Глава III. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В данной главе классическая электродинамика формулируется в явно ковариантной форме. Тем самым устанавливается, что она автоматически удовлетворяет всем требованиям специальной теории относительности, т.е. является релятивистской теорией. Изложение начинается с напоминания смысла последнего термина.

§13. Ковариантный формализм в релятивистских теориях[1)]

Если говорить совсем кратко, то *релятивистская теория* – это такая теория, в которой справедлив полный принцип относительности Эйнштейна, т.е. это теория, законы которой ковариантны по отношению к преобразованиям из группы Пуанкаре. Данное утверждение включает три аспекта, которые ниже и расшифровываются.

1. Преобразования координат событий

В заданной системе отсчета каждому элементарному событию сопоставляются четыре числа – координаты события $X=(\vec{r},t)$. При переходе к другой системе отсчета координаты того же события превращаются в $X'=(\vec{r}',t')$. В специальной теории относительности рассматриваются только инерциальные системы отсчета (ИСО), и множество всех преобразований перехода от исходной ИСО S к любой другой ИСО S' образует так называемую группу Пуанкаре. Она включает: (а) пространственные трансляции; (б) сдвиги во времени; (в) пространственные вращения; (г) пространственную инверсию; (д) обращение времени; (е) частные *преобразования Лоренца*, задающие переходы от ИСО S к ИСО S', движущимся относительно S поступательно с постоянными скоростями $\vec{V}$. Первые пять преобразований рассматриваются и в нерелятивистской физике. Поэтому основное внимание будет уделяться частным преобразованиям Лоренца, которые в специальном, но важном случае записываются как

$$x'=x,\quad y'=y,\quad z'=\frac{z-Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\quad t'=\frac{t-\dfrac{V}{c^2}z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\ . \tag{13.1}$$

Одно из наиболее фундаментальных свойств преобразований Лоренца состоит в том, что они оставляют инвариантными интервалы событий:

$$S^2(X)\equiv c^2t^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\equiv(ct)^2-\vec{r}^{\,2}=inv\,. \tag{13.2}$$

[1)] Бегло затрагиваемые ниже проблемы подробно обсуждаются в работах: Наумов А.И. Методические разработки к курсу теоретической физики (Введение. Классическая механика). – М.: МГПИ, 1986, §6-8; Наумов А.И. Методические разработки к курсу теоретической физики (Специальная теория относительности. Релятивистская механика). – М.: МГПИ, §14, 19.

[2)] Полные преобразования Лоренца включают также преобразования (в)-(д). Заметим, что в современной научной литературе частные преобразования Лоренца часто именуются бустами.

С целью приближения формализма «хроногеометрии» к обычному геометрическому формализму вводят вместо времени t мнимую координату $x_4 = ict$ и записывают координаты событий как

$$X = (x, y, z;\ ict) \equiv (x_1, x_2, x_3; x_4) \equiv (\vec{x}; x_4)\ . \tag{13.3}$$

Иными словами, события рассматриваются как точки 4-мерного пространства Минковского. Тогда преобразования Лоренца (13.1) принимают вид

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = \frac{x_3 + i\frac{V}{c}x_4}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x_4' = \frac{x_4 - i\frac{V}{c}x_3}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ , \tag{13.4}$$

а интервалы (13.2), которые они сохраняют, представляются как

$$S^2(X) = c^2t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = -x_4^2 - \vec{x}^2 = -x_4^2 - x_j x_j = -x_\mu x_\mu\ . \tag{13.5}$$

Здесь и в дальнейшем греческие индексы пробегают значения от 1 до 4, а латинские индексы, которые сохраняются за пространственными координатами, принимают значения 1, 2, 3, причем подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Для компактной записи преобразований (13.4) можно воспользоваться матричной символикой:

$$x_\mu' = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu\ . \tag{13.6}$$

Сравнивая (13.6) с (13.4), легко выписать матрицу Λ в явном виде, но он нам в дальнейшем не потребуется.

2. Преобразование значений физических величин

При изменении системы отсчета изменяются не только координаты событий, но, вообще говоря, и значения f физических величин F. В этом смысле говорят, что физические величины являются *ковариантами* рассматриваемой группы преобразований[1)], в нашем случае – группы Пуанкаре. И здесь мы все внимание сосредоточим на трансформационных свойствах физических величин по отношению к преобразованиям Лоренца, причем на практике обычно приходится иметь дело только с преобразованиями Лоренца специального виде (13.1) или (13.4).

Оказывается, что наиболее общими ковариантами группы Лоренца являются 4-тензоры:

> 4-тензором F ранга n называется совокупность 4^n чисел $f'_{\mu_1\ldots\mu_n}$ (компонентов тензора), которые при преобразованиях Лоренца (13.6) изменяются по закону

$$f'_{\mu_1\ldots\mu_n} = \Lambda_{\mu_1\nu_1}\ldots\Lambda_{\mu_n\nu_n} f_{\nu_1\ldots\nu_n}\ , \tag{13.7}$$

[1)] Это понятие предполагает, что законы преобразования значений физических величин обладают некоторыми свойствами общего характера, на которых мы здесь не останавливаемся. См. по этому поводу: Наумов А.И. Методические разработки к курсу теоретической физики (Введение, Классическая механика). – М.:МГПИ, 1986, §7.

т.е. как произведение n координат событий.

В множестве-4-тензоров стандартным способом вводятся алгебраические операции: умножение на числа, сложение и перемножение, свертывание по паре индексов. Для построения релятивистской механики достаточно тензоров нулевого и первого ранга, в релятивистской электродинамике важную роль будут играть также тензоры второго ранга.

(а) Тензор нулевого ранга имеет один компонент φ и называется *скаляром*. Он не меняется при изменении системы отсчета:

$$\varphi' = \varphi, \tag{13.8}$$

т.е. является *инвариантом* преобразований Лоренца. Примеры скаляров – интервал S^2, элемент собственного времени

$$d\tau = \frac{dS}{c} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \ , \tag{13.9}$$

масса частицы m и др.

(б) Тензор первого ранга A имеет 4 компонента a_μ и называется *4-вектором*:

$$A = \left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) \equiv \left(\vec{a}, a_4\right). \tag{13.10}$$

Закон преобразования совпадает с законом преобразования (13.6) координат событий:

$$a'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} a_\nu , \tag{13.11}$$

или в явном виде [см. формулы (13.4)]

$$a'_1 = a_1, \quad a'_2 = a_2, \quad a'_3 = \frac{a_3 + i\dfrac{V}{c}a_4}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad a'_4 = \frac{a_4 - i\dfrac{V}{c}a_3}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \ . \tag{13.12}$$

Примеры 4-векторов – 4-радиус-вектор X (координаты событий), 4-скорость

$$U = \frac{dX}{d\tau} = \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad i\frac{ic}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right), \tag{13.13}$$

4-импульс

$$\mathcal{P} = mU = \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad i\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \left(\vec{p}, \ i\frac{\varepsilon}{c}\right) \ . \tag{13.14}$$

Из всякого 4-вектора A можно образовать скаляр – его квадрат

$$A^2 = a_\mu a_\mu = \vec{a}^{\,2} + a_4^2 \ . \tag{13.15}$$

Так, $X^2 = -S^2$, $U^2 = -c^2$, $\wp^2 = -m^2c^2$ и т.д. Любым двум 4-векторам A и B сопоставляется 4-мерное скалярное произведение

$$(A, B) \equiv a_\mu b_\mu = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) + a_4 b_4 \ , \tag{13.16}$$

которое также является инвариантом преобразований Лоренца.

(в) *Тензор второго ранга* T имеет 16 компонентов $t_{\mu\nu}$, которые преобразуются по закону

$$t'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\nu\sigma}t_{\rho\sigma} \ . \tag{13.17}$$

Отметим среди них симметричные и антисимметричные тензоры S и A:

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}, \quad a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu} \ . \tag{13.18}$$

Напомним, что полная свертка симметричного и антисимметричного тензоров равна нулю:

$$(S, A) \equiv s_{\mu\nu}a_{\mu\nu} = 0 \, , \tag{13.19}$$

так как

$$(S, A) \equiv s_{\mu\nu}a_{\mu\nu} = s_{\nu\mu}a_{\mu\nu} = -s_{\nu\mu}a_{\nu\mu} \equiv -s_{\mu\nu}a_{\mu\nu} = -(S, A) \ .$$

Если в каждой точке X 4-пространства Минковского задан тензор F (4-чисел $f_{\mu_1 \ldots \mu_n}$), то говорят, что имеется *тензорное поле* $F = F(X)$. Частными случаями являются скалярное поле $\varphi = \varphi(X)$, векторное поле $A = A(X)$, тензорное поле второго ранга $T = T(X)$. Путем дифференцирования из заданного тензорного поля можно строить другие тензорные поля. Основным при этом является дифференциальный оператор ∇:

$$\nabla_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\vec{\nabla}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right) = \left(\vec{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \, , \tag{13.20}$$

обладающий формальными свойствами 4-вектора и обобщающий на 4-мерный случай общеизвестный 3-мерный оператор «набла». Квадрат ∇^2 есть инвариантный оператор, совпадающий с даламберианом (9.3):

$$\nabla^2 \equiv \nabla_\mu \nabla_\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \ \Box \ . \tag{13.21}$$

Таким образом, оператор Даламбера $\Box$ есть непосредственный 4-мерный аналог оператора Лапласа $\vec{\nabla}^2 \equiv \Delta$. Укажем теперь важнейшие дифференциальные операции над тензорными полями, которые нам потребуются в дальнейшем.

(а) *4-градиент* скаляра φ есть 4-вектор.

$$(Grad\ \varphi)_\mu \equiv \nabla_\mu \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} = \left(\vec{\nabla}\varphi, -\frac{i}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \ . \tag{13.22}$$

(б) *4-дивергенция* вектора A представляет собой скаляр

$$Div\ A \equiv (\nabla, A) = \nabla_\mu a_\mu = \frac{\partial a_\mu}{\partial x_\mu} = div\ \vec{a} - \frac{i}{c}\frac{\partial a_4}{\partial t} = div\ \vec{a} - \frac{1}{c}\frac{\partial a_0}{\partial t}\ , \tag{13.23}$$

где введено обозначение $a_4 \equiv ia_0$.

(в) *4-дивергенция* тензора второго ранга T есть вектор

$$(Div\ T)_\mu \equiv \nabla_\nu t_{\mu\nu} = \frac{\partial t_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\ . \tag{13.24}$$

(г) *4-ротор* вектора A является антисимметричным тензором второго ранга[1)]

$$(Rot\ A)_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu a_\nu - \nabla_\nu a_\mu = \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial a_\mu}{\partial x_\nu}\ . \tag{13.25}$$

(д) *Даламбериан* произвольного тензора F представляет собой тензор того же ранга

$$\square F \equiv \nabla_\mu \nabla_\mu F = \Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\ . \tag{13.26}$$

В пространстве Минковского справедливы также интегральные теоремы, подобные теоремам Гаусса – Остроградского и Стокса, но они нам в дальнейшем не потребуются.

3. Физические законы

Как упоминалось в начале параграфа, группа Пуанкаре является группой симметрии любой релятивистской теории. Это означает, что все физические законы должны быть *ковариантными* по отношению к преобразованиям Лоренца и пространственно-временным трансляциям, т.е. их форма не должна зависеть от выбора инерциальной системы отсчета. Это есть конструктивная формулировка полного принципа относительности Эйнштейна. Для обеспечения ковариантности данного физического закона необходимо, чтобы все входящие в него слагаемые были однотипными ковариантами группы Лоренца – тензорами одного и того же ранга. Это условие представляется достаточно очевидным и даже тривиальным, но именно оно служит путеводной звездой при введении основных понятий и формулировании основных законов той или иной релятивистской теории.

Применим теперь изложенные соображения к установлению того фундаментального факта, что классическая электродинамика является релятивистской теорией. Резюмируем с этой целью ее главнейшие положения, которые обсуждались в предшествующих главах.

(а) К параметрам системы в электродинамике относятся плотность заряда ρ и плотность тока $\vec{j}$. Они удовлетворяют уравнению непрерывности (2.19), выражающему закон сохранения электрического заряда.

[1)] Обычный ротор $rot\ \vec{a}$ также можно рассматривать как антисимметричный тензор второго ранга, что видно из явных выражений для его компонентов. В 3-мерном случае такой тензор сводится к (псевдо)вектору. Но в 4-мерном случае это уже не так, и определение (13.25) является единственно возможным естественным обобщением определения обычного ротора.

(б) В качестве переменных состояния электромагнитного поля можно взять потенциалы φ и $\vec{A}$, допускающие калибровочные преобразования (10.6). Если наложить на потенциалы условие Лоренца (10.7), то они будут подчиняться уравнениям Даламбера (10.8).

(в) В качестве переменных состояния электромагнитного поля можно выбрать также напряженность электрического поля $\vec{E}$ и индукцию магнитного поля $\vec{B}$. Эти величины связаны с потенциалами соотношениями (10.3), и они удовлетворяют уравнениям Максвелла (8.1).

(г) В качестве уравнения движения заряженной частицы в заданном электромагнитном поле выступает теорема об изменении импульса (5.1) с силой Лоренца в правой части. Из нее вытекает закон изменения механической энергии частицы (5.4).

§14. Четырехмерный ток

Рассмотрим прежде всего плотность заряда ρ и плотность тока $\vec{j}$, подчиняющиеся уравнению непрерывности (2.19). Чтобы выявить 4-мерную структуру последнего, тождественно перепишем это уравнение как

$$div\,\vec{j} + ic\frac{\partial\rho}{\partial(ict)} = 0\ ,\quad \text{или}\quad \frac{\partial j_k}{\partial x_k} + \frac{\partial(ic\rho)}{\partial x_4} = 0\,.$$

Закон сохранения электрического заряда справедлив во всех инерциальных системах отсчета, а потому данное уравнение должно быть ковариантным относительно преобразований Лоренца. В него, как мы видим, входит ковариантный дифференциальный оператор ∇_μ, определяемый формулой (13.20) и обладающий формальными свойствами 4-вектора. Поэтому ковариантность будет обеспечена, если потребовать, чтобы величины ρ и $\vec{j}$ образовывали 4-вектор

$$\boxed{J = \left(\vec{j}, ic\rho\right)}\ . \tag{14.1}$$

Он называется четырехмерным током, или *4-током*. С учетом его определения уравнение непрерывности (2.19) будет записываться в полностью ковариантной форме

$$\boxed{\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} \equiv \nabla_\mu j_\mu \equiv Div\ J = 0}\ . \tag{14.2}$$

Из общих формул (13.12) преобразования компонентов 4-вектора и из определения 4-тока (14.1) сразу получаем, что величины ρ и $\vec{j}$ обладают следующими трансформационными свойствами по отношению к преобразованиям Лоренца:

$$j'_x = j_x,\quad j'_y = j_y,\quad j'_z = \frac{j_z - V\rho}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},\quad \rho' = \frac{\rho - \dfrac{V}{c^2}j_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ . \tag{14.3}$$

В частности, переходя от системы покоя S_0 заряженных частиц, где $\rho = \rho_0,\ \vec{j} \equiv \vec{j}_0 = 0$, к системе отсчета S, движущейся относительно нее со скоростью $-\vec{V}$, т.е. к ИСО, в которой сами частицы движутся со скоростью $\vec{V}$, из (14.3) будем иметь

$$j_x = 0, \quad j_y = 0, \quad j_z = \frac{\rho_0 V}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \ . \tag{14.4}$$

В нерелятивистском приближении

$$\vec{j} \cong \rho_0 \vec{V}, \qquad \rho \cong \rho_0. \tag{14.5}$$

и весь эффект сводится к естественному возникновению некоторого тока.

В релятивистской области возникает дополнительное явление – определенное возрастание плотности заряда движущихся частиц. Оно связано со свойством инвариантности электрического заряда. Действительно, для заряда, заключенного в некотором элементарном объеме, с учетом этого свойства и лоренцева сокращения имеем

$$dq = \rho \ dV = \rho \ dxdydz = \rho \ dx_0 dy_0 dz_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} =$$
$$= dq_0 = \rho_0 dV_0 = \rho_0 dx_0 dy_0 dz_0,$$

откуда

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{14.6}$$

в полном соответствии с последней формулой (14.4).

Интересен также другой крайний случай, когда в исходной ИСО S имеется нейтральный проводник с током, для которого $\rho = 0, \quad j_x = j_y = 0, \quad j_z = j$. В системе отсчета, движущейся вдоль проводника со скоростью $-\vec{V}$ (в ней проводник движется со скоростью $\vec{V}$), из (14.3) получаем

$$j'_x = 0, \quad j'_y = 0, \quad j'_z = \frac{j}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad \rho' = \frac{\frac{V}{c^2} j}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \ . \tag{14.7}$$

Таким образом, при движении проводника ток в нем несколько возрастает. Но главное, нейтральный ранее проводник становится теперь заряженным. Этот релятивистский аффект объясняется следующим образом. В исходной системе отсчета S имеем

$$\rho_+ = -\rho_-, \qquad j_+ \neq -j_- \ . \tag{14.8}$$

Например, для металлического проводника $j_+ = 0$, а $j_- = j \neq 0$. В новой системе отсчета S' с помощью последней формулы (14.7) получим

$$\rho'_\pm = \frac{\frac{V}{c^2} j_\pm}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \ . \tag{14.9}$$

Так как $j_+ \neq -j_-$, то здесь уже $\rho'_+ \neq -\rho_-$ т.е.

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- \neq 0 \,. \tag{14.10}$$

Таким образом, появление ненулевой плотности электрического заряда в конечном итоге связано с различием токов, создаваемых положительно и отрицательно заряженными частицами в исходной системе отсчета, т.е. с различием в характере движения этих частиц[1)].

§15. Четырехмерный потенциал

При анализе трансформационных свойств потенциалов φ и $\vec{A}$ будем исходить из уравнений Даламбера (10.8), которым они удовлетворяют при выполнении условия Лоренца (10.7). Имея в виду структуру 4-тока (14.1), перепишем тождественно эти уравнения как

$$\Box A_k = -\frac{4\pi}{c} j_k, \quad \Box(i\varphi) = -\frac{4\pi}{c}(ic\rho) \,. \tag{15.1}$$

Справа здесь стоят компоненты 4-вектора J, а входящий в левые части даламбериан (13.21) есть релятивистски инвариантный оператор. Поэтому ковариантность уравнений (15.1) будет обеспечена, если потребовать, чтобы величины φ и $\vec{A}$ образовывали 4-вектор

$$\boxed{A = \left(\vec{A},\ i\varphi\right)} \,. \tag{15.2}$$

Он называется четырехмерным потенциалом, или *4-потенциалом*. С учетом его определения уравнения Даламбера (10.8) будут записываться в полностью ковариантной форме

$$\boxed{\Box A = -\frac{4\pi}{c} J} \,. \tag{15.3}$$

Если вспомнить определение 4-градиента (13.22), то калибровочные преобразования (10.6) можно будет записать в ковариантной форме:

$$\boxed{A' = A + Grad\ \psi} \,. \tag{15.4}$$

С учетом определения 4-дивергенции (13.23) не менее изящно представляется и дополнительное условие Лоренца (10.7):

$$\boxed{Div\ A = 0} \,. \tag{15.5}$$

Из общих формул (13.12) преобразования компонентов 4-вектора и из определения 4-потенциала (15.2) сразу получаем, что величины φ и $\vec{A}$ обладают следующими трансформационными свойствами:

[1)] Подробное обсуждение этой интересной проблемы, основывавшееся на свойстве инвариантности электрического заряда, см. в кн.: Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, вып.5. Электричество и магнетизм. - М.: Мир, 1966. – Гл.13, §6.

$$A'_x = A_x, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = \frac{A_z - \frac{V}{c}\varphi}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \varphi' = \frac{\varphi - \frac{V}{c}A_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} . \tag{15.6}$$

В частности, если в исходной системе отсчета S_0 заряженные частицы покоятся, а значит, создают только электрическое поле $\left(\vec{A} = 0, \quad \varphi = \varphi_0\right)$, то в движущейся системе отсчета S будем иметь

$$A_x = 0, \quad A_y = 0, \quad A_z = \frac{-\frac{V}{c}\varphi_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} . \tag{15.7}$$

Здесь уже наряду с электрическим полем $\vec{E}$ имеется и отличное от нуля магнитное поле $\vec{B} = rot\,\vec{A}$. Этот факт не является неожиданным, ибо, как мы видели в §4, разбиение электромагнитного поля на электрическую и магнитную составляющие является относительным.

В нерелятивистском приближении $(V \ll c)$ формулы (15.7) принимают вид

$$A_x = 0, \quad A_y = 0, \quad A_z = -\frac{V}{c}\varphi_0, \quad \varphi = \varphi_0 . \tag{15.8}$$

Отсюда для магнитного поля $\vec{B}$ в движущейся системе отсчета имеем

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\varphi_0 \dfrac{V}{c} \end{vmatrix} = -\frac{V}{c}\left\{\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, 0\right\} = \frac{V}{c}\left\{E_{0y}, -E_{0x}, 0\right\} .$$

Если учесть, что $\vec{V} = \{0, 0, V\}$, а значит, $\left[\vec{V}, \vec{E}_0\right] = \{-VE_{0y}, VE_{0x}, 0\}$, то получим

$$\vec{B} = -\frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{E}_0\right] . \tag{15.9}$$

В итоге мы пришли к формуле (4.18) при $\vec{B}_0 = 0$, задающей закон преобразования магнитного поля при изменении инерциальной системы отсчета. В §4, где соответствующий анализ проводился на основе выражения для силы Лоренца, эту формулу нам не удалось получить сколько-нибудь простым способом. Трансформационные свойства электрического и магнитного полей в самой общей ситуации будут исследованы в следующем параграфе, где обсуждается ковариантный способ описания этих полей.

§16. Тензор электромагнитного поля

Формула $\vec{B} = rot\ \vec{A}$ подсказывает нам ввести в рассмотрение ковариантную величину

$$\boxed{F = Rot\ A}\ . \tag{16.1}$$

Согласно определению (13.25), она представляет собой антисимметричный тензор второго ранга с компонентами

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}}\ . \tag{16.2}$$

По причинам, которые сейчас выяснятся, этот тензор называется *тензором электромагнитного поля*. Из свойства антисимметрии

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{16.3}$$

явствует, что тензор F имеет всего 6 независимых компонентов: диагональные равны нулю, а недиагональные компоненты с одинаковыми парами индексов различаются лишь знаками.

С помощью определений (13.3), (15.2) и (16.2) для временных компонентов $F_{k4} = -F_{4k}$ получаем

$$F_{k4} = \frac{\partial A_4}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_4} = \frac{\partial(i\varphi)}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial(ict)} = i\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \frac{i}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} =$$
$$= -i\left\{-grad\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right\}_k\ ,$$

так что

$$F_{k4} = -F_{4k} = -iE_k\ . \tag{16.4}$$

Те же определения для F_{12} дают

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \left(rot\ \vec{A}\right)_z\ .$$

Аналогично вычисляются величины F_{13} и F_{23}, и мы имеем

$$F_{12} = -F_{21} = B_z,\quad F_{13} = -F_{31} = -B_y,\quad F_{23} = -F_{32} = B_x. \tag{16.5}$$

В итоге для матрицы тензора F получаем

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ \hdashline iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{array}\right)}\ , \tag{16.5}$$

где штриховыми линиями указана 3-мерная структура этой матрицы[1)].

Таким образом, в теории относительности электрическое и магнитное поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ комбинируются в единый 4-мерный ковариантный объект-тензор электромагнитного поля. И сразу становится очевидным, что при преобразованиях Лоренца величины $\vec{E}$ и $\vec{B}$ будут "перепутываться" друг с другом, что с особой ясностью подчеркивает относительность разбиения электромагнитного поля на электрическую и магнитную составляющие.

Трансформационные свойства электрического и магнитного полей можно установить разными способами. Простейший из них основывается на наблюдении, что

$$F_{\mu\nu} \sim x_\mu x_\nu \ , \tag{16.6}$$

где тильда «$\sim$» означает «... преобразуется так же, как...». Учитывая, что при частных преобразованиях Лоренца (13.4) $x_1' = x_1$ и $x_2' = x_2$, имеем

$$\begin{aligned} &F_{12} \sim x_1 x_2 = inv, \quad F_{13} \sim x_1 x_3 \sim x_3, \quad F_{23} \sim x_2 x_3 \sim x_3; \\ &F_{14} \sim x_1 x_4 \sim x_4, \quad F_{24} \sim x_2 x_4 \sim x_4, \quad F_{34} \sim x_3 x_4 \ . \end{aligned} \tag{16.7}$$

Тогда с помощью формул (13.4) для первых пяти из этих величин получим

$$\begin{aligned} &F_{12}' = F_{12}, \quad F_{13}' \equiv F_{1'3'} = F_{13'} = \frac{F_{13} + i\beta F_{14}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad F_{23}' \equiv F_{2'3'} = F_{23'} = \frac{F_{23} + i\beta F_{24}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ &F_{14}' \equiv F_{1'4'} = F_{14} = \frac{F_{14} - i\beta F_{13}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad F_{24}' \equiv F_{2'4'} = F_{24'} = \frac{F_{24} - i\beta F_{23}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{16.8}$$

$(\beta \equiv V/c)$. Величина F_{34} требует особого рассмотрения. Проводя с помощью (13.4) последовательные преобразования по каждому ее индексу, найдем

$$\begin{aligned} F_{34}' \equiv F_{3'4'} &= \frac{F_{34'} + i\beta F_{44'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ \frac{F_{34} - i\beta F_{33}}{\sqrt{1-\beta^2}} + i\beta \frac{F_{44} - i\beta F_{43}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\} = \\ &= \frac{F_{34} + \beta^2 F_{43}}{1-\beta^2} = \frac{F_{34}\left(1-\beta^2\right)}{1-\beta^2}, \end{aligned}$$

т.е.

$$F_{34}' = F_{34} \, . \tag{16.7}$$

В процессе выкладок учтено, что $F_{33} = F_{44} = 0$ и $F_{43} = -F_{34}$.

Подставляя в формулы (16.8) и (16.9) явные выражения для компонентов тензора $F_{\mu\nu}$ из (16.5), получим следующий окончательный закон преобразования электрического и магнитного полей:

[1)] Сравн. ее верхний левый блок с матрицей (3.26).

$$E'_x = \frac{E_x - \frac{V}{c}B_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad E'_y = \frac{E_y + \frac{V}{c}B_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad E'_z = E_z;$$
$$B'_x = \frac{B_x + \frac{V}{c}E_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad B'_y = \frac{B_y - \frac{V}{c}E_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad B'_z = B_z. \tag{16.10}$$

В нерелятивистском приближении $(V \ll c)$ он превращается в

$$E'_x = E_x - \frac{V}{c}B_y, \qquad E'_y = E_y + \frac{V}{c}B_x, \qquad E'_z = E_z;$$
$$B'_x = B_x + \frac{V}{c}E_y, \quad B'_y = B_y - \frac{V}{c}E_x, \qquad B'_z = B_z. \tag{16.11}$$

Учитывая, что $\vec{V} = \{0, 0, V\}$, можно записать также

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]; \qquad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{E}\right]\ . \tag{16.12}$$

В итоге мы возвращаемся к формулам (4.17) и (4.18), которые обсуждались в §4 в связи с относительностью понятий электрического и магнитного полей.

Итак, сами поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ изменяются при изменении системы отсчета. Однако из них можно образовать комбинации, инвариантные относительно преобразований Лоренца. Они называются *инвариантами* электромагнитного поля. Для их отыскания воспользуемся тем фактом, который мы примем без доказательства, что определитель матрицы, составленной из компонентов произвольного тензора второго ранга T, есть инвариант[1)]:

$$\det T = inv\ . \tag{16.13}$$

Идея состоит в следующем. Возьмем в качестве T тензор $F - \lambda I$ (F – тензор электромагнитного поля, I – единичный тензор, λ – вещественный параметр) и вычислим определитель его матрицы. В результате получим так называемый характеристический многочлен тензора F, который есть многочлен четвертой степени по λ. В силу (16.13) он есть инвариантный многочлен:

$$\det\left(F - \lambda I\right) = inv\,, \tag{16.14}$$

[1)] Это следует из того, что определитель квадратной матрицы T порядка 4×4 можно записать как

$$\det T = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}T_{\mu_1\nu_1}T_{\mu_2\nu_2}T_{\mu_3\nu_3}T_{\mu_4\nu_4}\ ,$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ - 4-мерный символ Леви-Чивита.

а потому инвариантами будут и его коэффициенты при равных степенях λ.
Как можно показать, ими исчерпываются все вообще инварианты тензора F.

Раскрывая условие (16.14), направим ось z по магнитному полю $\vec{B}$ и совместим плоскость yz с электрическим полем $\vec{E}$:

$$\vec{B} = \{0, 0, B_z\}; \qquad \vec{E} = \{0, E_y E_z\}. \tag{16.15}$$

Тогда с учетом явного выражения (16.5) для компонентов тензора электромагнитного поля будем иметь

$$\det(F - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & B_z & 0 & 0 \\ -B_z & -\lambda & 0 & -iE_y \\ 0 & 0 & -\lambda & -iE_z \\ 0 & iE_y & iE_z & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + \lambda^2\left(B_z^2 - E_y^2 - E_z^2\right) - B_z^2 E_z^2 =$$

$$= \lambda^4 + \left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2\right)\lambda^2 - \left(\vec{E}, \vec{B}\right)^2 = inv.$$

В итоге получаем следующие два инварианта электромагнитного поля:

$$\boxed{I_1 = \vec{B}^2 - \vec{E}^2, \qquad I_2 = \left(\vec{E}, \vec{B}\right)^2} \ . \tag{16.16}$$

Заметим, что само скалярное произведение $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ есть инвариант только собственных преобразований Лоренца, не включающих отражений. При пространственной инверсии оно изменяет знак, так что $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ является не скаляром, а псевдоскаляром (сравн. с обсуждением свойства 5 уравнений Максвелла в §9).

Очевидно, что свободный член характеристического многочлена тензора F совпадает со значением этого многочлена при $\lambda = 0$. Но тогда из способа получения инвариантов (16.16) сразу следует, что

$$I_2 = -\det F \ . \tag{16.17}$$

Кроме того, как нетрудно убедиться путем непосредственных выкладок,

$$I_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \ . \tag{16.18}$$

Из существования инвариантов электромагнитного поля (16.16) вытекает ряд довольно важных следствий.

(а) Свойство ортогональности векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$

$$\vec{E} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \left(\vec{E}, \vec{B}\right) = 0 \tag{16.19}$$

есть инвариантное свойство.

(б) Свойство равенства модулей векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$

$$\left|\vec{E}\right| = \left|\vec{B}\right| \Leftrightarrow \vec{B}^2 - \vec{E}^2 = 0 \tag{16.20}$$

есть инвариантное свойство.

(в) Неравенства

$$\left|\vec{E}\right| > \left|\vec{B}\right| \Leftrightarrow \vec{B}^2 - \vec{E}^2 < 0; \qquad \left|\vec{E}\right| < \left|\vec{B}\right| \Leftrightarrow \vec{B}^2 - \vec{E}^2 > 0 \tag{16.21}$$

имеют абсолютный смысл.

(г) Если в какой-то системе отсчета векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ образуют острый (тупой) угол, то они будут образовывать острый (тупой) угол и в любой другой системе отсчета.

(д) Если векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ ортогональны и $\vec{E}$ превышает по модулю $\vec{B}$, т.е.

$$\vec{E} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \left(\vec{E}, \vec{B}\right) = 0, \qquad \left|\vec{E}\right| > \left|\vec{B}\right| \Leftrightarrow \vec{B}^2 - \vec{E}^2 < 0\,, \tag{16.22}$$

то электромагнитное поле является "электроподобным". В этом случае не существует системы отсчета, в которой $\vec{E}' = 0$, но всегда найдется такая система отсчета, в которой магнитное поле отсутствует: $\vec{B}' = 0$.

(е) Если

$$\vec{E} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \left(\vec{E}, \vec{B}\right) = 0, \qquad \left|\vec{E}\right| < \left|\vec{B}\right| \Leftrightarrow \vec{B}^2 - \vec{E}^2 > 0\,, \tag{16.23}$$

то электромагнитное поле является «магнитоподобным».

(ж) Если хотя бы один из инвариантов (16.16) отличен от нуля, то найдется такая система отсчета, в которой векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в данной точке параллельны друг другу[1)].

(з) Исключение представляет случай, когда $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$. В этом случае векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ во всех системах отсчета равны по модулю и взаимно ортогональны (см. первые два свойства). Именно таковы свойства плоской электромагнитной волны [вспомним формулы (12.9)].

§17. Уравнения Максвелла в ковариантной форме

В обычном формализме, коль скоро поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ выражены через потенциалы φ и $\vec{A}$ посредством соотношений (10.3), вторая пара уравнений Максвелла удовлетворяется тождественно. Аналогично этому можно ожидать, что и в релятивистском формализме из определения (16.2) будет вытекать некоторое тождество для тензора электромагнитного поля. И такое тождество действительно существует, причем, как мы вскоре увидим, оно полностью эквивалентно второй паре уравнений Максвелла. Вот это тождество:

[1)] См.: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1978, §25.

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} = \nabla_\lambda \left(\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \right) + \nabla_\nu \left(\nabla_\lambda A_\mu - \nabla_\mu A_\lambda \right) + \nabla_\mu \left(\nabla_\nu A_\lambda - \nabla_\lambda A_\nu \right) =$$
$$= \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\lambda \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} - \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\nu \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} = 0,$$

где на последнем этапе мы учли равенство соответствующих смешанных производных.

В первую пару уравнений Максвелла (8.1) входят источники электромагнитного поля – плотность заряда ρ и плотность тока $\vec{j}$, образующие 4-вектор J. Кроме того, эти уравнения включают первые производные от $\vec{E}$ и $\vec{B}$ по времени и координатам, причем $\vec{E}$ и $\vec{B}$ комбинируются в тензор F. Единственное ковариантное соотношение между J и первыми производными F имеет вид

$$Div\ F = \alpha J\ ,$$

причем из структуры уравнений (8.1) естественно ожидать, что $\alpha = 4\pi/c$.

В итоге возникает гипотеза, что уравнения Максвелла (8.1) можно представить в следующей ковариантной форме:

$$\boxed{(\mathrm{I})\ \ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu \qquad (\mathrm{II})\ \ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0}\ . \tag{17.1}$$

Система (I) включает 4 уравнения, как это и должно быть. На первый взгляд может показаться, что в системе (II) уравнений существенно больше. Однако это не так: нетривиальны здесь тоже 4 уравнения, которые получаются при $\mu \neq \nu \neq \lambda$. Все остальные соотношения удовлетворяются тождественно просто в силу антисимметрии тензора F. Например, при $\nu = \mu$ имеем (суммирования по μ нет):

$$\frac{\partial F_{\mu\mu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(F_{\mu\lambda} + F_{\lambda\mu} \right).$$

Но это выражение равно нулю для произвольного антисимметричного тензора, а не только для тензора F, являющегося 4-ротором 4-потенциала.

Проверим теперь, что уравнения (17.1) действительно совпадают с обычными уравнениями Максвелла (8.1). При $\mu = 4$ из (I) получаем:

$$\frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = i\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \equiv$$
$$\equiv i\ div\vec{E} = \frac{4\pi}{c} j_4 = \frac{4\pi}{c}(ic\rho) = i\ 4\pi\rho\ ,$$

т.е. первое уравнение Максвелла (8.1,а):

$$div\vec{E} = 4\pi\rho\ .$$

При этом были использованы выражения (14.1) для 4-тока J и (16.5) для матрицы тензора электромагнитного поля F. При $\mu = 1$ из (17.1.I) имеем

$$\frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial(-iE_x)}{\partial(ict)} \equiv$$
$$\equiv \left(rot\ \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_x = \frac{4\pi}{c} j_1 = \frac{4\pi}{c} j_x.$$

Совершенно аналогичные результаты получаются при $\mu = 2$ и $\mu = 3$, и в итоге мы приходим к векторному уравнению Максвелла (8.1,б):

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Обратимся теперь к системе (II) уравнений (17.1), для которой, согласно сказанному выше, достаточно рассмотреть случаи $\mu \neq \nu \neq \lambda$.
При $\mu = 1, \quad \nu = 2, \quad \lambda = 3$ имеем

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \equiv div\vec{B} = 0,$$

т.е. уравнение Максвелла (8.1,в)

$$div\vec{B} = 0.$$

При $\mu = 1, \quad \nu = 2, \quad \lambda = 4$ получаем

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} = \frac{\partial B_z}{\partial(ict)} + \frac{\partial(-iE_y)}{\partial x} + \frac{\partial(iE_x)}{\partial y} =$$
$$= -i\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} - i\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \equiv -i\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot\ \vec{E}\right)_z = 0.$$

Совершенно аналогичные результаты возникают при $\mu = 1, \quad \nu = 3, \quad \lambda = 4$ и $\mu = 2, \quad \nu = 3, \quad \lambda = 4$, и мы приходим к векторному уравнению Максвелла (8.1,г)

$$rot\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Таким образом, проверка справедливости уравнений (17.1) завершена. Покажем, что, как и в обычном формализме, эти уравнения автоматически включают закон сохранения электрического заряда. Для этого подействуем на обе части системы (I) дифференциальным оператором ∇_μ:

$$\nabla_\mu\left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right) \equiv \nabla_\mu \nabla_\nu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\nabla_\mu j_\mu \equiv \frac{4\pi}{c}\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}.$$

Согласно (13.19), левая часть здесь равна нулю как полная свертка симметричного тензора $\nabla_\mu \nabla_\nu$ с антисимметричным тензором $F_{\mu\nu}$, и потому

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} \equiv Div\ J = 0 .$$

Но это есть не что иное, как уравнение непрерывности (2.19), записанное в ковариантной форме (14.2) и выражающее закон сохранения электрического заряда.

Дополнение к §17*

Первая пара уравнений Максвелла (17.1) записывается как

$$Div\ F = \frac{4\pi}{c} J . \tag{17.2}$$

В столь же компактной форме можно представить и вторую пару уравнений(17.1). А именно, если ввести псевдотензор $\tilde{F}$, дуальный к F, т.е.

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho} , \tag{17.3}$$

то, как нетрудно проверить, эта пара уравнений запишется как

$$Div\ \tilde{F} = 0 . \tag{17.4}$$

Еще более элегантную формулировку уравнения Максвелла (17.1) допускают в формализме дифференциальной геометрии:

$$\delta F = \frac{4\pi}{c} J, \qquad dF = 0 . \tag{17.5}$$

Мы не будем объяснять смысл символов δ и d, ибо это увело бы нас слишком далеко в сторону[1].

§18. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

Сформулируем теперь в ковариантном виде уравнение движения (5.1) релятивистской частицы в заданном электромагнитном поле. Основным уравнением релятивистской динамики является уравнение Минковского

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \mathcal{F} , \tag{18.1}$$

---

[1] См. по этому поводу: Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М.: Наука, 1979, §25.

где $\mathcal{P}$ – 4-импульс (13.4), $d\tau$ – элемент собственного времени (13.9), а $\mathcal{F}$ – сила Минковского, вид которой нам и предстоит установить.

Как и сила Лоренца, она должна выражаться через трехмерные векторы $\vec{v}$, $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Обычная скорость $\vec{v}$ входит в 4-скорость U, определяемую формулой (13.13), а 3-векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ комбинируются в 4-тензор электромагнитного поля F, задаваемый матрицей (16.5). Именно из этих величин и должна строиться сила Минковского $\mathcal{F}$, являющаяся 4-вектором. Но из 4-вектора U и 4-тензора F можно образовать единственный (с точностью до множителя) линейный по ним 4-вектор $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}_\mu = \alpha F_{\mu\nu} U_\nu .$$

При этом сопоставление $\mathcal{F}$ с обычной силой Лоренца $\vec{F}$ подсказывает нам, что, по-видимому, $\alpha = q/c$. В итоге приходим к гипотезе, что уравнение Минковского, описывающее движение заряженной релятивистской частицы в заданном электромагнитном поле, имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} U_\nu} . \tag{18.2}$$

Распишем его по компонентам, используя формулы (13.4), (13.9), (13.13) и (16.5). При $\mu = 1$ уравнение (18.2) дает

$$\frac{dp_1}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dp_x}{dt} = \frac{q}{c}\left(F_{11}U_1 + F_{12}U_2 + F_{13}U_3 + F_{14}U_4\right) =$$
$$= \frac{q}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left\{B_z v_y - B_y v_z + \left(-iE_x\right)\left(ic\right)\right\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{q}{c} \left\{\left[\vec{v}, \vec{B}\right] + c\vec{E}\right\}_x .$$

Совершенно аналогичные результаты получаются при $\mu = 2$ и $\mu = 3$, и в итоге мы приходим к уравнению (5.1)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right]\right\} .$$

При $\mu = 4$ из уравнения (18.2) имеем

$$\frac{dp_4}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\left(i\dfrac{\varepsilon}{c}\right)}{dt} = \frac{i}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{q}{c}\left(F_{41}U_1 + F_{42}U_2 + F_{43}U_3 + F_{44}U_4\right) =$$
$$= \frac{q}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(iE_x v_x + iE_y v_y + iE_z v_z\right) = \frac{i}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} q\left(\vec{v}, \vec{E}\right) ,$$

откуда приходим к уравнению (5.4)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = q\left(\vec{v}, \vec{E}\right).$$

Таким образом, релятивистски ковариантное уравнение (18.2) включает как уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле, так и закон изменения ее механической энергии.