриков), будет сказано во второй части курса, посвященной электродинамике сплошных сред.

Задачи из третьей группы – самые общие и наиболее сложные, ибо требуют *совместного* отыскания электромагнитного поля и движения заряженных частиц. Точно подобные задачи практически никогда не решаются. В то же время они чрезвычайно важны (достаточно вспомнить физику плазмы). Для исследования этих задач создано множество достаточно эффективных приближенных методов. В своей общей постановке они встретятся нам в следующей главе, при обсуждении законов сохранения для системы частицы + поле в целом. Кроме того, соответствующие динамические уравнения (уравнения Максвелла – Лоренца) послужат во второй части курса исходным пунктом при построении электродинамики сплошных сред.

§6. Эмпирический базис классической электродинамики

Приступим к обсуждению второй основной задачи классической электродинамики, являющейся в дальнейшем самой главной. Считаем заданными распределение заряженных частиц – плотность заряда $\rho = \rho\left(\vec{r}\,|t\right)$ и их движение – плотность тока $\vec{j} = \vec{j}\left(\vec{r}\,|t\right)$. Требуется найти создаваемое ими электромагнитное поле – напряженность электрического поля $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right)$ и магнитную индукцию $\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{r}\,|t\right)$. Еще раз подчеркнем, что пока рассмотрение проводится в вакууме. Общий подход к проблеме таков:

- описываем набор фундаментальных экспериментальных фактов – эмпирический базис классической электродинамики;
- основываясь на них, находим уравнения для полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$;

- исследуем общие свойства этих уравнений;
- отыскиваем поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в разных конкретных случаях, решая систему уравнений для них, дополненную при необходимости надлежащими начальными и граничными условиями.

В данном параграфе как раз и обсуждаются главнейшие экспериментальные факты, на которых базируются уравнения классической электродинамики. Изложение является достаточно кратким. Оно существенно опирается на материал, известный из курса общей физики[1], и носит резюмирующий, систематизирующий и обобщающий характер. Некоторые важные элементы эмпирического базиса электродинамики нам уже известны. К ним относятся:

(а) экспериментальные факты, описанные в §1, которые позволяют ввести понятие электрического заряда;

(б) закон сохранения электрического заряда, в локальной форме записываемый в виде уравнения непрерывности (2.19);

(в) экспериментальные факты, описанные в §3, которые позволяют ввести понятия электрического поля и магнитного поля;

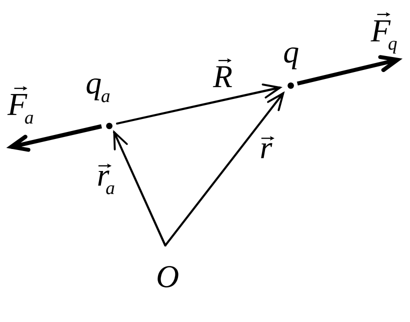
(г) принцип суперпозиции для электрического поля (3.7) и для магнитного поля (3.13);

(д) тесно связанное с опытными фактами из пункта (в) выражение (4.1) для силы Лоренца, а также вытекающий из него закон Ампера (см. обсуждение в §4).

Обсудим теперь другие элементы эмпирического базиса электродинамики, без которых немыслимо построение всей ее конструкции, в том числе системы уравнений для электромагнитного поля в вакууме.

1. Закон Кулона

Рассмотрим две частицы с зарядами q_a и q, покоящиеся в точках $\vec{r}_a$ и $\vec{r}$, которые соединяет вектор $\vec{r}-\vec{r}_a \equiv \vec{R}$ (см. рисунок). Электрическую силу $\vec{F}_q$, действующую на вторую частицу (с зарядом q) со стороны первой, можно записать как



$$\vec{F}_q = F\left(R \middle| q, q_a\right)\frac{\vec{R}}{R} \ . \tag{6.1}$$

Здесь учтено, что электрические заряды – это скалярные характеристики частиц, а другие внутренние характеристики у них считаются отсутствующими. Поэтому в задаче имеется единственный выделенный вектор – $\vec{R}$, вдоль которого только и может быть направлена сила $\vec{F}_q$. Благодаря изотропности пространства функция F является скалярной функцией, зависящей только от модуля R вектора $\vec{R}$, но не от его направления. Таким образом, электрические силы взаимодействия двух неподвижных частиц есть силы *центральные*. Это означает, в частности, что для них выполняется третий закон Ньютона

$$\vec{F}_a = -\vec{F}_q, \tag{6.2}$$

где $\vec{F}_a$ – сила, действующая на первую частицу со стороны второй. В противном случае система двух частиц как целое самоускорялась бы.

---

[1] Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. – М.: Просвещение, 1980; Сивухин Д.В. Общий курс физики. т. III. Электричество. – М.: Наука, 1977.

Из результатов §1 явствует, что сила $\vec{F}_q$ пропорциональна заряду q [формула (1.6)]. То же относится и к силе $\vec{F}_a$, которая должна быть пропорциональна величине q_a. Но так как $\vec{F}_q$ и $\vec{F}_a$ связаны соотношением (6.2), мы заключаем, что сила $\vec{F}_q$ пропорциональна произведению зарядов q и q_a, и выражение (6.1) можно переписать как

$$\vec{F}_q = qq_a f(R)\frac{\vec{R}}{R} . \tag{6.3}$$

Таким образом, чтобы полностью фиксировать силу $\vec{F}_q$, осталось определить лишь зависимость f от расстояния. Измерения, которые выполнил Ш.Кулон (а еще раньше Г.Кавендиш), показали, что

$$f(R) \sim \frac{1}{R^2} . \tag{6.4}$$

Комбинируя это соотношение с (6.3), придем к *закону Кулона*

$$\vec{F}_q = \alpha\frac{qq_a}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} . \tag{6.5}$$

Как мы видим, его наиболее содержательной частью является именно зависимость электростатической силы от расстояния между частицами.

Коэффициент α определяется выбором системы единиц. В СГСЭ и в гауссовой системе, где единицей длины служит сантиметр, а единицей силы – дина, полагается, что $\alpha = 1$ и является безразмерной величиной:

$$\boxed{\vec{F}_q = \frac{qq_a}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}} . \tag{6.6}$$

Эта формула включает не только закон Кулона как таковой, но и соглашение о выборе единицы измерения электрического заряда:

$$1 \text{ СГСЭ-ед. заряда} = 1 \text{ дин}^{1/2}\text{см} = 1 \text{ г}^{1/2}\text{см}^{3/2}\text{с}^{-1} . \tag{6.7}$$

В СИ единицей электрического заряда служит кулон (см. §1),. единицей длины – метр, единицей силы – ньютон, и α обозначается как $1/4\pi\varepsilon_0$:

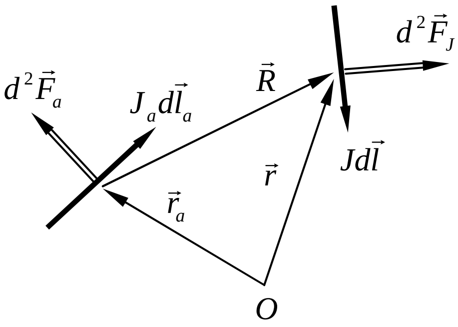
$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_a}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} . \tag{6.8}$$

Величина ε_0, в общем-то не имеющая особого физического смысла, называется *электрической постоянной* (в более старой терминологии – диэлектрической проницаемостью вакуума), причем

$$\varepsilon_0 \cong 8.85 \cdot 10^{-12}\, Кл^2 Н^{-1} м^{-1} . \tag{6.9}$$

2. Закон Био – Савара – Лапласа

Теперь мы должны сформулировать как можно более близкий аналог закона Кулона для чисто магнитного взаимодействия. Первоначально оно изучалось в опытах с линейными проводниками, по которым протекают постоянные токи. Из результатов соответствующих измерений путем теоретического анализа для силы магнитного взаимодействия двух элементов тока был получен *закон Био–Савара–Лапласа* (все обозначения пояснены на рисунке):



$$\boxed{d^2\vec{F}_J = \frac{JJ_a}{c^2}\frac{\left[d\vec{l},\left[d\vec{l}_a,\vec{R}\right]\right]}{R^3}}. \qquad (6.10)$$

Здесь использована гауссова система единиц. В СИ коэффициент $1/c^2$ заменяется на $\mu_0/4\pi$, где μ_0 – магнитная постоянная:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, A^{-2} H\,. \qquad (6.11)$$

Заметим, что элементарные силы магнитного взаимодействия элементов токов уже не являются центральными и не подчиняются третьему закону Ньютона: $d^2\vec{F}_a \neq -d^2\vec{F}_J$ (см. рисунок). Однако можно показать, что полные силы взаимодействия замкнутых проводников с током, получаемые интегрированием выражения (6.10) по их контурам, *подчиняются* третьему закону Ньютона, т.е. они родственны механическим силам.

Производя в (6.10) замены (2.10,а) $Jd\vec{l} \mapsto dq \cdot \vec{v}$, получим

$$d^2\vec{F}_J = \frac{dq\, dq_a}{c^2}\,\frac{\left[\vec{v},\left[\vec{v}_a,\vec{R}\right]\right]}{R^3}, \qquad (6.12)$$

где, например, dq – заряд в элементе проводника длиной dl, порождающий ток J, а $\vec{v}$ – скорость его движения. Естественно думать, что на макроскопическом уровне сила (6.13) получается путем сложения попарных сил магнитного взаимодействия[1)] «элементарных» точечных зарядов q и q_a. Поэтому для каждой из этих сил можно записать

$$\boxed{\vec{F}_q^M = \frac{qq_a}{c^2}\,\frac{\left[\vec{v},\left[\vec{v}_a,\vec{R}\right]\right]}{R^3}}\,. \qquad (6.13)$$

И в этом случае $\vec{F}_a \neq -\vec{F}_q$, т.е. третий закон Ньютона не выполняется. Физическая причина в том, что наряду с частицами в систему нужно обязательно включить электромагнитное поле,

[1)] Силы электрического взаимодействия отдельных частиц взаимно компенсируются, ибо проводник в целом считается электрически нейтральным: в нем в равных количествах присутствуют заряды противоположных знаков. Магнитные силы отличны от нуля потому, что заряды разных знаков движутся с разными скоростями.

через которое осуществляется взаимодействие и которое само обладает некоторым импульсом[2)].

По своей сущности формула (6.13) наиболее близка закону Кулона, так как тоже относится к взаимодействию точечных заряженных частиц, только не покоящихся, а движущихся. Она «получается» из (6.6) подстановками типа $q \mapsto q\vec{v}/c$ при учете векторного характера скоростей. Однако в отличие от закона Кулона формула (6.13) не принадлежит к фундаментальным физическим законам. Оказывается, она справедлива лишь в нерелятивистском приближении – при малых (по сравнению с c) скоростях взаимодействующих частиц. Это связано с тем, что сам закон Био–Савара–Лапласа (6.10), который привел нас к (6.13), является нерелятивистским. Он установлен из опытов над макроскопическими проводниками с током, а в реальном проводнике скорости движения носителей тока, как известно, очень малы. Нерелятивистский характер выражения для силы (6.13) проявляется, в частности, в том, что он не учитывает эффектов запаздывания: положения и скорости взаимодействующих частиц берутся в один и тот же момент времени. Подчеркнем также, что закон Био–Савара–Лапласа относится к взаимодействию стационарных (постоянных) токов, а движение точечных частиц всегда является нестационарным. Поэтому к выводам, которые получаются из анализа выражения для силы (6.13) и касаются нестационарных электромагнитных полей, следует относиться с известной осторожностью. С подобной ситуацией мы встретимся в следующем параграфе.

3. Закон электромагнитной индукции Фарадея

Рассмотрим некоторый замкнутый линейный проводник с постоянным током. Как известно, всякое электростатическое поле, т.е. электрическое поле неподвижных зарядов, является потенциальным (см. §7 и гл. IV). Поэтому его работа по перемещению заряда Δq вдоль замкнутого линейного проводника равна нулю:

$$\Delta A_0 = \oint_L \left(\Delta\vec{F}_{стат}, d\vec{l}\right) = \Delta q \oint_L \left(\vec{E}_{стат}, d\vec{l}\right) = 0\,. \qquad (6.14)$$

Но в проводнике всегда существуют энергетические потери – скажем, тепловые (сверхпроводники здесь не рассматриваются). В итоге заключаем, что одно лишь электростатическое поле не может породить замкнутый ток. Даже если он по каким-то причинам возникнет, то затем быстро затухнет.

Но все-таки для создания тока необходимы именно электрические силы, ибо они должны действовать даже на неподвижные заряды. Электростатические (кулоновы) силы для этой цели не годятся, и они должны иметь какую-то другую природу. Любые электрические силы, отличные от электростатических, называют, отдавая дань исторической традиции, *сторонними* силами. В соответствии с результатом (6.14), в качестве основной характеристики стороннего электрического поля естественно взять величину, связанную с его работой по перемещению заряда по замкнутому контуру. Чтобы она была характеристикой именно самого поля, достаточно поделить эту работу на заряд (сравн. с определением напряженности электрического поля). В итоге приходим к понятию *электродвижущей силы* (ЭДС) $\mathcal{E}$, которая по определению равна

[2)] Проводники с током также, конечно, взаимодействуют через электромагнитное поле. Но оно является стационарным, а потому импульса не несет. В этом причина того, что полные силы взаимодействия замкнутых проводников подчиняются третьему закону Ньютона (см. выше). Движение же отдельных точечных частиц никогда не может быть стационарным, а значит, нестационарным оказывается и порождаемое ими поле, и оно несет импульс.

$$\mathcal{E}=\frac{\Delta A_{\circlearrowright}}{\Delta q}=\oint_{L}\left(\vec{E}_{стор},d\vec{l}\right). \qquad (6.15)$$

Иными словами, ЭДС – это величина, измеряемая работой сторонних электрических сил по перемещению единичного заряда по замкнутому контуру.

Терминология сложилась в тот период, когда природа электрических явлений была изучена еще плохо. И она не совсем удачна, так как может вызывать ложные ассоциации. ЭДС есть не силовая, а энергетическая характеристика электрического поля. Заметим, что при введении данного понятия мы следовали естественной общенаучной логике, которая принята и в современном школьном учебнике[1)]. Приведенное определение заменило бытовавшее в прежних учебниках и методически очень неудачное определение ЭДС как напряжения на зажимах разомкнутого источника тока.

В качестве источников сторонних электрических полей долгое время применялись лишь химические элементы. Важнейшее открытие М.Фарадея, совершившее революцию в теории и практике электромагнетизма, состоит в том, что при определенных условиях источником подобных полей может служить магнитное поле. Это явление называется *электромагнитной индукцией*, и его описывает *закон Фарадея*, установленный на основе многочисленных экспериментов. Он гласит, что ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}$ в данном контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока

$$\Phi \equiv \int_{S}\left(\vec{B},d\vec{S}\right), \qquad (6.16)$$

пронизывающего этот контур:

$$\boxed{\mathcal{E}=-\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi}{dt}}\,. \qquad (6.17)$$

Наличие знака минус отражает известное из школьного курса физики правило Ленца[1)]. Закон Фарадея (6.17) записан в гауссовой системе единиц; в СИ коэффициент $1/c$ заменяется на 1.

Сам М.Фарадей связывал электромагнитную индукцию с наличием реальных проводников. Возникновение ЭДС индукции при перемещении проводника в магнитном поле объяснялось тем, что на движущиеся заряды разных знаков действуют со стороны поля разные силы. Но М.Фарадей обнаружил и другую причину возникновения ЭДС индукции – движение магнита относительно неподвижного проводника. Объяснение этого эффекта оказалось для него затруднительным. Проблему разрешил Дж. Максвелл, предложивший универсальную формулировку закона электромагнитной индукции.

Согласно его точке зрения, следует различать две причины, которые при наличии магнитного поля могут вызывать ток в проводнике[2)]. Одна из них («фарадеева») в некоторой степени тривиальна. Это действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике. Формулу (6.17) в данном случае можно вывести из более фундаментальных принципов – например, рассматривая работу составляющей силы Лоренца[3)] или применяя закон сохранения энергии[4)]. К данной проблеме мы вернемся во второй части курса.

[1)] Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, 1986, §64.
[1)] Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, 1986, §92.
[2)] Это обстоятельство достаточно ясно подчеркнуто и в школьном учебнике: Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, §94 – 95.
[3)] Там же, §95.
[4)] Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Курс общей физики. Электричество и магнетизм. – М.: Просвещение, 1980, §7.2.

Другая причина («максвеллова») гораздо более глубокая. Это возникновение электрического поля за счет изменения во времени магнитного поля. Здесь, естественно, необязательно наличие какого-то реального проводника и заряженных частиц. Индукционное электрическое поле может существовать и в пустом пространстве. Для него тоже выполняется закон Фарадея в форме (6.17), но при вычислении ЭДС по формуле (6.15) отправляясь от экспериментальных фактов, изложенных в предыдущем параграфе. Затем необходимо будет совершить некий логический скачок и распространить результаты на случай произвольного электромагнитного поля.
интегрирование проводится не по контуру проводника, а по любой неподвижной замкнутой кривой. В такой ситуации выражение (6.17) для ЭДС индукции уже невыводимо из каких-то более общих положений. Сам закон Фарадея в трактовке Максвелла возводится в ранг фундаментального физического закона, подобного закону Кулона. И именно в этой трактовке он войдет ниже в качестве составного элемента в общую систему уравнений электромагнитного поля.

§7. Уравнения электромагнитного поля

Теперь мы приступаем к обсуждению второй основной задачи классической электродинамики (см. §5). Считаем, что распределение зарядов в пространстве и их движение известны, т.е. заданы функции $\rho = \rho\left(\vec{r}\,|t\right)$ и $\vec{j} = \vec{j}\left(\vec{r}\,|t\right)$. Требуется найти создаваемое зарядами электромагнитное поле, т.е. векторные функции $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right)$ и $\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{r}\,|t\right)$. Для этого прежде всего нужно построить систему уравнений, которые описывают поведение электромагнитного поля. Сразу подчеркнем, что соответствующие уравнения относятся к числу фундаментальных физических законов, и их нельзя вывести из каких-то существенно более общих принципов, а можно только «угадать». Мы начнем с рассмотрения электромагнитных полей частного вида и получим для них уравнения,

1. Электростатическое поле

Наиболее проста система покоящихся заряженных частиц, которые, как показывает опыт, создают только электрическое поле. Это поле называется *электростатическим*. Эмпирической основой электростатики служат закон Кулона, определение напряженности электрического поля и принцип суперпозиции для электрических полей.

Пусть в точке $\vec{r}_a$ покоится частица с зарядом q_a, поле которой нас сейчас и интересует. Поместим в произвольную точку $\vec{r}$ пробную частицу с зарядом q (см. рисунок на с.31). Закон Кулона (6.6) утверждает, что на эту частицу будет действовать сила

$$\vec{F}_q = \frac{qq_a}{R^2}\,\frac{\vec{R}}{R} \equiv \frac{qq_a}{\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_a}{\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|}. \tag{7.1}$$

С другой стороны, согласно определению (3.5) для той же силы можно записать

$$\vec{F}_q = q\vec{E}_a\left(\vec{r}\right), \tag{7.2}$$

где $\vec{E}_a$ – электрическое поле, создаваемое зарядом q_a в точке $\vec{r}$. Из сравнения (7.2) с (7.1) сразу явствует, что

$$\vec{E}_a = \frac{q_a}{R^2}\,\frac{\vec{R}}{R} \equiv q_a\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_a}{\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|^3}\ . \tag{7.3}$$

Но в таком виде полученный результат не допускает обобщения на случай произвольного электрического поля. Найдем поэтому дифференциальные уравнения, которым подчиняется поле (7.3), для чего вычислим его дивергенцию и ротор. Используя при вычислении $div\,\vec{E}$ одну из важнейших формул векторного анализа

$$div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 4\pi\delta\left(\vec{r}\right), \tag{7.4}$$

будем иметь

$$div\,\vec{E}_a = div_{\vec{r}}\left\{q_a\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_a}{\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|^3}\right\} = q_a div_{\vec{R}}\left\{\frac{\vec{R}}{R^3}\right\} = q_a\cdot 4\pi\delta\left(\vec{R}\right) = 4\pi q_a\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_a\right),$$

где нижние индексы у символа div указывают переменные дифференцирования. При этом учтено первое из двух очевидных соотношений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_{ai}} \tag{7.5}$$

для производных любой функции f, зависящей только от разности

$$\vec{R} \equiv \vec{r}-\vec{r}_a = \left\{x-x_a,\ y-y_a,\ z-z_a\right\} \equiv \left\{x_1-x_{a_1},\ x_2-x_{a_2},\ x_3-x_{a_3}\right\} \equiv \left\{X_1, X_2, X_3\right\}.$$

Итак, мы нашли, что

$$div\,\vec{E}_a = 4\pi q_a\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_a\right). \tag{7.6}$$

Вспоминая формулу (2.11), перепишем этот результат как

$$div\,\vec{E}_a = 4\pi\rho_a, \tag{7.7}$$

где ρ_a – плотность заряда частицы a, порождающей электростатическое поле $\vec{E}_a$. Если поле создается не одной, а несколькими частицами, то, проводя в (7.6) суммирование по всем этим частицам, получим

$$\sum_a\left\{div\,\vec{E}_a\right\} = div\left\{\sum_a E_a\right\} = div\,\vec{E} = 4\pi\sum_a\rho_a = 4\pi\rho,$$

т.е.

$$\boxed{div\,\vec{E} = 4\pi\rho}\,. \tag{7.8}$$

В процессе выкладок последовательно использованы: свойство линейности операции дифференцирования, принцип суперпозиции (3.7) и свойство аддитивности (2.9) плотности заряда. Уравнение (7.8) и есть одно из основных уравнений электростатики. Оно свидетельствует о том, что существуют источники электростатического поля, каковыми являются электрические заряды (вспомним физический смысл дивергенции).

Еще одно уравнение получим, вычисляя ротор векторного поля (7.3):

$$rot\ \vec{E}_a = rot_{\vec{r}} \left\{ q_a \frac{\vec{r} - \vec{r}_a}{\left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|^3} \right\} = q_a\ rot_{\vec{R}} \left\{ \frac{\vec{R}}{R^3} \right\} = 0\,,$$

где на заключительном этапе учтено, что ротор всякого центрального векторного поля равен кулю. Таким образом, имеем

$$rot\ \vec{E}_a = 0\,. \tag{7.9}$$

Проводя здесь суммирование по всем источникам, для полного поля $\vec{E}$, создаваемого всеми заряженными частицами, найдем

$$\boxed{rot\ \vec{E} = 0}\ . \tag{7.10}$$

[сравн. с переходом от (7.7) к (7.8)]. Это и есть второе основное уравнение электростатики. Оно говорит о том, что всякое электростатическое поле (но необязательно всякое электрическое поле!) является потенциальным, чем мы уже пользовались в §6.

2. Стационарное магнитное поле

Следующей по сложности является система стационарно движущихся зараженных частиц, которая создает как электрическое, так и магнитное поле. Что касается электрического поля $\vec{E}$, то будем предполагать, что в данном случае его уравнения совпадают с (7.8) и (7.10). Конечно, это есть дополнительная гипотеза. Но, как говорилось выше, без подобных логических скачков вообще невозможно построение полной системы уравнений для произвольного электромагнитного поля.

Нам предстоит рассмотреть *стационарное магнитное поле*, которое часто именуется также *магнитостатическим*. Эмпирической основой магнитостатики служат закон Био–Савара–Лапласа, закон Ампера (или определение магнитного поля $\vec{B}$) и принцип суперпозиции для магнитных полей. Обращаясь к ситуации, представленной рисунком на с.33, запишем формулы (6.10) и (4.8):

$$d^2\vec{F}_J = \frac{JJ_a}{c^2} \frac{\left[d\vec{l}, \left[d\vec{l}_a, \vec{R} \right] \right]}{R^3} \qquad \text{и} \qquad d^2\vec{F}_J = \frac{J}{c} \left[d\vec{l}, d\vec{B}_a \right]\,. \tag{7.11}$$

Из них для магнитного поля $d\vec{B}_a$, создаваемого в точке $\vec{r}$ элементом тока $J_a d\vec{l}_a$, который находится в точке $\vec{r}_a$, получаем

$$d\vec{B}_a = \frac{J_a}{c} \frac{\left[d\vec{l}_a, \vec{R} \right]}{R^3} \equiv \frac{J_a}{c} \frac{\left[d\vec{l}_a, \vec{r} - \vec{r}_a \right]}{\left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|^3}\,. \tag{7.12}$$

Можно исходить также из формулы (6.13) и выражения для магнитной составляющей силы Лоренца (4.1):

$$\ddot{\vec{F}}_q^M = \frac{qq_a}{c^2}\frac{\left[\vec{v},\left[\vec{v}_a,\vec{R}\right]\right]}{R^3} \qquad \text{и} \qquad \vec{F}_q^M = \frac{q}{c}\left[\vec{v},\vec{B}_a\right] . \tag{7.13}$$

Они дают для магнитного поля $\vec{B}_a$, создаваемого в точке $\vec{r}$ заряженной частицей a, которая в данный момент времени находится в точке $\vec{r}_a$,

$$\vec{B}_a = \frac{q}{c}\frac{\left[\vec{v}_a,\vec{R}\right]}{R^3} \equiv \frac{q}{c}\frac{\left[\vec{v}_a,\vec{r}-\vec{r}_a\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|^3} . \tag{7.14}$$

Казалось бы, для получения уравнений магнитостатики достаточно, по аналогии с электростатикой, вычислить дивергенцию и ротор векторного поля (7.12) или (7.14). Однако непосредственно на этом пути мы не достигнем цели, поскольку сами элементарные поля (7.12) и (7.14) не являются стационарными (см. §6, п.2). Стационарным будет только *полное* магнитное поле, создаваемое замкнутым проводником с током или всеми движущимися частицами, участвующими в стационарном процессе.

Магнитное поле проводника с током получается интегрированием выражения (7.12) по контуру L этого проводника

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{J}{c}\oint_L \frac{\left[d\vec{l}',\vec{r}-\vec{r}'\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \tag{7.15}$$

(переменную интегрирования удобнее обозначать как $\vec{r}'$, а не $\vec{r}_a$). С помощью подстановки (2.10б) $Jd\vec{l} \mapsto \vec{j}dV$ в (7.15) можно перейти от линейных токов к объемным, в результате чего будем иметь

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int_V \frac{\left[\vec{j}(\vec{r}'),\vec{r}-\vec{r}'\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dV' , \tag{7.16}$$

где интегрирование проводится по объему V проводника с током. Магнитное поле стационарно движущихся частиц получается суммированием выражения (7.14) по всем этим частицам:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{c}\frac{\left[\vec{v}_a,\vec{r}-\vec{r}_a\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|^3} . \tag{7.17}$$

Для получения уравнений магнитостатики можно использовать любое из трех последних выражений. Оказывается, что проще всего исходить из формулы (7.17) для стационарного магнитного поля, дивергенцию и ротор которого мы и будем вычислять. В дополнении к данному параграфу рассматриваются другие способы вывода уравнений магнитостатики. Прежде чем переходить к выкладкам, заметим, что (7.17) можно переписать как

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\sum_a \left[\vec{v}_a,\vec{E}_a\right], \tag{7.18}$$

где $\vec{E}_a$ – электрическое поле, задаваемое формулой (7.3) и потому удовлетворяющее уравнениям (7.6) и (7.9).

Используя формулу векторного анализа

$$div\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\vec{b},rot\ \vec{a}\right)-\left(\vec{a},rot\ \vec{b}\right), \qquad (7.19)$$

принимая во внимание, что вектор $\vec{v}_a$ дифференцировать не нужно (это скорость выделенной частицы, а не векторное поле), и учитывая уравнение (7.9), сразу получим

$$div\ \vec{B}=\frac{1}{c}\sum_a div\ \left[\vec{v}_a,\vec{E}_a\right]=-\frac{1}{c}\sum_a\left(\vec{v}_a,\ rot\ \vec{E}_a\right)=0,$$

так что

$$\boxed{div\ \vec{B}=0}\ . \qquad (7.20)$$

Это уравнение свидетельствует о том, что у стационарного магнитного поля нет источников: в природе отсутствуют магнитные заряды.

Вычисление ротора поля (7.19) несколько более сложное. С помощью формулы

$$rot\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\ div\ \vec{b}-\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)\vec{b} \qquad \left[\vec{a}=const\right] \qquad (7.21)$$

находим

$$rot\ \vec{B}=\frac{1}{c}\sum_a\ rot\left[\vec{v}_a,\vec{E}_a\right]=\frac{1}{c}\sum_a\vec{v}_a div\vec{E}_a-\frac{1}{c}\sum_a\left(\vec{v}_a,\vec{\nabla}\right)\vec{E}_a\ . \qquad (7.22)$$

Согласно уравнению (7.6), в первой сумме справа

$$div\ \vec{E}_a=4\pi q_a\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_a\right). \qquad (7.23)$$

Каждое слагаемое во второй сумме преобразуется следующим образом:

$$\left(\vec{v}_a,\vec{\nabla}\right)\vec{E}_a=v_{a_i}\frac{\partial\vec{E}_a}{\partial a_i}=\frac{dx_{a_i}}{dt}\left\{-\frac{\partial\vec{E}_a}{\partial x_{a_i}}\right\}=-\frac{d\vec{E}_a}{dt}, \qquad (7.24)$$

где принято соглашение о суммировании по индексу i, а дифференцирование по переменным x_i заменено дифференцированием по координатам x_a заряженной частицы a с помощью второго соотношения (7.5). Подставляя (7.23) и (7.24) в (7.22) и вспоминая вторую формулу (2.12), получим

$$rot\ \vec{B}=\frac{4\pi}{c}\sum_a q_a\vec{v}_a\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_a\right)+\frac{1}{c}\sum_a\frac{d\vec{E}_a}{dt}=\frac{4\pi}{c}\sum_a\vec{j}_a+\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left\{\sum_a\vec{E}_a\right\}. \qquad (7.25)$$

Учитывая, наконец, свойство аддитивности (2.9) плотности тока и принцип суперпозиции (3.7) для электрического поля, будем иметь

$$rot\ \vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{d\vec{E}}{dt}\ . \qquad (7.26)$$

При трактовке этого уравнения возникает тонкость, связанная с тем, что его вывод основывался на формуле (7.14), задающей магнитное поле отдельной частицы, которое не является стационарным (вспомним замечание в конце п.2 в §6). Именно поэтому в (7.26) и появилось слагаемое с $d\vec{E}/dt$. Примем теперь во внимание, что весь рассматриваемый здесь процесс движения частиц есть процесс стационарный. И векторное поле $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right)$ на самом деле не может зависеть от времени, так что мы должны положить $d\vec{E}/dt = \partial\vec{E}/\partial t = 0$. Таким образом, окончательно находим следующее второе основное уравнение магнитостатики:

$$\boxed{rot\ \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}}\ . \tag{7.27}$$

Оно говорит о том, что стационарное магнитное поле является вихревым, причем источниками его вихрей служат токи заряженных частиц.

3. Электромагнитная индукция

Обратимся теперь к общему случаю нестационарных процессов. Как мы видели в §6, п.3, переменное магнитное поле порождает электрическое поле, причем это явление описывается законом Фарадея (6.17) в его максвелловой трактовке. В развернутой форме он записывается как

$$\oint\limits_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)\ , \tag{7.28}$$

где $\vec{E}$ – полное электрическое поле. Оно может порождаться покоящимися и/или стационарно движущимися зарядами, и в этих случаях его циркуляция равна нулю. Но главное, это поле порождается также переменным магнитным полем, которое, в свою очередь, возникает при нестационарном движении зарядов. Заметим, что поскольку рассматриваются электромагнитные явления в вакууме, то источники тока типа химических элементов с заданными ЭДС, а также движущиеся проводники здесь считаются отсутствующими. Их влияние будет рассмотрено в электродинамике сплошных сред, которой посвящена вторая часть курса.

Применяя к левой части (7.28) теорему Стокса и внося в правой части производную по времени под знак интеграла, в результате чего она превратится в частную производную [сравн. с переходом от формулы (2.14) к (2.15)], получим

$$\int\limits_S \left(rot\ \vec{E},\ d\vec{S}\right) = -\frac{1}{c}\int\limits_S \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, d\vec{S}\right)\ . \tag{7.29}$$

Отсюда в силу произвольности поверхности интегрирования S имеем

$$\boxed{rot\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}\ . \tag{7.30}$$

Таким образом, в общей ситуации электрическое поле оказывается вихревым (непотенциальным), причем роль источников его вихрей играет переменное во времени магнитное поле.

4. Гипотеза Максвелла

Итак, при учете нестационарности магнитного поля приходим к следующей системе уравнений для векторных функций $\vec{E}$ и $\vec{B}$:

$$\left.\begin{aligned} div\ \vec{E} &= 4\pi\rho \\ rot\ \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} div\ \vec{B} &= 0 \\ rot\ \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned}\right\} . \tag{7.31}$$

Здесь сделано весьма существенное предположение о том, что отдельные уравнения, полученные выше для ряда частных случаев, оказываются справедливыми и в самой общей ситуации. Система уравнений (7.27) фактически была установлена уже до Дж. Максвелла, хотя она и не выписывалась явно в представленной здесь форме.

Прежде всего нужно проверить внутреннюю согласованность этих уравнений, т.е. непротиворечивость только что указанного предположения. Возьмем с этой целью дивергенцию от обеих частей последнего уравнения:

$$div\left(rot\ \vec{B}\right) \equiv 0 = div\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}\right),$$

откуда

$$div\,\vec{j} = 0 . \tag{7.32}$$

Но последнее равенство противоречит закону сохранения электрического заряда, который в общем случае нестационарных процессов записывается как уравнение непрерывности (2.19), так что должно быть

$$div\,\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} . \tag{7.33}$$

С целью преодоления возникшей трудности добавим к плотности тока неизвестное пока слагаемое $\vec{j}_{см}$, которое по традиции будем именовать *током смещения*. Переписываем последнее уравнение (7.31):

$$rot\ \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_{см}\right) \tag{7.34}$$

и получаем

$$div\left(rot\ \vec{B}\right) \equiv 0 = \frac{4\pi}{c}\left(div\,\vec{j} + div\,\vec{j}_{см}\right),$$

откуда, используя уравнение непрерывности (7.33) и первое уравнение (7.31), найдем

$$div\,\vec{j}_{см} = -div\,\vec{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi}div\ \vec{E}\right\},$$

т.е.

$$div\,\vec{j}_{см} = div\ \left\{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\} . \tag{7.35}$$

Из (7.35) следует, что

$$\vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{f}\ , \tag{7.36}$$

где $\vec{f}$ – произвольное соленоидальное векторное поле:

$$div\,\vec{f} = 0\,, \tag{7.37}$$

априори вовсе не равное нулю.

Дж. Максвелл проанализировал эту проблему и сформулировал весьма сильное дополнительное предположение, согласно которому

$$f\left(\vec{r}\,|t\right) \equiv 0\,. \tag{7.38}$$

Таким образом, суть *гипотезы Максвелла* сводится к следующему утверждению. Чтобы не вступать в противоречие с законом сохранения электрического заряда, следует к обычному току $\vec{j}$ добавить «ток смещения»

$$\vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\ . \tag{7.39}$$

Подставляя это выражение в (7.34), придем к уравнению

$$\boxed{rot\ \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}\ , \tag{7.40}$$

которым Дж. Максвелл и заменил последнее уравнение (7.31), оставив все остальные уравнения неизменными.

Уравнение (7.40) свидетельствует о том, что наряду с электромагнитной индукцией существует также магнитоэлектрическая индукция. Суть последнего явления в том, что источник вихревого магнитного поля связан не только с движением заряженных частиц, но и с переменным во времени электрическим полем. Что же касается названия «ток смещения», то оно обусловлено причинами чисто исторического характера, не представляющими интереса в настоящее время.

Казалось бы, в справедливости гипотезы Максвелла можно было бы убедиться проще всего путем постановки экспериментов, аналогичных опытам Фарадея. Однако в прошлом столетии столь прямой путь оказался практически неприемлемым. Достижимые тогда переменные электрические поля порождали столь слабое магнитное поле, что оно не поддавалось регистрации. Поэтому статус фундаментального физического закона гипотеза Максвелла получила только после открытия электромагнитных волн, предсказанных теоретически на основе этой гипотезы.

Дополнение к §7*

На первый взгляд может показаться, что о существовании «тока смещения» свидетельствует анализ уравнений, которым подчиняется магнитное поле, создаваемое движущейся заряженной частицей. Ведь уравнение (7.26) идентично по форме уравнению

(7.40) и содержит член $\frac{1}{c}\partial\vec{E}/\partial t$. Но на самом деле это совпадение является иллюзорным и скорее связано с соображениями размерности, чем с существом проблемы. Здесь мы имеем типичный пример «превышения точности», т.е. выхода за рамки тех приближений, которые были приняты в начале рассуждений. Дело в том, что исходная формула (7.14) для магнитного поля движущейся частицы справедлива только при малых скоростях и только в так называемом квазистационарном приближении (см. гл.V). Строго она выводится из уравнений (7.20) и (7.27), не содержащих никаких «токов смещения», а потому их появление в процессе обратных выкладок и следует рассматривать как превышение точности. Наиболее последователен вывод уравнений магнитостатики из выражений для стационарных, а не квазистационарных магнитных полей. Два вывода такого рода и приводятся в данном дополнении. При этом будет рассматриваться только уравнение (7.27), так как с уравнением (7.20) ни при каком подходе проблем не возникает.

В процессе первого вывода указанного уравнения будем исходить из выражения (7.16) для стационарного магнитного поля, создаваемого токами, которые протекают по некоторому объемному проводнику. Вычисляем ротор этого поля, считая оправданным изменения порядка интегрирования и дифференцирования:

$$rot\ \vec{B}(\vec{r})=\frac{1}{c}rot\int_V\frac{\left[\vec{j}(\vec{r}'),\vec{r}-\vec{r}'\right]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'=\frac{1}{c}\int_V rot_{\vec{r}}\left[\vec{j}(\vec{r}'),\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]dV'.$$

Используя формулу (7.21), найдем, что

$$rot\ \vec{B}=\frac{1}{c}\int_V\vec{j}(\vec{r}')div_{\vec{r}}\left\{\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right\}dV'-\frac{1}{c}\int_V\left(\vec{j}(\vec{r}'),\vec{\nabla}_{\vec{r}}\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'\equiv\frac{1}{c}I_1+\frac{1}{c}I_2. \qquad (7.41)$$

В первом интеграле дивергенция соответствующего векторного поля равна $4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$, а потому

$$I_1=4\pi\int_V\vec{j}(\vec{r}')\ \delta(\vec{r}-\vec{r}')\ dV'=4\pi\vec{j}(\vec{r}). \qquad (7.42)$$

Во втором интеграле заменим с помощью второго соотношения (7.5) дифференцирование по x_i дифференцированием по x_i' и добавим к результату интеграл с $div_{\vec{r}'}\vec{j}(\vec{r}')$, равный нулю в силу уравнения непрерывности (2.21)для стационарных процессов:

$$I_2=\int_V\left(\vec{j}(\vec{r}'),\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\ dV'+\int_V\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\ div_{\vec{r}'}\vec{j}(\vec{r}')dV'. \qquad (7.43)$$

Принимая во внимание, что

$$\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)b+\vec{b}\ div\ \vec{a}\equiv\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)\vec{b}+\vec{b}\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)=\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)\vec{b}, \qquad (7.44)$$

перепишем выражение (7.43) как

$$I_2=\int_V\left(\vec{\nabla}_{\vec{r}'},\vec{j}(\vec{r}')\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\ dV'. \qquad (7.45)$$

С помощью обобщенной теоремы Гаусса – Остроградского

$$\oint_S d\vec{S}... = \int_V dV\vec{\nabla}... \tag{7.46}$$

преобразуем объемный интеграл (7.45) в поверхностный:

$$I_2 = \oint_S \left(d\vec{S}', \vec{j}\left(\vec{r}'\right)\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = \oint_S j_n\left(\vec{r}'\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dS'. \tag{7.47}$$

Учитывая, что на поверхности проводника с токами согласно (2.22) $j_n = 0$, получим

$$I_2 = 0. \tag{7.48}$$

Подставляя результаты (7.42) и (7.48) в (7.41), придем ко второму основному уравнению магнитостатики:

$$rot\ \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\ . \tag{7.49}$$

В процессе еще одного вывода этого уравнения будем исходить из выражения (7.15) для стационарного магнитного поля, создаваемого замкнутым линейным проводником с током:

$$\vec{B}\left(\vec{r}\right) = \frac{J}{c}\oint_{L_0}\frac{\left[d\vec{l}', \vec{r}-\vec{r}'\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \equiv \frac{J}{c}\oint_{L_0}\frac{\left[d\vec{l}', \vec{R}\right]}{R^3}\ . \tag{7.50}$$

Преобразуем эту формулу, для чего предварительно умножим скалярно обе ее части на произвольный, но постоянный вектор $\vec{a}$:

$$\left(\vec{a}, \vec{B}\right) = \frac{J}{c}\oint_{L_0}\frac{\left(\vec{a}, \left[d\vec{l}', \vec{R}\right]\right)}{R^3} = \frac{J}{c}\oint_{L_0}\left(\left[\frac{\vec{R}}{R^3}, \vec{a}\right], d\vec{l}'\right) = \frac{J}{c}\int_{S_0}\left(rot\left[\frac{\vec{R}}{R^3}, \vec{a}\right], d\vec{S}'\right)\ . \tag{7.51}$$

На последнем этапе использована теорема Стокса, так что S_0 – любая поверхность, натянутая на контур проводника L_0, но такая, что всегда на ней $\vec{R} \neq 0$, т.е. $\vec{r} \neq \vec{r}'$. Последнее означает, что точка наблюдения $\vec{r}$ не принадлежит поверхности S_0. С помощью (7.21) для подынтегральной функции в (7.51) находим

$$rot\left[\frac{\vec{R}}{R^3}, \vec{a}\right] = \left(\vec{a}, \vec{\nabla}\right)\frac{\vec{R}}{R^3} - \vec{a}\ div\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)\ . \tag{7.52}$$

Учитывая, что

$$div\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = 4\pi\delta\left(\vec{R}\right)$$

и что $\vec{R} \neq 0$ (см. выше), заключаем, что второе слагаемое в (7.52) равно нулю, и

$$rot\left[\frac{\vec{R}}{R^3}, \vec{a}\right] = \left(\vec{a}, \vec{\nabla}\right)\frac{\vec{R}}{R^3} \ . \tag{7.53}$$

Подставляем это выражение в (7.51):

$$\left(\vec{a}, \vec{B}\right) = \frac{J}{c}\int\limits_{S_0}\left(\left(\vec{a}, \vec{\nabla}\right)\frac{\vec{R}}{R^3}, d\vec{S}'\right) . \tag{7.54}$$

Так как $\vec{a}$ – постоянный вектор, а оператор $\vec{\nabla}$ действует на координаты точки наблюдения $\vec{r}$, но не на координаты точек поверхности $\vec{r}'$, то комбинацию $\left(\vec{a}, \vec{\nabla}\right)$ в (7.54) можно вынести за знак интеграла:

$$\left(\vec{a}, \vec{B}\right) = \frac{J}{c}\left(\vec{a}, \vec{\nabla}\right)\int\limits_{S_0}\left(\frac{\vec{R}}{R^3}, d\vec{S}'\right) . \tag{7.55}$$

В силу произвольности вектора $\vec{a}$ отсюда получаем

$$\vec{B} = \frac{J}{c}\vec{\nabla}\int\limits_{S_0}\left(\frac{\vec{R}}{R^3}, d\vec{S}'\right) = \frac{J}{c}\vec{\nabla}\Omega \ , \tag{7.56}$$

где Ω – телесный угол, под которым виден контур с током из точки наблюдения $\vec{r}$, от которой этот телесный угол и зависит.

Величину

$$\varphi_m = -\frac{J}{c}\Omega \tag{7.57}$$

иногда называют *магнитным потенциалом*, и по аналогии с электростатикой записывают формулу (7.56) для магнитного поля замкнутого линейного тока как

$$\vec{B} = -grad \ \varphi_m \ . \tag{7.58}$$

Казалось бы, такая запись свидетельствует о потенциальности магнитного поля, вопреки всем нашим представлениям о его свойствах. Но дело в том, что φ_m – не обычное скалярное поле вроде электростатического потенциала φ, а многозначная функция, ибо телесный угол Ω определен лишь с точностью до слагаемого вида $4\pi n$, где n – произвольное целое число[1)].

Имея в виду формулу (7.56), получим для циркуляции магнитного поля по произвольному замкнутому контуру L

$$\int\limits_L\left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \frac{J}{c}\oint\limits_L\left(grad \ \Omega, \ d\vec{l}\right) . \tag{7.59}$$

[1)] Достаточно подробное обсуждение свойств телесного угла можно найти, например, в учебном пособии: Сивухин Д.В. Общий курс физики, т. III. Электричество. – М.: Наука, 1977. §54.

Если контур L не обходит вокруг тока, т.е. не зацепляется с контуром L_0, то интеграл в правой части (7.59) будет равен нулю, так как ветвь магнитного потенциала не будет изменяться. Но если контур L единожды обходит вокруг тока, т.е. один раз зацепляется с контуром L_0, то значения Ω в исходной точке в начале пути и в конце пути будут различаться на 4π (магнитный потенциал переходит на соседнюю ветвь):

$$\oint_L \left(grad\ \Omega,\ d\vec{l} \right) = 4\pi . \tag{7.60}$$

Подставляя это выражение в (7.59), найдем

$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l} \right) = \frac{4\pi}{c} J \ . \tag{7.61}$$

В силу принципа суперпозиции этот результат справедлив и в том случае, когда магнитное поле создается несколькими проводниками, причем под J нужно понимать полный ток, пронизывающий контур L. Переходя в (7.61) к объемному распределению токов, получим

$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l} \right) = \frac{4\pi}{c} \int_S \left(\vec{j}, d\vec{S} \right). \tag{7.62}$$

Применяя далее теорему Стокса, вновь придем к уравнению (7.49).