Глава II. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

В данной главе обсуждаются важнейшие элементы конструкции классической электродинамики, представленной в табл.3 на с.8: вводятся различные наборы переменных состояния электромагнитного поля и описывается класс физических величин, анализируются динамические уравнения электромагнитного поля и законы сохранения.

§8. Уравнения Максвелла в вакууме

В предыдущей главе были сформированы фундаментальные понятия электродинамики. К ним относятся понятие электрического заряда q как параметра системы, понятие электромагнитного поля как особого вида материи, понятия электрического поля $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}\,|t)$ и магнитного поля $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}\,|t)$ как его характеристик. Затем, отправляясь от эксперимента, мы получили в отдельных частных случаях уравнения для векторных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Объединяя соответствующие результаты и делая дополнительное предположение, что они справедливы в самой общей ситуации, придем к системе *уравнений Максвелла* в вакууме:

$$\boxed{(\mathrm{I})\begin{cases} div\vec{E} = 4\pi\rho & (а) \\ rot\vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (б) \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} div\vec{B} = 0 & (в) \\ rot\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (г) \end{cases}} \tag{8.1}$$

Эти уравнения следует рассматривать как главнейшую аксиому классической электродинамики, и в данном отношении они подобны законам Ньютона в классической механике. Первая пара (I) уравнений Максвелла выделена тем, что она содержит источники электромагнитного поля – плотность заряда ρ и плотность тока $\vec{j}$, которые считаются заданными функциями координат и времени. Уравнения из второй пары (II) являются однородными.

В международной системе единиц (СИ) уравнения Максвелла записываются как

$$\begin{cases} div\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ rot\ \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} div\ \vec{B} = 0 \\ rot\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{cases} \tag{8.2}$$

Их можно представить в несколько более компактной форме:

$$\begin{cases} div\ \vec{D} = \rho \\ rot\ \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} div\ \vec{B} = 0 \\ rot\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{cases} \tag{8.3}$$

где по аналогии с электродинамикой сплошных сред введены вспомогательные векторные поля

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0\vec{E}, \qquad \vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{B}. \tag{8.4}$$

Выше уравнения Максвелла записаны в *дифференциальной* форме, что предполагает гладкость всех входящих в них функций. От этого ограничения легко избавиться, переписав уравнения (8.1) в *интегральной* форме. Для этого проинтегрируем обе части уравнений (а) и (в) по произвольному объему V, а уравнений (б) и (г) – по произвольной поверхности S, затем применим теоремы Гаусса и Стокса и вынесем, где нужно, производные по времени за знаки интеграла (в результате чего они из частных превратятся в обыкновенные). В итоге будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \oint\limits_{\Sigma}\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=4\pi\int\limits_{V}\rho dV \\ \oint\limits_{L}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)=\frac{4\pi}{c}\int\limits_{S}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)+\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_{S}\left(\vec{E},d\vec{S}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint\limits_{\Sigma}\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=0 \\ \oint\limits_{L}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_{S}\left(\vec{B},d\vec{S}\right), \end{cases} \tag{8.5}$$

или, в компактной записи,

$$\begin{cases} \Phi_E^0=4\pi q_V \\ C_B=\frac{4\pi}{c}J_S+\frac{1}{c}\frac{d\Phi_E}{dt} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi_B^0=0 \\ C_E=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_B}{dt}. \end{cases} \tag{8.6}$$

Здесь Φ_E и Φ_B – потоки, а C_E и C_B – циркуляции электрического и магнитного полей соответственно, нулевым индексом отмечены полные потоки через замкнутую поверхность, q_V – полный электрический заряд в объеме V, а J_S – полный ток через поверхность S.

При анализе электромагнитных явлений в вакууме система дифференциальных уравнений (8.1) и система интегральных уравнений (8.5) практически полностью эквивалентны. Здесь нет никаких поверхностей и кривых, на которых функции ρ и $\vec{j}$ обладают сингулярностями и где уравнения (8.1) были бы поэтому неприменимыми. При анализе же электромагнитных явлений в присутствии сплошных сред типа проводников и диэлектриков появляются выделенные поверхности, и интегральные уравнения оказываются более общими. В отличие от дифференциальных уравнений они справедливы во всем пространстве даже при наличии сингулярностей (скажем, поверхностных) у зарядов и токов. Интегральным уравнениям (8.5) эквивалентны дифференциальные уравнения (8.1) в отдельных областях пространства, дополненные *граничными условиями*, которые сами вытекают из (8.5). Эту проблему мы обсудим во второй части курса.

Уравнения Максвелла составляют «ядро» классической электродинамики. В них находит свое конкретное выражение ряд фундаментальных положений, касающихся конструкции данной физической теории (см. табл.3 на с.8). Эти положения вполне аналогичны по своей сути соответствующим положениям классической механики[1)], что еще раз свидетельствует о единстве общей структуры всех физических теорий[2)].

> <u>Основной постулат электродинамики</u>. Переменными состояния электромагнитного поля являются напряженность электрического поля $\vec{E}$ и индукция магнитного поля $\vec{B}$.

[1)] Наумов А.И. Методические разработки к курсу теоретической физики. (Введение. Классическая механика). – М.: МГПИ, 1986. – §9.

[2)] Там же, §3.

Как упоминалось в начале §2, понятие состояния физической системы включает два аспекта – «динамический» и «статический». С точки зрения первого из них задание состояния
в начальный момент времени позволяет найти состояние в любой другой момент времени. Данное утверждение составляет содержание принципа причинности, который в рассматриваемом случае формулируется следующим образом.

Принцип причинности в электродинамике. Совокупность начальных значений электрического и магнитного полей

$$\vec{E}\left(\vec{r}\,\middle|t\right)\Big|_{t=t_0} = \vec{E}_0\left(\vec{r}\right); \quad \vec{B}\left(\vec{r}\,\middle|t\right)\Big|_{t=t_0} = \vec{B}_0\left(\vec{r}\right) \tag{8.7}$$

полностью определяет эволюцию электромагнитного поля, т.е. закон его изменения во времени

$$\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\,\middle|t \parallel \vec{E}_0, \vec{B}_0\right); \quad \vec{B} = \vec{B}\left(\vec{r}\,\middle|t \parallel \vec{E}_0, \vec{B}_0\right). \tag{8.8}$$

И действительно, уравнения Максвелла (8.1) являются уравнениями *первого* порядка по времени. С точки зрения «статического» аспекта знание состояния системы в данный момент времени дает нем максимально возможную информацию о всех ее характеристиках в этот момент. Отсюда вытекает, в частности, что скорости изменения переменных состояния должны выражаться через сами эти переменные. В электродинамике приходим отсюда к следующему утверждению, аналогичному по своей сути второму закону Ньютона в классической механике [1].

Динамический принцип электродинамики. Скорость $\partial\vec{E}/\partial t$ и $\partial\vec{B}/\partial t$ изменения электрического и магнитного полей в данный момент времени определяются значениями самих полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$, взятыми в тот же момент времени.

Как раз такой и является временная структура уравнений Максвелла: уравнения (8.1,б) и (8.1,г) показывают, что производные по времени $\partial\vec{E}/\partial t$ и $\partial\vec{B}/\partial t$ действительно выражаются через сами поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, (точнее, через их производные по координатам и внешние источники [2]), вычисленные в тот же момент времени (и даже в той же точке пространства [2]).

Из сформулированных положений явствует, что в общей ситуации значения электрического (магнитного) поля определяются не только начальными значениями самого этого поля и внешними источниками, т.е. заряженными частицами, но и начальными значениями магнитного (электрического) поля. Иными словами, не исключена возможность, что при определенных условиях магнитное поле будет порождать электрическое поле, и наоборот. Уравнения Максвелла (8.1) показывают, что на самом деле эта возможность есть действительность. А именно, уравнения (8.1,б) и (8.1,г) содержат в себе описание явлений магнитоэлектрической и электромагнитной индукции.

Вернемся в этой связи к физическому смыслу уравнений Максвелла – к тем экспериментальным фактам, которые нашли в них свое отражение. Перечислим эти факты в порядке следования уравнений (8.1):

(а) закон Кулона и инвариантность электрического заряда;

---

[1] Наумов А.И. Методические разработки к курсу теоретической физики. (Введение. Классическая механика). – М.: МГПИ, 1986. – §9.

[2] По поводу этих уточнений см. дополнение к данному параграфу.

(б) закон Био – Савара – Лапласа и гипотеза Максвелла о токе смещения, основывающаяся на законе сохранения электрического заряда;

(в) отсутствие в природе магнитных зарядов;

(г) закон Кулона и закон электромагнитной индукции Фарадея в трактовке Максвелла.

Кроме того, все уравнения (8.1) органически включают принцип суперпозиции электрического и магнитного полей.

Некоторого комментария требует пункт (в). Магнитные заряды пока действительно не обнаружены. Однако давно уже предпринимаются попытки полной симметризации уравнений Максвелла по электрическому и магнитному полям[1)]. С этой целью их модифицируют следующим образом:

$$\begin{cases} div\ \vec{E} = 4\pi\rho \\ rot\ \vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} div\ \vec{B} = 4\pi\rho_m \\ rot\ \vec{E} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}_m - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{cases} \tag{8.9}$$

где ρ_m – плотность гипотетического магнитного заряда g, а $\vec{j}_m = \rho_m \vec{v}$ – плотность создаваемого ими «магнитного тока». Однако до сих пор не удалось построить последовательную схему классической электродинамики, которая органически включала бы понятие магнитного заряда и была бы абсолютно непротиворечивой.

С другой стороны, к. возможности существования магнитного заряда в 1931 г. пришел П.Дирак, основываясь на гораздо более глубоких квантовомеханических соображениях[2)]. Он установил, что у соответствующих частиц, называемых *магнитными монополями*, электрический заряд q и магнитный заряд g должны быть связаны соотношением

$$\frac{qg}{\hbar c} = \frac{n}{2}, \tag{8.10}$$

где n – целое число. Полагая здесь q равным элементарному заряду e, для возможных значений магнитного заряда получим

$$g = \frac{\hbar c}{e}\frac{n}{2} \equiv \frac{\hbar c}{e^2}\frac{n}{2}e = \frac{1}{\alpha}\frac{n}{2}e, \tag{8.11}$$

где

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \cong 1/137 \tag{8.12}$$

– так называемая постоянная тонкой структуры, являющаяся одной из фундаментальных физических констант. Из (8.12) вытекает, что минимальный магнитный заряд ($n=1$) должен быть весьма большим:

$$g_{мин} = \frac{1}{2\alpha}e \cong 68{,}5e. \tag{8.13}$$

Поэтому след монополя, оставленный им в детекторе, был бы своеобразным.

[1)] См. сб. статей: Монополь Дирака/Под ред. Б.М. Болотовского и Ю.Д. Усачева. – М.: Мир, 1970.

[2)] Там же. Статья 1.

Тщательные поиски таких треков не увенчались успехом. Мало того, долгое время не удавалось получить адекватного теоретического описания монополей Дирака, и интерес к этим частицам постепенно угасал. Он резко возрос после 1974 г., когда А.М. Поляков и независимо Г. Хоофт нашли решения типа монополей в современной квантовой теории поля с так называемой локальной калибровочной инвариантностью. Кроме того, монополи предсказываются всеми схемами "великого объединения", рассматривающими на равной основе сильное, электромагнитное и слабое взаимодействия. Эти частицы должны быть примерно в 10^{16} раз тяжелее протона, и они могли рождаться только в первые мгновения существования нашей Вселенной – в момент "большого взрыва". Реликтовые магнитные монополи интенсивно ищут экспериментаторы, но пока безуспешно, и ситуация с ними остается неясной. В дальнейшем мы к этой проблеме больше обращаться не будем.

Дополнение к §8*

Выше отмечалось, что динамический принцип электродинамики аналогичен по своей сути второму закону Ньютона в классической механике. Однако в одном отношении аналогия существенно нарушается. В классической механике ускорение выделенной частицы в данный момент времени определяется положениями и скоростями *всех* частиц системы в тот же момент времени, а также значениями внешних полей ("источников") в той точке, где находится выделенная частица. В электродинамике роль частиц играют пространственные точки, а роль источников – плотность заряда ρ и плотность тока $\vec{j}$. Поэтому, рассуждая по аналогии, можно было бы ожидать, что здесь скорости изменения электрического и магнитного полей в данной точке пространства в данный момент времени определяются значениями самих полей во *всех* точках пространства в тот же момент времени (или в моменты времени, согласованные условиями запаздывания), а также внешними источниками. Что касается зависимости $\partial\vec{E}/\partial t$ и $\partial\vec{B}/\partial t$ от источников, то в этом пункте аналогия с механикой сохраняется. Первая же часть высказанного утверждения допускает гораздо более сильную формулировку.

> Принцип локальности. Скорости изменения $\partial\vec{E}/\partial t$ и $\partial\vec{B}/\partial t$ электрического и магнитного полей в данной точке пространства $\vec{r}$ в данный момент времени t определяются значениями самих полей и их первых производных по координатам в *той же* точке пространства в тот же момент времени, а также внешними источниками, т.е. функциями $\rho(\vec{r}|t)$ и $\vec{j}(\vec{r}|t)$.

Таким образом, влияние значений поля в соседних точках пространства оказывается косвенным – через посредство пространственных производных. Но все же оно присутствует. Ведь для вычисления производной функции в данной точке необходимо знать поведение этой функции хотя бы в малой окрестности точки.

Локальность есть неотъемлемая черта всех современных полевых теорий – как классических, так и квантовых. Ни одна из попыток построения нелокальной теории поля практически не увенчалась успехом, так как в ее рамках чрезвычайно трудно (если вообще возможно) удовлетворить совместным требованиям принципа причинности, принципа релятивистской инвариантности и ряда других физических принципов столь же общего характера.

§9. Общие свойства уравнений Максвелла

Продолжим обсуждение основных свойств системы уравнений Максвелла в вакууме.

1. Уравнения Максвелла (8.1) представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка по времени. Это означает, что для однозначного выделения их решения необходимо задать *начальные условия* (8.7). В этом свойстве уравнений находит свое выражение электродинамический принцип причинности (см. §8).

2. Уравнения Максвелла (8.1) представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка по пространственным координатам. Поэтому для однозначного выделения их решения необходимо задать *граничные условия*. При рассмотрении электромагнитных явлений в вакууме единственной выделенной поверхностью является бесконечно удаленная поверхность. И здесь на поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ обычно накладываются некие *естественные* граничные условия[1)]. Как правило, они сводятся к требованию достаточно быстрого убывания модулей векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ при $r \to \infty$[2)]. При наличии сплошных сред граничные условия необходимо также задавать на поверхностях их раздела. Эти условия получаются из соответствующих полевых уравнений, представленных в интегральной форме, аналогичной (8.5) (см. вторую часть курса).

3. Для уравнений Максвелла в вакууме справедлива *теорема единственности*: при заданных начальных и граничных условиях уравнения (8.1) имеют единственное решение (см. дополнение к §11).

4. Физические величины, входящие в уравнения Максвелла, обладают очевидным поведением по отношению к преобразованиям вращения пространственной системы координат. А именно, как явствует из их определений, ρ есть скаляр, а $\vec{j}$, $\vec{E}, \vec{B}$ – векторы. Поскольку дивергенция – скалярная операция, а ротор – векторная, этим обеспечивается ковариантность (неизменность формы) уравнений (8.1) относительно пространственных вращений. В данном их свойстве находит свое выражение свойство *изотропности* пространства.

5. Рассмотрим теперь трансформационные свойства физических величин, входящих в уравнения Максвелла, по отношению к преобразованию пространственной инверсии $\vec{r} \to -\vec{r}$.

(а) Электрический заряд q – инвариантная величина (см. §1), а потому его плотность ρ есть *скаляр*, т.е. она не меняется ни при вращениях системы координат, ни при обращении ее осей.

(б) Так как плотность заряда ρ – скаляр, а скорость $\vec{v}$ – вектор, то плотность тока $\vec{j} = \rho\dot{\vec{v}}$ есть *вектор*, и его компоненты изменяют знаки при пространственной инверсии.

(в) Поскольку заряд – скаляр, а сила – вектор, из определения (3.5) явствует, что напряженность электрического поля $\vec{E}$ есть тоже вектор.

(г) При обсуждении формулы (3.10) было установлено, что индукция магнитного поля $\vec{B}$ есть *псевдовектор* (аксиальный вектор). Это означает, что при вращениях системы координат магнитное поле $\vec{B}$ ведет себя как обычный вектор, но при обращении координатных осей его компоненты B_i не изменяют знаки.

[1)] Формально выделенные «поверхности» могут возникать и при использовании некоторых криволинейных координат. Так, значения сферической координаты r пробегает не всю прямую, а лишь полупрямую $(0,+\infty)$, и точка $r = 0$ оказывается выделенной. Поэтому в данном случае приходится фиксировать поведение полевых величин не только на бесконечности, но и в начале координат.

[2)] Иногда они имеют и более сложный вид. Примером может служить известное из курса математической физики условие излучения Кирхгофа.

(д) Из формулы $\vec{F} = g\vec{B}$, аналогичной (3.5), видно, что в модифицированных уравнениях Максвелла (8.9) плотность ρ_m гипотетического магнитного заряда g должна быть *псевдоскаляром* (изменяет знак при пространственной инверсии), а плотность магнитного тока $\vec{j}_m$ – *псевдовектором*.

Если учесть, что дивергенция – скалярная операция, а ротор – псевдовекторная, то сразу станет ясно, что уравнения Максвелла (8.1), а также уравнения (8.9) ковариантны относительно преобразования пространственной инверсии. В этом их свойстве находит свое выражение свойство *зеркальной симметрии* пространства[1)].

6. Уравнения Максвелла являются *линейными* уравнениями, в чем находит свое выражение *принцип суперпозиции* для электромагнитного поля (точнее, принцип независимости действия его источников). Заметим, что при переходе к сплошным средам, когда производится макроскопическое усреднение полей, это свойство, вообще говоря, теряется. Отсюда происхождение термина "нелинейная оптика" и подобных ему. Эффективная нелинейность в уравнениях Максвелла может возникать и в вакууме – за счет квантовых эффектов. Они приводят, например, к возможности взаимного рассеяния фотонов, а на макроскопическом уровне – к нарушению оптического принципа независимости действия световых пучков. Однако подобные эффекты столь слабы, что находятся на пределе возможностей их экспериментальной регистрации.

7. Уравнения Максвелла автоматически включают *закон сохранения электрического заряда*. Действительно, из уравнений (8.1,г) и (8.1,а) имеем

$$0 = div\left(rot\ \vec{B}\right) = div\left\{\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\} = \frac{4\pi}{c}div\,\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\ \vec{E}\right) = \frac{4\pi}{c}div\,\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(4\pi\rho) = \frac{4\pi}{c}\left\{div\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right\},$$

что после сокращения на $\dfrac{4\pi}{c}$ дает уравнение непрерывности (2.19).

8. Уравнения Максвелла представляют собой систему *зацепляющихся* дифференциальных уравнений *первого* порядка для векторных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Однако для этих полей можно получить и *независимые* дифференциальные уравнения, но уже *второго* порядка. Для этого следует взять роторы от обеих частей уравнений (8.1,г) (8.1,б), воспользовавшись затем уравнениями (8.1,а) и (8.1,в):

$$\begin{aligned} rot\left(rot\ \vec{E}\right) &= grad\left(div\ \vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} = 4\pi grad\,\rho - \nabla^2\vec{E} = \\ &= rot\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\ \vec{B}\right) = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} rot\left(rot\ \vec{B}\right) &= grad\left(div\ \vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B} = \\ &= rot\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}rot\,\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\ \vec{E}\right) = \frac{4\pi}{c}rot\,\vec{j} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

откуда

[1)] Данная симметрия нарушается при учете слабого взаимодействия. Уже отсюда видно, что пространство нельзя рассматривать как некий абсолют с раз и навсегда заданными «собственными» свойствами. Пространство есть форма существования материи и (как и время) неотделимо от материи.

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=4\pi\left(grad\ \rho+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}\right) \tag{9.1}$$

и

$$\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}rot\ \vec{j} \tag{9.2}$$

соответственно. Дифференциальный оператор

$$\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\equiv\Box \tag{9.3}$$

называется оператором Даламбера, или даламберианом. С его помощью уравнения (9.1) и (9.2) записываются более кратко:

$$\Box\vec{E}=4\pi\left(grad\ \rho+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}\right) \tag{9.4}$$

и

$$\Box\vec{B}=-\frac{4\pi}{c}rot\ \vec{j}\,. \tag{9.5}$$

Они относятся к классу *уравнений Даламбера*.

В областях пространства, где отсутствуют источники, т.е. $\rho=0$ и $\vec{j}=0$, эти уравнения превращаются в *волновые уравнения*

$$\Box\vec{E}=0,\quad \Box\vec{B}=0\,. \tag{9.6}$$

Отсюда можно заключить, что электромагнитное поле в принципе существует и независимо от породивших его источников. Оно может распространяться в пустом пространстве в виде электромагнитных волн, причем их скорость равна электродинамической постоянной c. Эти вопросы будут подробно обсуждаться в гл. VI.

Дополнение к §9*

В уравнения Максвелла входит 6 неизвестных функций – компоненты векторных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Самих же уравнений (8.1), если расписать их по компонентам, будет 8. И на первый взгляд система этих уравнений представляется переопределенной. С другой стороны, производные по времени входят только в уравнения (8.1,б) и (8.1,г), и в покомпонентной записи их оказывается как раз ровно 6. Поэтому остается лишь выяснить математический смысл двух "дополнительных" уравнений (8.1,а) и (8.1,в). Как сейчас будет установлено, до определенной степени они являются следствиями "основных" уравнений (8.1,б) и (8.1,г), играя роль своего рода начальных условий.

Образуем дивергенции от обеих частей каждого из последних уравнений:

$$0=div\ (rot\ \vec{E})=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\ \vec{B}\right)$$

и

$$0=div\left(rot\ \vec{B}\right)=\frac{4\pi}{c}div\,\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\ \vec{E}\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\ \vec{E}-4\pi\rho\right),$$

где на последнем этапе использовано уравнение непрерывности (2.19). В итоге получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(div\ \vec{E}-4\pi\rho\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(div\ \vec{B}\right)=0,$$

откуда

$$div\ \vec{E}-4\pi\rho=f_1\left(\vec{r}\right),\qquad div\ \vec{B}=f_2\left(\vec{r}\right). \tag{9.7}$$

Если в начальный момент времени положить

$$\left[div\ \vec{E}-4\pi\rho\right]_{t=t_0}=0,\qquad div\ \vec{B}\Big|_{t=t_0}=0, \tag{9.8}$$

то из (9.7) получим

$$f_1\left(\vec{r}\right)\equiv 0,\qquad f_2\left(\vec{r}\right)\equiv 0$$

и в результате придем как раз к уравнениям (8.1,а) и (8.1,в).

Не следует думать, однако, что эти уравнения являются "лишними". Они существенны с математической точки зрения, а кроме того, несут чрезвычайно важную физическую информацию. Первое из них гласит, что источниками электрического поля являются электрические заряды, а второе свидетельствует об отсутствии в природе магнитных зарядов (см. обсуждение в §8). Кажущаяся же переопределенность системы уравнений Максвелла проистекает из самого духа теоремы Гельмгольца, которая неявно использовалась при построении этих уравнений в гл. I. Согласно ЭТОЙ теореме, векторное поле нельзя восстановить только по его ротору, а нужно задать также и его дивергенцию. Подобных проблем не возникает при формулировке электродинамики на языке потенциалов, к построению которой мы и переходим.

§10. Потенциалы электромагнитного поля

До сих пор мы описывали состояние электромагнитного поля в вакууме шестью величинами – компонентами векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Оказывается, что можно ввести другой набор переменных состояния электромагнитного поля, во многих отношениях более удобный. Уже из школьного курса физики известно, сколь плодотворным является понятие потенциала φ – энергетической характеристики электростатического поля. Как сейчас будет установлено, аналогичный способ описания электромагнитного поля существует и в общей ситуации. Только здесь одной скалярной величины недостаточно, и к ней нужно присоединить еще некоторую векторную величину.

Возможность подобного описания состояния поля вытекает из второй пары уравнений Максвелла, не содержащих источников. Согласно уравнению (8.1,в), магнитное поле соленоидально. Поэтому существует *векторный потенциал*, т.е. такое векторное поле $\vec{A}$, что

$$\vec{B}=rot\ \vec{A}. \tag{10.1}$$

Подставляя (10.1) в уравнение (8.1,г), получим

$$rot\ \vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\ \vec{A}\right)=rot\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\Rightarrow rot\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0.$$

Отсюда видно, что существует *скалярный потенциал*, т.е. такое скалярное поле φ, что

$$\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-grad\ \varphi .$$

В итоге электрическое поле представляется как

$$\vec{E}=-grad\ \varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \qquad (10.2)$$

Наличие в правой части второго слагаемого свидетельствует о том, что в общей ситуации электрическое поле не является потенциальным, а имеет вихревой характер. Впрочем, это ясно и из уравнения (8.1,г), от правой части которого как раз ведёт свое происхождение данное слагаемое.

Итак, электрическое и магнитное поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ однозначно выражаются через скалярный и векторный потенциалы φ и $\vec{A}$:

$$\boxed{\vec{E}=-grad\ \varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\qquad \vec{B}=rot\ \vec{A}}. \qquad (10.3)$$

Потенциалы φ и $\vec{A}$ и образуют новый набор *переменных состояния* электромагнитного поля. Этих величин всего лишь 4, а не 6, и описание поля с их помощью более "экономно". Коль скоро поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ выражены через потенциалы φ и $\vec{A}$, однородные уравнения Максвелла (8.1,в) и (8.1,г) становятся излишними, ибо они удовлетворяются тождественно. Неоднородные уравнения Максвелла дают в этом случае уравнения для потенциалов.

Подставляя выражения (10.3) в уравнение (8.1,б), будем иметь

$$rot\ \vec{B}=rot\left(rot\ \vec{A}\right)=grad\left(div\ \vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=$$
$$=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}-\frac{1}{c}grad\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2},$$

откуда

$$\Box\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}+grad\left\{div\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}. \qquad (10.4)$$

Подстановка тех же выражений в уравнение (8.1,а) дает

$$div\ \vec{E}=div\left(-grad\ \varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\ \vec{A}\right)\equiv$$
$$\equiv-\nabla^2\varphi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\ \vec{A}\right)=$$
$$=4\pi\rho\ ,$$

и мы получаем

$$\Box\varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{ div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\}. \tag{10.5}$$

Таким образом, найдена система весьма сложных зацепляющихся уравнений для потенциалов φ и $\vec{A}$. Оказывается, их можно существенно упростить. Но для этого необходимо сделать некоторое отступление, представляющее и значительный самостоятельный интерес.

Как известно из школьного курса физики, потенциал φ электростатического поля определен лишь с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Подобная же неоднозначность, только гораздо бóльшая, существует и в общем определении потенциалов φ и $\vec{A}$. Их можно изменять как угодно, только бы при этом не менялись поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, выражаемые через потенциалы по формулам (10.3). Разные физически допустимые способы выбора эквивалентных потенциалов (в смысле одинаковости порождаемых ими полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$) называются разными их *калибровками*. Независимость же физического содержания теории (в том же смысле) от выбора конкретной калибровки именуется *калибровочной инвариантностью*.

Покажем, что уравнения Максвелла (8.1) инвариантны относительно *калибровочного преобразования*

$$\boxed{\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + grad\ \psi,\ \varphi \mapsto \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}}\ , \tag{10.6}$$

где $\psi(\vec{r}\,|t)$ – произвольная гладкая функция. Для этого достаточно установить, что $\vec{E}' = \vec{E}$ и $\vec{B}' = \vec{B}$. Из (10.3) и (10.6) имеем

$$\vec{B}' = rot\ \vec{A}' = rot\ \vec{A} + rot\left(grad\ \psi\right) = rot\ \vec{A} = \vec{B}$$

и

$$\vec{E}' = -grad\ \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = \left(-grad\ \varphi + \frac{1}{c} grad\frac{\partial\psi}{\partial t} \right) -$$

$$-\left[\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(grad\ \psi\right) \right] = -grad\ \psi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E}\ ,$$

что и требуется.

Калибровочная инвариантность электродинамики позволяет накладывать на потенциалы φ и $\vec{A}$ различные дополнительные условия, которые играют роль *связей* (см. табл. 3 на с.8). Одним из основных дополнительных условий такого рода является *условие Лоренца*

$$\boxed{div\ \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0}\ . \tag{10.7}$$

В *лоренцевой калибровке* уравнения (10.4) и (10.5) для потенциалов резко упрощаются. Они расцепляются и превращаются в хорошо изученные в математике уравнения Даламбера

$$\boxed{\Box\varphi = -4\pi\rho, \qquad \Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}}\ . \tag{10.8}$$

На потенциалы иногда накладываются и дополнительные условия, отличные от условия Лоренца. Примерами могут служить так называемая кулонова калибровка (см. дополнение к данному параграфу) и волновая калибровка (см гл. VI). Подобно выбору подходящих криволинейных координат, удачный выбор калибровки зачастую значительно упрощает анализ той или иной конкретной проблемы, особенно в современной квантовой теории поля.

Дополнение к §10*

Докажем, что путем подходящего калибровочного преобразования (10.6) всегда можно добиться того, чтобы потенциалы удовлетворяли условию Лоренца (10.7). Пусть сначала это условие не выполняется, т.е. для исходных потенциалов φ' и $\vec{A}'$

$$div\,\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} \equiv \chi\left(\vec{r}\,|t\right) \neq 0\,.$$

Совершив калибровочное преобразование, для новых потенциалов φ и $\vec{A}$ получим

$$\left(div\,\vec{A} + \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \left(\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) = \chi\left(\vec{r}\,|t\right).$$

Потребуем, чтобы калибровочная функция ψ подчинялась уравнению Даламбера $\Box\psi = \chi$. Это уравнение обладает бесконечным множеством гладких решений. Выбор одного из них как раз и приведет к потенциалам φ и $\vec{A}$, удовлетворяющим условию Лоренца.

Кстати, из данного доказательства ясно, что условием Лоренца (10.7) потенциалы все еще не определяются однозначно. Над ними можно совершать дополнительные калибровочные преобразования типа (10.6), хотя уже не с произвольными функциями ψ, а с функциями ψ_0, подчиняющимися волновому уравнению

$$\Box\psi_0 = 0\,. \tag{10.9}$$

Это связано с тем, что общее решение уравнения Даламбера $\Box\psi = \chi$ можно представить как сумму его частного решения и общего решения уравнения (10.9). Высказанное утверждение легко проверяется и непосредственно. Очевидно, что при преобразовании

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = A + grad\ \psi_0, \quad \varphi \mapsto \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_0}{\partial t}\,, \tag{10.10}$$

входящем в класс калибровочных преобразований общего вида (10.6), поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ не меняются. Мало того, при этом не нарушается и условие Лоренца:

$$div\,\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \left(div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \left(\nabla^2\psi_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2}\right) =$$

$$= \left(div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0.$$

Как уже упоминалось, вместо лоренцевой калибровки (10.7) иногда употребляется *кулонова калибровка*

$$div\,\vec{A} = 0\,, \tag{10.11}$$

в которой уравнения (10.4) и (10.5) для потенциалов принимают вид

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho, \quad \Box\,\vec{A} - \frac{1}{c}\,grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{j}\,. \tag{10.12}$$

Первое из них совпадает с электростатическим уравнением Пуассона, откуда и название калибровки (главнейший закон электростатики – закон Кулона). С общетеоретической точки зрения кулонова калибровка имеет тот недостаток, что она не является релятивистски инвариантной – нарушается при изменении системы отсчета (лоренцева калибровка релятивистски инвариантна – см. гл. III).

Однако в техническом отношении кулонова калибровка весьма полезна, ибо условие (10.11), явным образом выражает свойство поперечности свободного электромагнитного поля, сформулированное на языке потенциалов. Иными словами, с помощью первого уравнения (10.12) в данной калибровке сразу удается выделить продольную часть поля – достаточно тривиальную, ибо она отвечает статическому распределению зарядов. Недаром квантование электромагнитного поля впервые было проведено именно в кулоновой калибровке (В.Гейзенберг, П.Йордан, В.Паули, 1932 г.). Мало того, в последнее время выявилась ее выделенная роль и в современной квантовой теории поля в связи с построением так называемых калибровочных теорий, которые, в частности, единым образом описывают электромагнитное и слабое взаимодействия. Кстати, само электромагнитное поле дает простейший и наиболее известный пример калибровочного поля[1)].

§11. Энергия электромагнитного поля

Перейдем к обсуждению энергетических характеристик электромагнитного поля и закона сохранения энергии в электродинамике. Оно будет проведено в три этапа. Сначала мы рассмотрим движение заряженных частиц в заданном поле, затем поведение поля при заданных распределении и движении частиц, и, наконец, общую систему частицы + поле (сравн. с содержанием §5).

1. Из уравнения движения (5.1) заряженной частицы a в электромагнитном поле $\{\vec{E},\vec{B}\}$, которое считается заданным, вытекает закон изменения (5.4) ее механической энергии ε_α. Теперь мы хотим представить этот закон в «полевой» форме. Соответствующий анализ не сложен сам по себе, но еще проще воспользоваться уже готовыми результатами, полученными в §2. Там из естественного уравнения баланса (2.13) было выведено локальное уравнение (2.16). Оба этих уравнения обладают тем несомненным достоинством, что являются универсальными, и при надлежащей трактовке входящих в них величин они могут описывать самые разные физические ситуации. В частности, эти уравнения справедливы и для энергетических характеристик физических систем.

Рассмотрим непрерывно распределенные в пространстве частицы и введем, по аналогии с плотностью заряда ρ, *плотность энергии* частиц

[1)] Эти проблемы обсуждаются в учебном пособии: Наумов А.И. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – М.: Просвещение, 1984, §66.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta V} \equiv \frac{d\varepsilon}{dV} = \begin{cases} \dfrac{mv^2}{2}\cdot n, & v \ll c, \\ \dfrac{mc^2 \cdot n}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & v \sim c. \end{cases} \tag{11.1}$$

В последнем выражении n – концентрация частиц, причем они считаются одинаковыми. Аналогом плотности тока $\vec{j}$ служит *плотность потока энергии* частиц

$$\vec{q} = \varepsilon \vec{v}\,, \tag{11.2}$$

которая есть количество механической энергии, протекающей в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную вектору скорости в данной точке пространства в данный момент времени [сравн. с определением (2.4)]. Кинетическая энергия частицы изменяется за счет работы действующей на нее силы. Поэтому роль интенсивности I источников играет в рассматриваемом случае работа силы Лоренца в единицу времени в единичном объеме, т.е. *плотность мощности* p, задаваемая формулой (4.11):

$$p = \left(\vec{j}, \vec{E}\right). \tag{11.3}$$

Производя теперь в (2.16) указанные замены, мы и придем к требуемому закону изменения механической энергии частиц в "полевой", т.е. локальной форме:

$$\boxed{\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + div\,\vec{q} = \left(\vec{j}, \vec{E}\right)}\,. \tag{11.4}$$

Наличие здесь правой части говорит о том, что эта энергия не сохраняется: она может "перекачиваться" в энергию поля, и наоборот. Последнее утверждение подробно раскрывается в следующих двух пунктах.

2. Попытаемся теперь получить уравнение типа (11.4) для величин, связанных уже с переменными состояния электромагнитного поля. При этом будем стремиться к тому, чтобы в его правой части стояла также величина $\left(\vec{j}, \vec{E}\right)$, но с обратным знаком.

Для этого возьмем уравнения Максвелла (8.1,г) и (8.1,б)

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad rot\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,,$$

первое из них умножим скалярно на $\vec{B}$, второе – на $\vec{E}$ и результаты вычтем:

$$\left(\vec{B},\, rot\,\vec{E}\right) - \left(\vec{E},\, rot\,\vec{B}\right) = -\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}, \vec{E}\right) - \frac{1}{c}\left(\vec{B}, \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\left(\vec{E}, \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).$$

Вспоминая формулы векторного анализа

$$div\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\vec{b}, rot\,\vec{a}\right) - \left(\vec{a}, rot\,\vec{b}\right), \qquad \frac{\partial\vec{a}^2}{\partial t} = 2\left(\vec{a}, \frac{\partial\vec{a}}{\partial t}\right),$$

найдем, что

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2+B^2\right)+div\left[\vec{E},\vec{B}\right]=-\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j},\vec{E}\right).$$

Это соотношение обладает нужной структурой, но для придания правой его части требуемого вида умножим обе части на $c/4\pi$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}\right)+div\left\{\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{B}\right]\right\}=-\left(\vec{j},\vec{E}\right). \tag{11.5}$$

Вводя обозначения

$$\boxed{W=\frac{E^2+B^2}{8\pi}} \tag{11.6}$$

и

$$\boxed{\vec{\Pi}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{B}\right]}\ , \tag{11.7}$$

мы придем к уравнению типа (11.4):

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t}+div\vec{\Pi}=-(\vec{j},\vec{E})}\ . \tag{11.8}$$

Поскольку $-\left(\vec{j},\vec{E}\right)$ есть работа, совершаемая полем в единицу времени в единичном объеме, причем взятая с обратным знаком, а W включает только полевые переменные состояния, то естественно думать, что эта величина есть *плотность энергии* самого электромагнитного поля. Тогда вектор $\vec{\Pi}$, именуемый *вектором Пойнтинга*, следует трактовать как *плотность потока энергии* электромагнитного поля. В Международной системе единиц (СИ)

$$W=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right),\qquad \vec{\Pi}=\frac{1}{\mu_0}\left[\vec{E},\vec{B}\right], \tag{11.9}$$

и

$$W=\frac{1}{2}\left\{\left(\vec{E},\vec{D}\right)+\left(\vec{B},\vec{H}\right)\right\},\qquad \vec{\Pi}=\left[\vec{E},\vec{H}\right], \tag{11.10}$$

где вспомогательные поля $\vec{D}$ и $\vec{H}$ определяются формулами (8.4).

3. Свое полное обоснование и подтверждение приведенная интерпретация уравнения (11.8) находит при рассмотрении единой системы частицы + поле. Складывая его с уравнением (11.4), получим уравнение непрерывности, не включающее никаких «источников»:

$$\boxed{\frac{\partial\left(\varepsilon+W\right)}{\partial t}+div\left(\vec{q}+\vec{\Pi}\right)=0}\,. \tag{11.11}$$

Оно отвечает *закону сохранения* некоторой физической величины, распределение которой в пространстве описывает плотность $\varepsilon+W$, а движение – плотность потока $\vec{q}+\vec{\Pi}$. Поскольку первые слагаемые отвечают плотности механической энергии и плотности ее потока, то W естественно трактовать как плотность энергии электромагнитного поля, а $\vec{\Pi}$ – как плотность ее потока. Тогда уравнение (11.11) будет выражать закон сохранения энергии для всей системы частицы + поле.

Для дополнительного подтверждения, такой интерпретации проинтегрируем (11.11) по всему пространству $\mathbb{R}^3$, вынесем в первом члене производную по времени за знак интеграла и перенесем второй член в правую часть, преобразовав его в поверхностный интеграл с помощью теоремы Гаусса – Остроградского:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\varepsilon+W\right)\,dV=-\oint\limits_{S_\infty}\left(\vec{q}+\vec{\Pi},\ d\vec{S}\right), \tag{11.12}$$

где S_∞ – бесконечно удаленная поверхность. Будем считать, что частицы совершают финитное движение, тогда

$$\vec{q}\big|_{\,\mathrm{r>R}}=0\Rightarrow\int\limits_{S_\infty}\left(\vec{q},d\vec{S}\right)=0\,.$$

Если к тому же при $r\to\infty$ поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ убывают по модулю быстрее, чем $1/r$, то

$$\oint\limits_{S_\infty}\left(\vec{\Pi},d\vec{S}\right)=0\,,$$

поскольку подынтегральная функция будет тогда убывать быстрее, чем $1/r^2$, а площадь поверхности интегрирования растет лишь как r^2. При сделанных предположениях правая часть в (11.12) обращается в нуль, и мы имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\varepsilon+W\right)\,dV=const\,. \tag{11.13}$$

Первое слагаемое здесь есть полная механическая энергия частиц. Поэтому второе слагаемое будет полной энергией поля. Но тогда соотношение (11.13), а вместе с ним и уравнение непрерывности (11.11) есть не что иное, как *закон сохранения энергии* для системы частицы + поле в целом.

Если проинтегрировать (11.11) по конечному объему, то получим

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{V}\left(\varepsilon+W\right)\,dV=-\int\limits_{S}\left(\vec{q}+\vec{\Pi},d\vec{S}\right)\,. \tag{11.14}$$

Интеграл справа, не равный теперь нулю, определяет убыль полной энергии системы в объеме V (в единицу времени) за счет вытекания ее через поверхность S. Первый член в нем есть поток энергии, связанный с механическим движением частиц, а потому второй член будет потоком энергии электромагнитного поля. Этим и подтверждается окончательно интерпретация вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}$ как плотности потока энергии электромагнитного поля.

В некоторых задачах электродинамики поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ убывают по модулю при $r\to\infty$ всего лишь как $1/r$ (но не медленнее). В этом случае поверхностный интеграл от $\vec{\Pi}$ в (11.12) не обращается в нуль, сохраняя при удалении поверхности постоянное значение. Это означает, что система заряженных частиц теряет часть энергии на электромагнитное *излучение* (см. гл. VII).

Дополнение к §11*

Теорема единственности. При заданных начальных условиях

$$\vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right)\Big|_{t=t_0} = \vec{E}_0\left(\vec{r}\right), \qquad \vec{B}\left(\vec{r}\,|t\right)\Big|_{t=t_0} = \vec{B}_0\left(\vec{r}\right) \tag{11.15}$$

и заданных граничных условиях[1)]

$$\vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right)\big|_S = \vec{E}_S\left(\vec{r}_S\,|t\right), \qquad \vec{B}\left(\vec{r}\,|t\right)\big|_S = \vec{B}_S\left(\vec{r}_S\,|t\right) \tag{11.16}$$

уравнения Максвелла имеют единственное решение.

Доказательство

Пусть уравнения Максвелла (8.1) обладают двумя решениями $\vec{E}', \vec{B}'$ и $\vec{E}'', \vec{B}''$, удовлетворяющими дополнительным условиям (11.15) и (11.16). Образуем их разность

$$\vec{E}' - \vec{E}'' \equiv \vec{E}, \qquad \vec{B}' - \vec{B}'' \equiv \vec{B}\,. \tag{11.17}$$

Поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ будут подчиняться уравнениям Максвелла без источников $\left(\rho = 0,\ \ \vec{j} = 0\right)$ и нулевым дополнительным условиям

$$\vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right)\Big|_{t=t_0} = 0, \quad \vec{B}\left(\vec{r}\,|t\right)\Big|_{t=t_0} = 0; \quad \vec{E}\left(\vec{r}\,|t\right)\big|_S = 0, \quad \vec{B}\left(\vec{r}\,|t\right)\big|_S = 0\,. \tag{11.18}$$

Рассмотрим теперь соотношение (11.14):

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\varepsilon + W\right)\,dV = -\oint_S \left(\vec{q} + \vec{\Pi},\ d\vec{S}\right), \tag{11.19}$$

выбрав в качестве S граничную поверхность, фигурирующую в условиях (11.16) и (11.18). Первый и третий интегралы в (11.19) равны нулю из-за отсутствия источников поля, т.е. заряженных частиц, а четвертый интеграл равен нулю в силу граничного условия (11.18). Поэтому

$$\frac{d}{dt}\int_V W dV = 0\,,$$

откуда

$$\int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi}\,dV = const = \int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi}\Bigg|_{t=t_0} dV = 0\,, \tag{11.20}$$

где на последнем этапе использовано начальное условие (11.18). Так как в левой части (11.20) подынтегральная функция неотрицательна, то из равенства нулю интеграла следует, что и_она равна нулю. Поэтому $\vec{E} = 0$ и $\vec{B} = 0$, а значит, в силу (11.17)

[1)] В качестве S здесь может выступать бесконечно удаленная поверхность S_∞, и тогда граничные условия будут естественными.

$$\vec{E}' = \vec{E}'' \quad \text{и} \quad \vec{B}' = \vec{B}'' ,$$

что и требовалось доказать.

§12. Импульс электромагнитного поля

При обсуждении импульса электромагнитного поля наиболее естественна общая логика, которой мы придерживались в предыдущем параграфе. Однако соответствующие выкладки требуют привлечения аппарата тензорного анализа и оказываются достаточно громоздкими (см. дополнение к данному параграфу). Поэтому здесь мы подойдем к проблеме несколько иначе, отправляясь от основных положений релятивистской механики частицы[1)].

Как известно, одно из соотношений, связывающих в теории относительности импульс и энергию частицы, имеет следующий вид:

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v} . \tag{12.1}$$

Преобразуем его к локальной («полевой») форме записи. Рассмотрим с этой целью совокупность бесконечного числа невзаимодействующих частиц,плотно заполняющих некоторую область пространства, и запишем соотношение (12.1) для частиц, заключенных в элементе объема dV :

$$d\vec{p} = \frac{d\varepsilon}{c^2}\vec{v} . \tag{12.2}$$

Имея в виду определение (11.1) плотности энергии ε и вводя аналогичным способом *плотность импульса*

$$\vec{\pi} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V} \equiv \frac{d\vec{p}}{dV} , \tag{12.3}$$

из (12.2) получим

$$\vec{\pi} = \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v} . \tag{12.4}$$

Но, согласно определению (11.2), вектор $\varepsilon\vec{v}$ и $\vec{q}$ есть плотность потока энергии, и мы приходим к искомому локальному соотношению

$$\boxed{\vec{\pi} = \frac{1}{c^2}\vec{q}} . \tag{12.5}$$

Пока говорилось об импульсе и энергии *частиц*. На самом же деле соотношение (12.5) справедливо и для *произвольной* материальной субстанции. Необходимо лишь, чтобы связываемые с ней энергия и импульс образовывали 4-вектор, т.е. чтобы они обладали надлежащими трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца[1)]. А это требование является в СТО универсальным, ибо оно однозначно диктуется принципом релятивистской инвариантности (принципом относительности Эйнштейна). В итоге приходим к следующему общему положению:

[1)] См., например: Наумов А.И. Методические разработки к курсу теоретической физики (Специальная теория относительности. Релятивистская механика). – М.: МГПИ, 1986, §20.

в любой релятивистской физической системе всякому переносу энергии отвечает некоторый импульс, причем локальная связь между этими величинами устанавливается соотношением вида (12.5).

В частности, последнее соотношение справедливо не только для релятивистских частиц, но и для электромагнитного поля, которое несомненно является релятивистской системой (см. гл. III). Выражение для плотности потока энергии поля нам уже известно: это есть вектор Пойнтинга (11.7). Поэтому с помощью формулы (12.5) можно сразу выписать и выражение для *плотности импульса* электромагнитного поля:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{1}{c^2}\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E},\vec{B}\right]} \ . \tag{12.6}$$

В Международной системе единиц (СИ)

$$\vec{\tau} = \varepsilon_0\left[\vec{E},\vec{B}\right] \equiv \left[\vec{D},\vec{B}\right] \ . \tag{12.7}$$

Суммарный импульс частиц и импульс электромагнитного поля, взятые по отдельности, изменяются во времени, причина чему – действие силы Лоренца. Но для всей системы частицы + поле *закон сохранения импульса* выполняется. Мы не будем записывать его в дифференциальной форме, подобной (11.11) (см. дополнение к данному параграфу), а приведем лишь очевидную глобальную формулировку этого закона, аналогичную соотношению (11.13):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{\pi} + \vec{\tau}\right) dV = const \ . \tag{12.8}$$

Чтобы проиллюстрировать важность сформулированных результатов, применим их, несколько забегая вперед, к вычислению *давления света*. Как явствует из уравнений (9.6), в пустом пространстве могут распространяться со скоростью c электромагнитные волны, одним из видов которых и являются световые волны. В частности, существуют плоские волны, распространяющиеся в определенном направлении, и такие, что их характеристики не зависят от положения точки в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Такие волны подробно анализируются в гл. VI, а сейчас нам достаточно вспомнить некоторые их свойства, известные из курса общей физики[1)] (частично даже из школьного курса[2)]).

Во всякой плоской электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения (свойство поперечности), они взаимно ортогональны и равны по модулю (в гауссовой системе единиц):

$$\vec{E} \perp \vec{n}, \ \ \vec{B} \perp \vec{n}; \quad \vec{E} \perp \vec{B}; \quad \left|\vec{E}\right| = \left|\vec{B}\right|, \tag{12.9}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор вдоль направления распространения волны. Из (12.9) явствует, что для плоской электромагнитной волны

[1)] Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. – М.: Просвещение, 1980, §12.1; Сивухин Д.В. курс физики, т. III. Электричество. – М.:Наука, 1977, §139.

[2)] Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика 10. – М.: Просвещение, 1986, §2.

$$W=\frac{E^2}{4\pi},\qquad \vec{\Pi}=\frac{c}{4\pi}E^2\vec{n},\qquad \vec{\tau}=\frac{1}{4\pi c}E^2\vec{n} \tag{12.10}$$

Пусть такая волна падает на неподвижную стенку перпендикулярно ее поверхности с некоторым коэффициентом отражения

$$R\equiv\frac{\left|\vec{\Pi}_{отр}\right|}{\left|\vec{\Pi}_{пад}\right|}=\frac{\left|\vec{\tau}_{отр}\right|}{\left|\vec{\tau}_{пад}\right|}=\frac{W_{отр}}{W_{пад}}\ . \tag{12.11}$$

Покажем, что эта волна оказывает на стенку определенное давление p и найдем его значение. Цепочка рассуждений проста и естественна:

(а) импульс поля в единице объема равен τ;

(б) в единицу времени на единицу площади поверхности стенки падает импульс $c\tau$;

(в) в единицу времени от единицы площади поверхности стенки отражается импульс $-Rc\tau$;

(г) изменение соответствующего импульса поля в единицу времени есть

$$(-Rc\tau)-(c\tau)=-(1+R)c\tau\,;$$

(д) изменение соответствующего импульса стенки в единицу времени равно $(1+R)c\tau$, поскольку импульс системы поле + стенка сохраняется;

(е) согласно второму закону Ньютона, изменение импульса тела в единицу времени есть сила, действующая на это тело, причем в рассматриваемом случае она направлена по нормали к поверхности и отнесена к единице площади, т.е. как раз и является давлением.

Таким образом, для искомого давления электромагнитной волны (света) получаем

$$p=(1+R)c\tau=(1+R)\frac{E^2}{4\pi}\ . \tag{12.12}$$

В частности, в двух предельных идеальных случаях имеем

$$p=\begin{cases}\dfrac{E^2}{2\pi} & \text{при } R=1 \quad \text{(зеркальная поверхность),}\\[2ex] \dfrac{E^2}{4\pi} & \text{при } R=0 \quad \text{(черная поверхность).}\end{cases} \tag{12.13}$$

На этом результате, полученном Дж. Максвеллом, и базировались опыты П.Н. Лебедева по измерению давления света. В его установке к вертикальной нити прикреплялись горизонтальные лопасти, одна половина которых была зачернена, а другая посеребрена. На зеркальную половину свет оказывает вдвое большее давление, чем на черную. В итоге возникает момент сил, закручивающий нить, измеряя который, можно судить о величине давления света.

Дополнение к §12*

Обсудим теперь закон сохранения импульса в электродинамике более полно и последовательно, следуя логике §11 и проводя рассмотрение в три этапа.

1. Представим уравнение движения (5.1) заряженной частицы α в заданном электромагнитном поле $\{\vec{E},\vec{B}\}$ в «полевой» форме. Вновь исходим из универсального уравнения баланса (2.13), записанного в локальной форме (2.16). Рассматриваем непрерывно распределенные в пространстве частицы и вводим, по аналогии с плотностью заряда ρ, определением (12.3) *плотность импульса* частиц $\vec{\pi}$. Аналогом плотности тока j служит *тензор плотности потока импульса* частиц, обладающий девятью компонентами

$$\mathcal{P}_{ik} = \pi_i v_k \,. \tag{12.14}$$

Величина $\mathcal{P}_{ik}$ с фиксированными индексами i и k имеет смысл i-го компонента импульса, протекающего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную k-му компоненту скорости. Импульс частицы изменяется за счет действия на нее силы. Поэтому роль интенсивности I источников играет в рассматриваемом случае *плотность силы Лоренца* $\vec{f}$, задаваемая формулой (4.6).

Производя в (2.16) указанные замены, мы придем к требуемому закону изменения импульса частиц в «полевой», т.е. локальной форме:

$$\boxed{\frac{\partial \pi_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}_{ik}}{\partial x_k} = \left\{\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{j},\vec{B}\right]\right\}}\,, \tag{12.15}$$

где по индексу k подразумевается суммирование от 1 до 3. Наличие правой части говорит о том, что импульс частиц не сохраняется: он может «перекачиваться» в импульс поля, и наоборот.

2. Попытаемся теперь получить уравнение типа (12.15) для величин, связанных с переменными состояния электромагнитного поля. При этом будем стремиться к тому, чтобы в его правой части стояла та же величина, что в (12.15), но с обратным знаком. Возьмем с этой целью все четыре уравнения Максвелла (8.1). Уравнение (а) умножим на $-\vec{E}$, уравнение (б) – векторно справа на $-\vec{B}$, уравнение (в) – векторно слева на $\vec{E}$, уравнение (г) – на $-\vec{B}$. После сложения результатов и деления на 4π получим

$$-\frac{1}{4\pi}\vec{E}\,div\vec{E} - \frac{1}{4\pi}\left[rot\vec{B},\,\vec{B}\right] + \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E},\,rot\vec{E}\right] - \frac{1}{4\pi}\vec{B}\,div\vec{B} =$$
$$= -\rho\vec{E} - \frac{1}{c}\left[\vec{j},\vec{B}\right] - \frac{1}{4\pi c}\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\vec{B}\right] - \frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right],$$

или, после очевидной перегруппировки членов,

$$\frac{1}{4\pi c}\left\{\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\vec{B}\right] + \left[\vec{E},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right]\right\} - \frac{1}{4\pi}\left\{\vec{E}\,div\vec{E} + \vec{B}\,div\vec{B}\right\} + \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E},\,rot\vec{E}\right] + \left[\vec{B},rot\vec{B}\right]\right\} =$$
$$= -\left\{\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{j},\vec{B}\right]\right\}. \tag{12.16}$$

Из первой фигурной скобки вынесем производную по времени:

$$\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\vec{B}\right]+\left[\vec{E},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E},\vec{B}\right]. \qquad (12.17)$$

Для преобразования второй фигурной скобки воспользуемся формулой

$$\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)\vec{b}=\vec{b}\ div\vec{a}+\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)\vec{b}\ ,$$

полагая в которой $\vec{b}=\vec{a}$, будем иметь

$$\vec{a}\ div\vec{a}=\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)\vec{a}-\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)\vec{a}\ \ .$$

С помощью последнего соотношения получаем

$$\vec{E}\ div\vec{E}+\vec{B}\ div\vec{B}=\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right)\vec{E}+\left(\vec{\nabla},\vec{B}\right)\vec{B}-\left(\vec{E},\vec{\nabla}\right)\vec{E}-\left(\vec{B},\vec{\nabla}\right)\vec{B}. \qquad (12.18)$$

Для дальнейшего преобразования этого выражения вспомним формулу

$$\vec{\nabla}\left(\frac{a^2}{2}\right)=\left(\vec{a},\ \vec{\nabla}\right)\vec{a}+\left[\vec{a},\ rot\ \vec{a}\right],$$

из которой

$$\left(\vec{a},\ \vec{\nabla}\right)\vec{a}=\vec{\nabla}\left(\frac{a^2}{2}\right)-\left[\vec{a},\ rot\ \vec{a}\right],$$

и потому

$$\left(\vec{E},\vec{\nabla}\right)\vec{E}+\left(\vec{B},\vec{\nabla}\right)\vec{B}=\vec{\nabla}\left(\frac{E^2}{2}\right)+\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{2}\right)-\left[\vec{E},\ rot\vec{E}\right]-\left[\vec{B},\ rot\vec{B}\right]\ . \qquad (12.19)$$

Собирая результаты (12.17) – (12.19), для левой части уравнения (12.16) будем иметь

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E},\vec{B}\right]-\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right)\vec{E}+\left(\vec{\nabla},\vec{B}\right)\vec{B}\right\}+\frac{1}{4\pi}\left\{\vec{\nabla}\left(\frac{E^2}{2}\right)+\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{2}\right)\right\}-\\&-\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E},\ rot\vec{E}\right]+\left[\vec{B},\ rot\vec{B}\right]\right\}+\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E},\ rot\vec{E}\right]+\left[\vec{B},\ rot\vec{B}\right]\right\}=\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E},\vec{B}\right]\right\}+\left\{\vec{\nabla}\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}\right)-\frac{1}{4\pi}\left[\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right)\vec{E}+\left(\vec{\nabla},\vec{B}\right)\vec{B}\right]\right\}\ .\end{aligned}$$

Для i-го компонента этой векторной комбинации можно записать

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E},\vec{B}\right]\right\}+\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}\right)-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(E_kE_i+B_kB_i\right)\right\}\equiv\\&\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E},\vec{B}\right]_i\right\}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{E^2+B^2}{8\pi}\delta_{ik}-\frac{1}{4\pi}\left(E_iE_k+B_iB_k\right)\right\}\ ,\end{aligned}$$

где δ_{ik} – символ Кронекера.

Вводя величины

$$\vec{\tau} \equiv \frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E},\vec{B}\right] = \frac{1}{c^2}\vec{\Pi} \qquad (12.20)$$

и

$$T_{ik} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi}\left(E_i E_k + B_i B_k\right), \qquad (12.21)$$

представим соотношение (12.16) в виде уравнения (12.15):

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -\left\{\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{j},\vec{B}\right]\right\}_i . \qquad (12.22)$$

Справа здесь стоит плотность силы Лоренца, взятая с обратным знаком, а вектор $\vec{\tau}$ включает только полевые переменные состояния. Поэтому естественно думать, что эта величина есть *плотность импульса* самого электромагнитного поля. Тогда тензор T_{ik}, именуемый *максвелловым тензором натяжений* (см. ниже), следует трактовать как *тензор плотности потока импульса* электромагнитного поля, сходный с тензором $\mathcal{P}_{ik}$, который определяется формулой (12.14) и отвечает частицам.

3. Полное обоснование приведенная интерпретация уравнения (12.22) наводит при рассмотрении единой системы частицы+поле. Складывая его с уравнением (12.15), получим уравнение непрерывности без «источников:

$$\frac{\partial\left(\pi_i + \tau_i\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\mathcal{P}_{ik} + T_{ik}\right)}{\partial x_k} = 0 . \qquad (12.23)$$

Оно выражает *закон сохранения импульса* для указанной системы в целом. Это подтверждают рассуждения, полностью аналогичные тем, которые проводились в §11. Здесь мы на них останавливаться не будем. Заметим лишь, что интегрирование (12.23) по всему пространству приводит к закону сохранения импульса в форме (12.8), а интегрирование по конечному объему дает уравнение баланса, сходное с (11.14):

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\pi_i + \tau_i\right) dV = -\oint_S \left(\mathcal{P}_{ik} + T_{ik}\right) dS_k . \qquad (12.24)$$

Проанализируем теперь тензор T_{ik}, определяемый формулой(12.21). Выше он трактовался как тензор плотности потока импульса электромагнитного поля. Однако эта величина допускает и другую, не менее важную интерпретацию, которая, собственно, и оправдывает еще одно его название – максвеллов тензор натяжений. Для дальнейшего полезно расписать его компоненты в явном виде, расположив их в квадратную матрицу порядка 3×3:

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} \frac{E^2+B^2}{2}-\left(E_x^2+B_x^2\right) & -\left(E_xE_y+B_xB_y\right) & -\left(E_xE_z+B_xB_z\right) \\ -\left(E_xE_y+B_xB_y\right) & \frac{E^2+B^2}{2}-\left(E_y^2+B_y^2\right) & -\left(E_yE_z+B_yB_z\right) \\ -\left(E_xE_z+B_xB_z\right) & -\left(E_yE_z+B_yB_z\right) & \frac{E^2+B^2}{2}-\left(E_z^2+B_z^2\right) \end{pmatrix}. \qquad (12.25)$$

Рассмотрим некоторое тело, ограниченное замкнутой поверхностью S, и пусть вне этой поверхности имеется свободное электромагнитное поле, т.е. поле без источников $\left(\rho=0,\ \ \vec{j}=0\right)$. Тогда для i-го компонента поверхностной силы, действующей на тело со стороны поля, можно записать

$$F_i^{пов}=\oint_S dF_i^{пов}=\frac{d\mathcal{P}_i^{тело}}{dt}=-\frac{d\mathcal{P}_i^{поле}}{dt}=\oint_S T_{ik}dS_k\,. \qquad (12.26)$$

Первое равенство очевидно: полная поверхностная сила есть интеграл от элементарных сил; второе равенство отвечает второму закону Ньютона для рассматриваемого тела; третье равенство соответствует закону сохранения импульса для системы тело + поле; последнее равенство представляет собой соотношение (12.24) при $\rho=0,\ \vec{j}=0$ (импульс поля вычисляется во внешней к телу области, а потому нормаль к поверхности – внутренняя). Из (12.26) заключаем, что на элемент площади dS действует поверхностная сила

$$dF_i^{пов}=T_{ik}dS_k\equiv T_{ik}n_kdS\,, \qquad (12.27)$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор внутренней нормали к поверхности. Диагональные элементы тензора T_{ik} определяют нормальные напряжения (давления), недиагональные – тангенциальные напряжения. Поэтому T_{ik} и именуется тензором натяжений.

К полученному результату можно придти и с другой стороны. Рассмотрим электромагнитное поле в присутствии заряженных частиц, запишем для него уравнение (12.22) и проинтегрируем обе его части по некоторому объему V:

$$\int_V f_i dV=-\int_V\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}dV-\int_V\frac{\partial\tau_i}{\partial t}dV\,, \qquad (12.28)$$

где $\vec{f}$ – плотность силы Лоренца, действующей на частицы со стороны поля. Если процесс стационарный, то второе слагаемое в правой части (12.28) обращается в нуль, и мы получаем

$$\int_V f_i dV=-\int_V\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}dV\,. \qquad (12.29)$$

Для дальнейшего важно отметить, что это соотношение справедливо и в случае нестационарных (в частности, периодических) процессов, но уже не для самих величин, а для их средних по времени, ибо для любой ограниченной дифференцируемой функции g имеем

$$\overline{\frac{dg}{dt}} \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{dg}{dt}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{g(T)-g(0)}{T} = 0\,. \tag{12.30}$$

Из (12.29) явствует, что тензор натяжений позволяет вычислять плотность объемной силы, действующей на частицы со стороны поля:

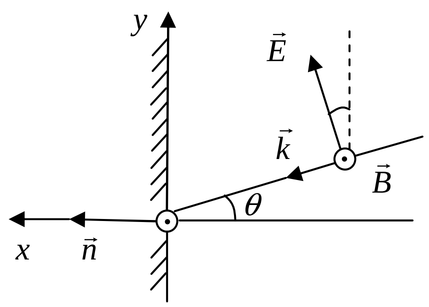
$$f_i = -\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\,. \tag{12.31}$$

Мало того, объемная сила выражается в теории поля через поверхностные напряжения, так как применение к правой части (12.29) обобщенной теоремы Гаусса – Остроградского дает

$$F_i^{об} \equiv \int_V f_i dV = -\oint_S T_{ik} dS_k = \oint_S dF_i^{пов} \equiv F_i^{пов}\,. \tag{12.32}$$

Здесь использовано соотношение (12.27), причем изменение знака связано просто с тем, что там бралась внутренняя нормаль к поверхности, а теперь она внешняя.

Применим полученные результаты для решения задачи, аналогичной рассмотренной в конце основной части параграфа, но несколько более общей.
А именно, определим воздействие плоской электромагнитной волны на абсолютно поглощающую стенку, не считая теперь ее перпендикулярной направлению распространения волны. При выборе координатных осей, представленном на рисунке, $\vec{n} = \{1,0,0\}$, и поэтому для компонентов элементарной поверхностной силы из формулы (12.27) имеем



$$dF_x^{пов} = T_{xx}dS,\quad dF_y^{пов} = T_{yx}dS,\quad dF_z^{пов} = T_{zx}dS\,. \tag{12.33}$$

Поскольку $\vec{E} = \{E\sin\theta,\ E\cos\theta,\ 0\}$ и так как в плоской электромагнитной волне $\vec{B} = \{0,0,E\}$ то для компонентов максвеллова тензора натяжений из его явного выражения (12.25) находим

$$T_{xx} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{E^2+E^2}{2} - E^2\sin^2\theta\right) = \frac{E^2}{4\pi}\cos^2\theta,\qquad T_{yx} = -\frac{E^2}{4\pi}\sin\theta\cos\theta,\qquad T_{zx} = 0\,. \tag{12.34}$$

Подставляя их в формулы (12.33), получим, что на стенку со стороны электромагнитной волны действуют нормальное напряжение, т.е. давление p, а также тангенциальное напряжение σ вдоль оси y, причем

$$p = \frac{E^2}{4\pi}\cos^2\theta,\qquad \sigma = -\frac{E^2}{8\pi}\sin 2\theta\,. \tag{12.35}$$

Полагая в первом выражении $\theta = 0$, вернемся к формуле (12.13) при $R = 0$.