

Глава IV. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

В предшествующих главах проанализированы основные понятия и положения классической электродинамики. Главным итогом анализа, существенно опиравшегося на эмпирический базис, явилось построение *конструкции* этой теории. Она представлена на с.8 в табл. 3, к которой читателю настоятельно рекомендуется вернуться еще раз и тщательно продумать ее общую структуру и отдельные компоненты.

Следующий этап в изучении электродинамики (и в теории познания вообще) – это процесс восхождения от абстрактного к конкретному, т.е. получение конкретных следствий из ее общих положений, включая воспроизведение эмпирического базиса, и исследование наиболее важных частных случаев электромагнитных полей. Рассмотрение естественно начинать с самого простого из них, когда поле создается системой неподвижных заряженных частиц. Обсуждению этого случая и посвящена данная глава.

§19. Уравнения электростатики в вакууме

Итак, ближайший предмет нашего исследования – электромагнитное поле системы неподвижных заряженных частиц. В этом случае все производные по времени обращаются в нуль ($\partial f / \partial t = 0$) и электрические токи отсутствуют ($\vec{j} = 0$). Поэтому уравнения Максвелла (8.1) сводятся к двум независимым системам уравнений отдельно для электрического и магнитного полей:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = 0 \end{array} \right\}. \quad (19.1)$$

Вторая пара уравнений в принципе может иметь нетривиальные решения: например, однородное поле $\vec{B} = \text{const}$, заполняющее все пространство. Но такие поля не имеют никакого отношения к покоящимся зарядам, а порождаются какими-то дополнительными «бесконечно удаленными» источниками. И если ко второй паре уравнений присоединить естественное граничное условие ($\vec{B} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$), то в силу теоремы единственности она будет обладать лишь тривиальным решением $\vec{B} = 0$. Поэтому магнитное поле здесь можно не рассматривать.

Основной интерес в данном случае представляет электрическое поле \vec{E} , которое по понятным причинам называется *электростатическим*. Как явствует из (19.1), оно подчиняется следующим уравнениям:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0}. \quad (19.2)$$

Как уже отмечалось в §7, первое уравнение свидетельствует о существовании источников электростатического поля, каковыми являются электрические заряды. Второе уравнение говорит о том, что всякое электростатическое поле является потенциальным (подробнее см. §20).

В интегральной форме уравнения (19.2) записываются как

$$\boxed{\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi q_V, \quad \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0}. \quad (19.3)$$

Эти уравнения вытекают из (8.5), если положить там все производные по времени и токи равными нулю. Впрочем, гораздо проще их получить прямо из (19.2). Первое уравнение (19.3) именуется *теоремой Гаусса*. Как известно из курса общей физики (см. также §22), она широко используется для расчета электростатических полей в симметричных случаях. Второе уравнение (19.3) равнозначно потенциальности электростатического поля и выражает тот общеизвестный факт, что работа электростатических сил по любому замкнутому контуру равна нулю.

Вернемся к дифференциальным уравнениям (19.2). Сами по себе они имеют бесконечно много решений, но с физической точки зрения требуется, чтобы при заданном распределении зарядов электростатическое поле было строго определенным. Чтобы выделить единственное решение уравнений (19.2), к ним нужно добавить *граничные условия*.

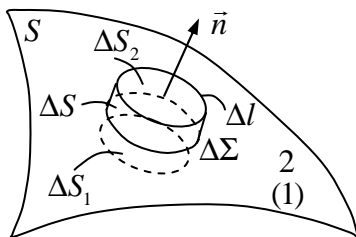
Если плотность заряда $\rho = \rho(\vec{r})$ есть непрерывная функция координат, то в вакууме имеется лишь одна выделенная поверхность – бесконечно удаленная. В этом случае задается *естественное* граничное условие, фиксирующее поведение поля \vec{E} на бесконечности. Его накладывают, когда распределение зарядов финитно. По крайней мере необходимо, чтобы функция ρ достаточно быстро (быстрее, чем $\frac{1}{r}$) убывала с ростом расстояния. При этом требуется, чтобы поле \vec{E} убывало на бесконечности не медленнее кулонова поля:

$$|\vec{E}(\vec{r})| < \frac{A}{r^2} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (19.4)$$

где A – некоторая положительная постоянная.

Дополнительные граничные условия следует задавать на тех поверхностях, на которых объемная плотность заряда ρ обладает особенностями: терпит скачок (пример – поверхность равномерно заряженного шара) или обращается в бесконечность (пример – равномерно заряженная сфера). Как уже говорилось в §8, подобные граничные условия получаются из уравнений Максвелла в интегральной форме (8.5), в данном случае – из уравнений (19.3).

Запишем первое из этих уравнений для небольшого цилиндра, пересекающего выделенную поверхность S и имеющего образующие, перпендикулярные этой поверхности, а основания – параллельные ей (см. рисунок):



$$\begin{aligned} \oint (\vec{E}, d\vec{S}) &= \int_{\Delta S_2} E_n dS - \int_{\Delta S_1} E_n dS + \int_{\Delta \Sigma} E_\tau dS = \\ &= 4\pi q_{\Delta V} = 4\pi \int_{\Delta S} \sigma dS + 4\pi \int_{\Delta V} \tilde{\rho} dV. \end{aligned}$$

Здесь E_n – нормальные компоненты поля, E_τ – его тангенциальные компоненты, $\tilde{\rho}$ – регулярная часть объемной плотности заряда, σ – поверхностная плотность заряда. Если $\sigma \neq 0$, то на поверхности S полная плотность заряда ρ как раз обращается в бесконечность. Учитывая малость рассматриваемого цилиндра, получим

$$E_{n2} \Delta S - E_{n1} \Delta S + E_\tau \Delta l \Delta h = 4\pi\sigma \Delta S + 4\pi\tilde{\rho} \Delta S \Delta h,$$

откуда

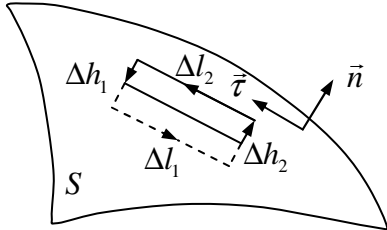
$$E_{n2} - E_{n1} + E_\tau \frac{\Delta l \Delta h}{\Delta S} = 4\pi\sigma + 4\pi\tilde{\rho} \Delta h.$$

Устремляя высоту цилиндра Δh к нулю, приходим к искомому условию:

$$\boxed{E_{n2} - E_{n1} = 4\pi\sigma}. \quad (19.5)$$

Оно показывает, что при наличии поверхностных зарядов нормальный компонент электростатического поля терпит скачок.

Запишем теперь второе уравнение (19.3) для небольшого прямоугольника, пересекающего выделенную поверхность S и имеющего две стороны, перпендикулярные этой поверхности, а две другие – параллельные ей (см. рисунок):



$$0 = \oint (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{\Delta l_2} E_\tau dl - \int_{\Delta l_1} E_n dl - \int_{\Delta l_1} E_\tau dl + \int_{\Delta l_2} E_n dl.$$

Учитывая малость рассматриваемого прямоугольника, получим

$$E_{\tau 2} \Delta l - E_{n1} \Delta h - E_{\tau 1} \Delta l + E_{n2} \Delta h = 0,$$

откуда

$$E_{\tau 2} - E_{\tau 1} = (E_{n1} - E_{n2}) \frac{\Delta h}{\Delta l}.$$

Устремляя длину боковой стороны Δh к нулю, приходим к условию

$$\boxed{E_{\tau 2} = E_{\tau 1}}. \quad (19.6)$$

Оно показывает, что тангенциальный компонент электростатического поля всегда непрерывен.

При использовании криволинейных, например сферических, координат приходится фиксировать поведение поля также в начале координат (см. с. 53). Если в окрестности этой точки ρ есть ограниченная функция, то требуется, чтобы ограниченным было и поле:

$$|\vec{E}(0)| < \infty. \quad (19.7)$$

Иногда особого рассмотрения требует и поведение поля вблизи изолированных точечных зарядов. Гак, если в начале координат находится частица с зарядом q_0 , то это поведение фиксирует теорема Гаусса

$$\oint_{C_R} (\vec{E}, d\vec{S}) \equiv \oint_{C_R} E_n dS = 4\pi q_0, \quad (19.8)$$

где C_R сфера малого радиуса R с центром в точке $\vec{r} = 0$.

Выше в качестве переменной состояния электростатического поля выступал вектор напряженности \vec{E} . Но, как мы знаем из §10, возможен и другой способ описания состояний поля, более «экономный». В рассматриваемом случае перейти к нему позволяет второе

уравнение (19.2) $\text{rot } \vec{E} = 0$. Оно говорит о том, что всякое электростатическое поле является *потенциальным*: существует такое скалярное поле $\varphi = \varphi(\vec{r})$, что

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad } \varphi}. \quad (19.9)$$

Функция φ называется *электростатическим потенциалом*. Он и выступает в качестве другой возможной переменной состояния электростатического поля. Заметим, что соотношение (19.9) является, очевидно, частным случаем формул (10.3) при $\vec{A} = 0$.

Потенциал φ определяется равенством (19.9) неоднозначно. К нему можно добавить любую функцию ψ , для которой $\text{grad } \psi = 0$. Но последнее условие эквивалентно равенствам $\partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial y = \partial\psi/\partial z = 0$, откуда $\psi = \text{const}$. Таким образом, произвол в определении потенциала φ на самом деле не так уж велик. К нему можно добавлять разве лишь постоянную, и общее калибровочное преобразование (10.6) сводится в данном случае к замене

$$\varphi \mapsto \varphi' = \varphi + C. \quad (19.10)$$

Часто (но не всегда – см. §20) постоянную C можно выбрать так, что

$$\varphi(\vec{r}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (19.11)$$

Подобная нормировке потенциала, если она возможна, всюду ниже и будет использоваться.

Оставляя обсуждение физического смысла потенциала и родственных проблем до следующего параграфа, рассмотрим постановку математической задачи, решение которой позволяет найти величину φ . Уравнение для потенциала получается подстановкой выражения (19.9) $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ в первое основное уравнение электростатики (19.2) $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$, что дает

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho}. \quad (19.11)$$

Таким образом, электростатический потенциал подчиняется *уравнению Пуассона*, а в тех областях пространства, где нет электрических зарядов ($\rho = 0$) – *уравнению Лапласа*

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}. \quad (19.12)$$

Граничные условия для потенциала φ вытекают из сформулированных выше граничных условий для поля \vec{E} . Если плотность заряда ρ – непрерывная функция, то достаточно задать естественное граничное условие. При финитном распределении зарядов (или при достаточно быстром убывании функции ρ с ростом расстояния) из (19.4) следует, что потенциал должен убывать на бесконечности не медленнее кулонова потенциала:

$$|\varphi(\vec{r})| < \frac{A}{r} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (19.13)$$

(A – положительная постоянная). Впрочем, это условие обычно бывает достаточным задавать в его ослабленной форме (19.11)

$$\varphi(\infty) = 0 . \quad (19.14)$$

На тех поверхностях, где объемная плотность заряда ρ обладает особенностями, нужно задавать дополнительные граничные условия. Для их вывода заметим, что из формулы $\vec{E} = -grad \varphi$ вытекают следующие выражения для тангенциального и нормального компонентов поля:

$$E_\tau = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \quad E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (19.15)$$

(справа стоят производные по соответствующим направлениям). Мы видим, что из условия (19.6) следует непрерывность тангенциальной производной потенциала, эквивалентная непрерывности самого потенциала:

$$\boxed{\varphi_1|_{sp} = \varphi_2|_{sp}} \quad (19.16)$$

в силу ограниченности \vec{E} на границе. Условие же (19.5) превращается теперь в равенство

$$\boxed{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma} . \quad (19.17)$$

Ограничение (19.7), накладываемое на поле при использовании криволинейных координат, теперь записывается как

$$|\varphi(0)| < \infty . \quad (19.18)$$

А поведение потенциала вблизи изолированной точечной частицы с зарядом q_0 покоящейся в начале координат, фиксируется требованием

$$\oint_{C_R} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = -4\pi q_0 . \quad (19.19)$$

Оно получается подстановкой в (19.8) выражения (19.15) для E_n при учете того, что для сферы направления нормали и радиуса совпадают.

Основные методы и примеры решения задач электростатики будут рассмотрены в §22.

§20. Электростатический потенциал

Обсудим подробнее основные свойства электростатического потенциала φ , который определяется соотношением (19.9)

$$\vec{E} = -grad \varphi \quad (20.1)$$

и выступает в качестве одной из возможных переменных состояния электростатического поля. Заметим, прежде всего, что если две независимые системы зарядов 1 и 2 создают поля \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , то для каждого из них можно записать $\vec{E}_i = -\text{grad } \varphi_i$ ($i = 1, 2$). В силу принципа суперпозиции полное поле \vec{E} получается сложением векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\text{grad } \varphi_1 - \text{grad } \varphi_2 = -\text{grad } (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Отсюда явствует, что

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \text{где } \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (20.2)$$

т.е. для потенциала также справедлив принцип суперпозиции.

Поверхности уровня скалярного поля $\varphi = \varphi(\vec{r})$, т.е. поверхности, на которых $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$, называются в рассматриваемом случае *эквипотенциальными* поверхностями. Если вспомнить свойства градиента скалярного поля, то из соотношения (20.1) можно будет сделать следующие заключения:

(а) поле \vec{E} в данной точке пространства перпендикулярно эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку;

(б) его модуль $|\vec{E}|$ равен максимальной скорости изменения потенциала в рассматриваемой точке и совпадает с модулем производной по направлению нормали к эквипотенциальной поверхности;

(в) вектор \vec{E} направлен в сторону убывания потенциала.

Итак, если задан потенциал φ , то по формуле (20.1) можно найти поле \vec{E} . Наоборот, по заданному полю \vec{E} можно определить практически однозначно (с точностью до аддитивной постоянной) потенциал φ . Обсудим эту проблему, а заодно выясним и важный физический смысл потенциала.

Сила, действующая на частицу с зарядом q со стороны электростатического поля, равна

$$\vec{F} = q\vec{E} = q \cdot (-\text{grad } \varphi) = -\text{grad } (q\varphi). \quad (20.3)$$

Отсюда видно, что эта сила является потенциальной – в том смысле, который вкладывается в данное понятие в классической механике: существует такая скалярная функция $U = U(\vec{r})$, что

$$\vec{F} = -\text{grad } U. \quad (20.4)$$

Из сравнения (20.4) с (20.3) явствует, что *потенциальная энергия* U частицы в электростатическом поле равна

$$\boxed{U = q\varphi}. \quad (20.5)$$

Тем самым выясняется физический смысл потенциала. Это есть потенциальная энергия частицы с единичным зарядом, находящейся в электростатическом поле:

$$\varphi = \frac{U}{q}. \quad (20.6)$$

Именно так данное понятие вводится в школьном курсе физики¹⁾.

Для работы A_{12} , совершаемой электростатическими силами при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 поля, имеем

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{l}) = -\int_1^2 (\text{grad } U, d\vec{l}) = -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)] \equiv U_1 - U_2,$$

или, с учетом формулы (20.5),

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (20.7)$$

Получен общеизвестный результат: работа A_{12} не зависит от формы пути, а определяется лишь начальной и конечной точками. Она выражается через *разность потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$, или *напряжение*

$$V_{12} \equiv \varphi_1 - \varphi_2 \quad (20.8)$$

в этих точках. Если частица перемещается по замкнутому контуру, то начальная и конечная точки совпадают, и соответствующая работа равна нулю. Этот результат также общеизвестен и может служить одним из определений понятия потенциального поля.

Соотношение (20.7) позволяет выразить разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ через поле \vec{E} :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q} = \frac{1}{q} \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{l}) = \frac{1}{q} \int_1^2 (q\vec{E}, d\vec{l}),$$

т.е.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{l}). \quad (20.9)$$

Будем считать, что $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}$ – произвольная точка поля, а $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}_0$ – некоторая фиксированная точка, и, пользуясь произволом (19.10) в определении потенциала, положим $\varphi(\vec{r}_0) = 0$. Тогда из (20.9) получим

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} (\vec{E}, d\vec{l}). \quad (20.10)$$

В частности, естественное условие (19.11), обычно накладываемое на потенциал, равнозначно тому, что в качестве \vec{r}_0 выбирается бесконечно удаленная точка, и в этом случае (20.10) превращается в

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{E}, d\vec{l}). \quad (20.11)$$

¹⁾ Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, 1986, §49.

При подобном соглашении мы приходим еще к одной «школьной» трактовке понятия потенциала¹⁾: он равен работе электростатических сил по перемещению единичного заряда из данной точки поля в бесконечность.

Однако подобная трактовка не является универсальной. Рассмотрим в качестве примера однородное электростатическое поле $\vec{E} = const$. Из (20.9) для разности потенциалов имеем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) = \left(\vec{E}, \int_1^2 d\vec{l} \right) = (\vec{E}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

т.е.

$$V_{12} \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = (\vec{E}, \vec{r}_2) - (\vec{E}, \vec{r}_1). \quad (20.12)$$

Если ось z направлена по полю \vec{E} , то $(\vec{E}, \vec{r}) = Ez$ и

$$V_{12} \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = E(z_2 - z_1) \equiv Ed. \quad (20.13)$$

В итоге приходим к известной школьной формуле для напряжения однородного поля²⁾. Из (20.13) и (20.12) следует, что для такого поля

$$\varphi(\vec{r}) = -(\vec{E}, \vec{r}) + C = -Ez + C. \quad (20.13,a)$$

Аддитивную постоянную здесь уже не удастся определить из естественного условия (19.11), ибо при любом C модуль потенциала безгранично возрастает при $r \rightarrow \infty$. Эта постоянная может быть фиксирована дополнительным требованием, чтобы в какой-то точке (например, при $z = 0$) потенциал обращался в нуль.

Итак, мы установили, что существует два способа описания состояний электростатического поля – посредством векторной функции $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ и посредством скалярной функции $\varphi = \varphi(\vec{r})$. При этом оба способа описания полностью эквивалентны: от одного из них можно перейти к другому, и наоборот. С физической точки зрения в качестве первичного следует рассматривать задание состояний электростатического поля с помощью вектора напряженности \vec{E} , являющегося силовой характеристикой поля (см. §3, 8). В такой ситуации может возникнуть вопрос: а нужно ли вообще вводить понятие электростатического потенциала? Ответ на него однозначен: нужно, ибо это понятие чрезвычайно полезно в практическом плане и очень важно в методологическом отношении.

(а) Экспериментально потенциал φ измеряется гораздо проще, чем напряженность поля \vec{E} .

(б) Теоретически из основных уравнений электростатики скалярная функция $\varphi = \varphi(\vec{r})$ находится обычно много проще, чем векторная функция $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$.

(в) Потенциал является энергетической характеристикой электростатического поля, а понятие энергии в современной физике неизмеримо более фундаментально, чем понятие силы. Так, первое полностью сохраняет свой статус и в микромире, тогда как понятие силы здесь практически теряет смысл.

¹⁾ Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, 1986, §50.

²⁾ Там же, §51.

Другие достоинства скалярного потенциала φ (и векторного потенциала \vec{A}) будут выявляться по ходу последующего изложения.

§21. Теорема Ирншоу

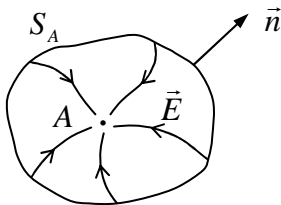
Пусть имеется система заряженных частиц, и пусть между ними действуют только электростатические силы. Поставим вопрос, может ли такая система находиться в *равновесии*. Ответ на этот вопрос, вообще говоря, утвердительный, и условие равновесия очевидно. Если выделить произвольную частицу системы, расположенную в точке A и имеющую заряд q_A , то при равновесии сила \vec{F}_A , действующая на нее со стороны всех прочих частиц системы, должна равняться нулю. Поскольку $\vec{F}_A = q_A \vec{E}$, то это означает, что в точке A должно обращаться в нуль поле \vec{E} , создаваемое этими частицами. Подчеркнем, что сама выделенная частица вклад в это поле \vec{E} не дает. Пример подобной системы построить очень просто: достаточно расположить надлежащим образом на одной прямой положительный заряд и два одинаковых отрицательных заряда.

Но здесь возникает следующий вопрос: будет ли такое равновесие *устойчивым*? Ответ на него в самой общей ситуации дает *теорема Ирншоу*:

одни только электростатические силы не могут обеспечить устойчивое равновесие системы заряженных частиц.

Докажем это утверждение несколькими способами, которые, конечно, по сути дела эквивалентны.

1. Допустим, что система находится в устойчивом равновесии, и выделим произвольную ее частицу, находящуюся в точке A (см. выше), считая для определенности $q_A > 0$. При ее небольших смещениях из этой точки должны возникать "возвращающие"



силы, действующие со стороны всех прочих частиц системы. Поэтому вблизи точки A поле \vec{E} , создаваемое этими частицами, должно быть направлено к A (см. рисунок). Значит, поток поля \vec{E} через малую поверхность S_A , внутри которой находится только заряд q_A , будет строго отрицательным. С другой стороны, по теореме Гаусса этот поток должен равняться нулю, так как все заряды, создающие рассматриваемое поле, расположены вне

поверхности S_A . Полученное противоречие и доказывает теорему Ирншоу.

2. Если система находится в устойчивом равновесии, то потенциальная энергия любой выделенной частицы в поле остальных должна быть минимальной. Поскольку $U_A = q_A \varphi$, причем мы считаем $q_A > 0$, то это означает, что потенциал φ указанного поля должен в точке A достигать минимума. Но тогда он будет возрастать по всем направлениям, и точку A можно окружить такой малой поверхностью S_A , на которой везде $\partial \varphi / \partial n > 0$, и потому

$$\oint_{S_A} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS > 0. \quad (21.1)$$

С другой стороны, применяя теорему Гаусса – Остроградского, получим

$$\oint_{S_A} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \oint_{S_A} (\text{grad } \varphi, d\vec{S}) = \int_{V_A} \text{div}(\text{grad } \varphi) dV = \int_{V_A} \nabla^2 \varphi dV. \quad (21.2)$$

Так как φ – это потенциал поля, создаваемого всеми зарядами кроме q_a , то в окрестности V_A точки A он удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi=0$. Поэтому, в противоречии с (21.1), интеграл в (21.2) равен нулю, чем и доказывается теорема Ирншоу.

3. Исходим из того, что если система находится в устойчивом равновесии, то потенциал φ поля, создаваемого всеми зарядами, кроме q_A , должен иметь минимум в точке A . Для этого необходимо, чтобы все его первые производные в этой точке обращались в нуль, а вторые производные $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ были строго положительными. Но последнее условие не может выполняться, ибо $\nabla^2\varphi=0$, а потому сумма указанных производных тоже равна нулю. Таким образом, устойчивое равновесие системы невозможно, что и утверждает теорема Ирншоу.

Мы не будем обсуждать следствия теоремы Ирншоу касательно структуры и устойчивости вещества, поскольку соответствующие проблемы вообще не могут быть решены в рамках классической физики.

§22. Методы решения задач электростатики

Основная задача электростатики состоит в том, чтобы по заданному распределению зарядов найти создаваемое ими электростатическое поле. Иногда встречается и обратная задача электростатики – восстановление распределения зарядов по создаваемому ими полю. Эта задача решается весьма просто. Если поле \vec{E} непрерывно (и дифференцируемо) во всех точках пространства, то оно порождается объемным зарядом. Его плотность ρ находится из первого уравнения (19.2):

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}), \quad (22.1)$$

если задано само поле \vec{E} , или из уравнения Пуассона (19.11):

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2\varphi(\vec{r}), \quad (22.2)$$

если задан электростатический потенциал φ . Когда на какой-то поверхности поле \vec{E} терпит скачок, это соответствует наличию поверхностных зарядов, плотность σ которых находится из условия (19.5), если задано \vec{E} , или из условия (19.17), если задано φ .

К решению основной задачи электростатики имеется два подхода: (а) ищется поле $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, а затем по формуле вида (20.10) определяется потенциал $\varphi = \varphi(\vec{r})$; (б) ищется потенциал φ , а затем по формуле (20.1) определяется поле \vec{E} . Рассмотрим сначала первый из этих подходов.

Общая математическая постановка задачи об отыскании электростатического поля \vec{E} , создаваемого заданным распределением электрических зарядов, сформулирована в первой части §19. Она предполагает решение дифференциальных уравнений (19.2), дополненных необходимыми граничными условиями (19.4) – (19.8). Однако все основные результаты можно получить, практически не обращаясь к теории дифференциальных уравнений. Достаточно воспользоваться естественными физическими соображениями, теоремой Гаусса и принципом суперпозиции.

Найдем сначала поле \vec{E}_0 частицы с зарядом q_0 , покоящейся в начале координат $\vec{r}_0 = 0$. В силу очевидной сферической симметрии задачи это поле в произвольной точке \vec{r} зависит

только от ее расстояния до частицы, причем силовыми линиями являются прямые, проходящие через начало координат. Поэтому можно записать

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = E_0(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (22.3)$$

Применим для вычисления этого поля теорему Гаусса, выбрав в качестве поверхности интегрирования в первом уравнении (19.3) сферу C_r радиуса r с центром в начале координат:

$$\oint_{C_r} (\vec{E}_0, d\vec{S}) = \oint_{C_r} \left(E_0(r) \frac{\vec{r}}{r}, \frac{\vec{r}}{r} dS \right) = \oint_{C_r} E_0(r) dS = E_0(r) \oint_{C_r} dS = E_0(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q_0.$$

Здесь учтено, что для сферы $\vec{n} = \vec{r}/r$ и что на ее поверхности функция $E_0(r)$ постоянна. Таким образом, $E_0(r) = q_0/r^2$, и потому

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{q_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (22.4)$$

Если поместить в точку \vec{r} заряд q , то на него со стороны заряда q_0 будет действовать сила

$$\vec{F}_q = q\vec{E}_0 = \frac{qq_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (22.5)$$

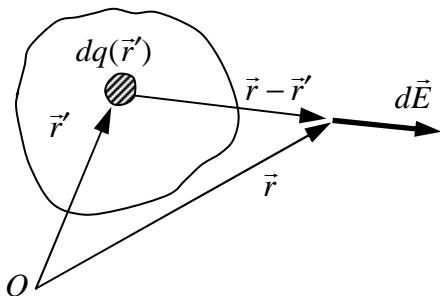
и мы возвращаемся к закону Кулона (6.6).

Если заряд равен q_a и покоится в точке \vec{r}_a , то его поле \vec{E}_a получим, совершая в (22.4) очевидные замены $q_0 \mapsto q_a$ и $\vec{r} \mapsto \vec{r} - \vec{r}_a$:

$$\vec{E}_a(\vec{r}) = \frac{q_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}. \quad (22.6)$$

Когда поле создается не одной, а несколькими частицами, применяя принцип суперпозиции, т.е. используя свойство линейности уравнений (19.2), будем иметь

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}. \quad (22.7)$$



Рассмотрим теперь случай, когда заряды непрерывно распределены в некоторой пространственной области. Возьмем произвольную точку \vec{r}' этой области и ее малую окрестность, содержащую заряд $dq(\vec{r}')$ (см. рисунок). Для создаваемого этим зарядом поля справедлива формула вида (22.6):

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

В силу принципа суперпозиции полное поле \vec{E} получится интегрированием по всей области, где имеются заряды:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}. \quad (22.8)$$

Эта формула является самой общей и справедлива для любого распределения зарядов. Если они занимают некоторый объем V , то $dq = \rho dV$, и из (22.8) получаем

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (22.9)$$

Если заряды распределены по поверхности, то $dq = \sigma dS$, и мы имеем

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'. \quad (22.10)$$

Наконец, в случае линейного распределения заряда $dq = \varkappa dl$, и

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_L \frac{\varkappa(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl'. \quad (22.11)$$

Формулы (22.8)–(22.11) полностью решают основную задачу электростатики об отыскании поля $\vec{E}(\vec{r})$ по заданному распределению электрических зарядов. Однако на практике вычисление соответствующих интегралов оказывается довольно трудоемким делом. Достаточно вспомнить хотя бы задачу об электростатическом поле шара (сферы) радиуса R , по объему (поверхности) которого равномерно распределен заряд q . В подобных случаях оказываются полезными другие методы нахождения полей.

Один из них уже упоминался в §19. Это непосредственное применение теоремы Гаусса, которая в симметричных случаях позволяет весьма просто получить необходимые результаты без вычисления интегралов. Так, в упомянутых задачах о полях шара и сферы из соображений симметрии следует, что они имеют общую структуру (22.3). Последующее использование теоремы Гаусса сразу дает¹⁾: для шара

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{R^2} \frac{\vec{r}}{R}, & r < R \\ \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, & r > R \end{cases}; \quad (22.12)$$

для сферы

¹⁾ См., например: Сивухин Д.В. Общий курс физики, т. III. Электричество. – М.: Наука, 1977, §6.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, & r > R \end{cases}. \quad (22.13)$$

Читателю предлагается в качестве полезного самостоятельного упражнения решить соответствующие обратные задачи: найти распределения зарядов, порождающих поля (22.12) и (22.13). Ответы здесь, разумеется, известны, но их весьма поучительно получить с помощью общих соотношений (22.1) и (19.5).

Итак, мы научились по заданному распределению зарядов находить поле $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$. Зная его, легко определить и электростатический потенциал $\varphi = \varphi(\vec{r})$. Так, если частица с зарядом q_0 покоится в начале координат, то ее поле \vec{E}_0 задается формулой (22.4), и из (20.11) для потенциала φ_0 будем иметь

$$\varphi_0(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{E}_0, d\vec{l}) = q_0 \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(\frac{\vec{r}}{r^3}, d\vec{r} \right) = q_0 \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2},$$

где учтено, что $d\vec{l} = d\vec{r}$ и $(\vec{r}, d\vec{r}) = r dr$. Таким образом, приходим к следующей формуле для потенциала точечного заряда:

$$\varphi_0(\vec{r}) = \frac{q_0}{r}. \quad (22.14)$$

Однако во многих случаях практически более целесообразным оказывается второй из подходов к решению основной задачи электростатики, упоминавшихся в начале данного параграфа. Его суть состоит в том, что сначала ищется потенциал φ , а затем по формуле (20.1) восстанавливается поле \vec{E} . Обсудим этот подход подробнее. Он основывается на решении уравнения Пуассона (19.11) или уравнения Лапласа (19.12), дополненных необходимыми граничными условиями (19.14) и (19.16) – (19.19).

Вновь начнем с простейшего случая – с поля частицы с зарядом q_0 , которая покоится в начале координат. Уравнение Пуассона имеет вид

$$\nabla^2 \varphi_0 = -4\pi\rho_0 = -4\pi q_0 \delta(\vec{r}). \quad (22.15)$$

Во всех точках, кроме начала координат, $\rho_0 = 0$, и поэтому при $\vec{r} \neq 0$ оно превращается в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0. \quad (22.16)$$

Запишем его в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \varphi_0(\vec{r})}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \nabla_{\Omega}^2 \varphi_0(\vec{r}) = 0, \quad (22.17)$$

где ∇_{Ω}^2 – угловая часть оператора Лапласа, явный вид которой нам не потребуется. В силу очевидной сферической симметрии задачи потенциал не зависит от углов, т.е. $\varphi_0 = \varphi_0(r)$, и потому (22.17) дает

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{\partial \varphi_0(r)}{\partial r} \right] = 0. \quad (22.18)$$

Общее решение этого уравнения находится сразу:

$$\varphi_0(r) = \frac{C}{r} + C_1, \quad (22.19)$$

а постоянные интегрирования определяются из граничных условий.

Из естественного условия (19.14) следует, что $C_1 = 0$. Постоянную C находим из граничного условия (19.19):

$$\oint_{C_R} \frac{d\varphi_0}{dr} dS = -C \oint_{C_R} \frac{1}{r^2} dS = -C \oint d\Omega = -4\pi C = -4\pi q_0,$$

откуда $C = q_0$. В итоге приходим к известной уже формуле (22.14)

$$\boxed{\varphi_0(\vec{r}) = \frac{q_0}{r}}. \quad (22.20)$$

Для поля \vec{E}_0 отсюда имеем

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = -\text{grad} \varphi_0(r) = -\frac{d\varphi_0(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

и мы возвращаемся к его выражению (22.4), а значит, и к закону Кулона.

Заметим, что постоянную C в (22.19) можно найти несколько иначе, воспользовавшись уравнением Пуассона (22.15) и соотношением

$$\boxed{\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r})}. \quad (22.21)$$

Последнее легко получить, если вспомнить равенство (7.4):

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \equiv \text{div} \left\{ \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} = \text{div} \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}).$$

Подставляя теперь (22.19) в (22.15), с помощью (22.21) будем иметь

$$\nabla^2 \left(\frac{C}{r} + C_1 \right) = C \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi C \delta(\vec{r}) = -4\pi q_0 \delta(\vec{r}),$$

откуда вновь $C = q_0$.

Выражения для электростатического потенциала в достаточно общей ситуации получим из (22.20), используя те же соображения, которые применялись при выводе формул (22.7) – (22.11) из (22.4). Если поле создается несколькими заряженными частицами, то

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}, \quad (22.22)$$

а в случае непрерывного распределения зарядов

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (22.23)$$

Так, для объемного распределения зарядов

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (22.24)$$

для поверхностного распределения

$$\varphi(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS', \quad (22.25)$$

для линейного распределения

$$\varphi(\vec{r}) = \int_L \frac{\chi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl'. \quad (22.26)$$

Заметим, что выражение (22.22) для потенциала поля системы точечных зарядов можно получить из формулы (22.24), полагая в ней, в соответствии с первым соотношением (2.12),

$$\rho(\vec{r}) = \sum_a q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \quad (22.27)$$

Действительно, подстановка этого выражения в (22.24) дает

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \sum_a q_a \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \sum_a \frac{q_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|},$$

где использовано основное свойство 3-мерной δ -функции

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r} - \vec{a}) f(\vec{r}) dV = f(\vec{a}). \quad (22.28)$$

Аналогичным способом из (22.24) можно получить и выражения (22.25) и (22.26), но мы на этой проблеме не останавливаемся.

Таким образом, выражение (22.24) для электростатического потенциала носит весьма общий характер. При надлежащей трактовке функции ρ оно охватывает не только случай объемного распределения зарядов, но и случаи дискретного, поверхностного и даже линейного их распределения. В этой связи уместно остановиться на данном выражении подробнее.

Покажем, что потенциал φ , задаваемый формулой (22.24), удовлетворяет уравнению Пуассона (19.11). Используя соотношение типа (22.21)

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (22.29)$$

четность δ -функции и ее основное свойство (22.28), будем иметь

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) &= \nabla^2 \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \int \rho(\vec{r}') \nabla_{\vec{r}}^2 \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV' = \\ &= \int \rho(\vec{r}') \{-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\} dV' = -4\pi \int \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}) dV' = -4\pi\rho(\vec{r}), \end{aligned}$$

что и требовалось установить. Найдем теперь поле \vec{E} , соответствующее потенциалу (22.24). Применяя формулу векторного анализа

$$\text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (22.30)$$

получим

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\text{grad}\varphi(\vec{r}) = -\text{grad} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = -\int \rho(\vec{r}') \text{grad}_{\vec{r}} \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV' = \\ &= -\int \rho(\vec{r}') \left\{ -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dV' = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \end{aligned}$$

В итоге мы возвращаемся к выражению (22.9) для электростатического поля \vec{E} , которое имеет столь же общий характер, как и формула (22.24) для потенциала φ . Оно также справедливо для самых различных распределений электрического заряда.

По поводу практического использования приведенных общих формул для потенциала φ можно высказать те же замечания, что и по поводу общих формул для поля \vec{E} . Вычисление соответствующих интегралов зачастую бывает весьма трудоемким делом. Ситуация здесь усугубляется еще тем, что иногда эти интегралы оказываются расходящимися. Это происходит, когда распределение заряда инфинитно, причем его плотность ρ убывает при $r \rightarrow \infty$ относительно медленно – не быстрее, чем $1/r^2$. Примером может служить задача о нахождении поля бесконечного цилиндра, равномерно заряженного по объему. В ней интеграл (22.24) логарифмически расходится.

Во всех подобных случаях целесообразнее обращаться к непосредственному решению уравнения для потенциала, дополненного надлежащими граничными условиями. Рассмотрим в целях иллюстрации этой процедуры два простых примера, которые нам уже встречались.

1. Найдем электростатическое поле шара радиуса R с зарядом q , равномерно распределенным по объему. Уравнение Пуассона записывается как

$$\nabla^2 \varphi = \begin{cases} -4\pi\rho, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}, \quad (22.31)$$

где

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{3}{4\pi} \frac{q}{R^3} = \text{const}. \quad (22.32)$$

К нему нужно добавить граничные условия (19.18), (19.14), (19.16) и (19.17), которые в данном случае имеют вид

$$|\varphi_1(0)| < \infty, \quad \varphi_2(\infty) = 0; \quad \varphi_1|_{r=R} = \varphi_2|_{r=R}, \quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad (22.33)$$

где мы учли, что $\sigma = 0$, и положили $\varphi = \varphi_1$ при $r < R$ и $\varphi = \varphi_2$ при $r > R$.

В силу очевидной симметрии задачи $\varphi = \varphi(r)$, и потому естественно выбрать сферические координаты, в которых (22.31) запишется как

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} \right] = \begin{cases} -4\pi\rho, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}. \quad (22.34)$$

Общее решение этого уравнения находится простыми интегрированиями:

$$\varphi(r) \equiv \begin{cases} \varphi_1(r), & r < R \\ \varphi_2(r), & r > R \end{cases} = \begin{cases} -\frac{2\pi}{3} \rho r^2 + \frac{A}{r} + B, & r < R \\ \frac{C}{r} + D, & r > R \end{cases}. \quad (22.35)$$

Из двух первых граничных условий (22.33) следует, что $A = 0$ и $D = 0$, и если учесть к тому же равенство (22.32), будем иметь

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{q}{R} \frac{r^2}{R^2} + B, & r < R \\ \frac{C}{r}, & r > R \end{cases}. \quad (22.36)$$

Два последних граничных условия (22.33) приводят к системе уравнений

$$-\frac{1}{2} \frac{q}{R} + B = \frac{C}{R}, \quad -\frac{q}{R^2} = -\frac{C}{R^2},$$

из которой

$$C = q, \quad B = \frac{3}{2} \frac{q}{R}.$$

Подставляя эти величины в (22.36), окончательно найдем

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right), & r < R \\ \frac{q}{r}, & r > R \end{cases}. \quad (22.37)$$

Для напряженности поля $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ получим отсюда уже известное выражение (22.12).

2. Найдем электростатическое поле сферы радиуса R , по поверхности которой равномерно распределен заряд q . Поскольку $\rho=0$ как при $r < R$, так и при $r > R$, то во внутренней и во внешней областях потенциал подчиняется уравнению Лапласа. Учитывая, что в силу симметрии задачи $\varphi = \varphi(r)$, записываем его в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} \right] = \begin{cases} 0, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (22.38)$$

и добавляем к нему граничные условия

$$|\varphi_1(0)| < \infty; \quad \varphi_2(\infty) = 0; \quad \varphi_1|_{r=R} = \varphi_2|_{r=R}; \quad \left. \frac{d\varphi_1}{dr} \right|_{r=R} - \left. \frac{d\varphi_2}{dr} \right|_{r=R} = 4\pi\sigma, \quad (22.39)$$

где

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi R^2}. \quad (22.40)$$

Общее решение уравнения (22.38) очевидно:

$$\varphi(r) \equiv \begin{cases} \varphi_1, r < R \\ \varphi_2, r > R \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{r} + B, & r < R \\ \frac{C}{r} + D, & r > R \end{cases}. \quad (22.41)$$

Из двух первых граничных условий (22.39) следует, что

$$A = 0, \quad D = 0. \quad (22.42)$$

Два последних условия (22.39) приводят к системе уравнений

$$B = \frac{C}{R}, \quad \frac{C}{R^2} = 4\pi\sigma,$$

из которой, учитывая (20.48), получаем

$$C = 4\pi R^2 \sigma = q, \quad B = \frac{q}{R}. \quad (22.43)$$

Подставляя (22.42) и (22.43) в (22.41), окончательно найдем

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{R}, & r < R \\ \frac{q}{r}, & r > R \end{cases}. \quad (22.44)$$

Отсюда для напряженности поля $\vec{E} = -grad \varphi$ придем к известному выражению (19.19).

Читателю предлагается в качестве полезного самостоятельного упражнения решить соответствующие обратные задачи: найти распределения зарядов, порождающих поля с

потенциалами (22.37) и (22.44). Это нетрудно сделать с помощью общих соотношений (22.2) и (19.17).

Дополнение к §22*

Получим общее выражение (22.24) для потенциала φ еще одним способом. Основная наша цель состоит в том, чтобы продемонстрировать на простом примере мощный метод, именуемый методом функций Грина, который широко применяется в современной математической физике и которым мы намерены воспользоваться в дальнейшем при выводе формулы для запаздывающих потенциалов.

Считаем, что объемная плотность заряда ρ есть финитная или достаточно быстро убывающая функция, и записываем решение уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \quad (22.45)$$

в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV', \quad (22.46)$$

где

$$\nabla_{\vec{r}}^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (22.47)$$

Функция G , подчиняющаяся уравнению (22.47), называется *функцией Грина* (функцией источника, фундаментальным решением) уравнения Пуассона. Ее физический смысл прозрачен. Это есть потенциал поля в точке \vec{r} , создаваемого единичным зарядом, который находится в точке \vec{r}' . Проверим, что (22.46) действительно является решением уравнения (22.45):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) &= \nabla^2 \int G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' = \int \{ \nabla_{\vec{r}}^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \} \rho(\vec{r}') dV' = \\ &= \int \{ -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \} \rho(\vec{r}') dV' = -4\pi \int \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}) dV' = -4\pi\rho(\vec{r}). \end{aligned}$$

Поскольку оператор Лапласа, правая часть уравнения (22.45) и естественное граничное условие, которое только и накладывается на решение, не меняются при замене $\vec{r} \mapsto \vec{r} - \vec{a}$, вся задача в целом обладает трансляционной симметрией. Это означает, в частности, что функция Грина G зависит на самом деле не от двух векторных аргументов \vec{r} и \vec{r}' по отдельности, а от их разности:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r} - \vec{r}') = G(\vec{R}), \quad \vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}', \quad (22.48)$$

так что уравнение (22.47) переписывается как

$$\nabla^2 G(\vec{R}) = -4\pi\delta(\vec{R}). \quad (22.49)$$

Разлагаем искомую функцию G и δ -функцию в интеграл Фурье:

$$G(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{G}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}, \vec{R})} d^3k \quad (22.50)$$

и

$$\delta(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{k}, \vec{R})} d^3k \quad (22.51)$$

и подставляем эти разложения в уравнение (22.49):

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{G}(\vec{k}) \left\{ \nabla_{\vec{R}}^2 e^{i(\vec{k}, \vec{R})} \right\} d^3k \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left\{ -k^2 \tilde{G}(\vec{k}) \right\} e^{i(\vec{k}, \vec{R})} d^3k = -4\pi \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{k}, \vec{R})} d^3k.$$

Из равенства фурье-оригиналов следует равенство фурье-образов, и потому

$$-k^2 \tilde{G}(\vec{k}) = -4\pi,$$

откуда для фурье-образа функции Грина получаем

$$\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{4\pi}{k^2}. \quad (22.52)$$

Сама она восстанавливается с помощью, формулы (22.50):

$$G(\vec{R}) = \frac{1}{2\pi^2} \int e^{i(\vec{k}, \vec{R})} \frac{d^3k}{k^2}. \quad (22.53)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, введем в трехмерном \vec{k} -пространстве сферические координаты k, θ, φ , направив ось k_3 по вектору \vec{R} . Учитывая, что при этом

$$d^3k = k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (\vec{k}, \vec{R}) = kR \cos \theta,$$

сведем тройной интеграл (22.53) к повторному, который легко вычисляется поэтапно

$$\begin{aligned} G(\vec{R}) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{ikR \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \int_0^\pi e^{ikR \cos \theta} d(\cos \theta) = \\ &= -\frac{1}{i\pi R} \int_0^\infty \frac{dk}{k} e^{ikR \cos \theta} \Big|_0^\pi = \frac{2}{(-2i)\pi R} \int_0^\infty (e^{-ikR} - e^{+ikR}) \frac{dk}{k} = \\ &= \frac{2}{\pi R} \int_0^\infty \frac{\sin kR}{k} dk \equiv \frac{2}{\pi R} \int_0^\infty \frac{\sin(kR)}{kR} d(kR). \end{aligned}$$

Последний интеграл равен, как известно, $\pi/2$, и мы получаем для функции Грина

$$G(\vec{R}) = \frac{1}{R},$$

или, вспоминая, что $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (22.54)$$

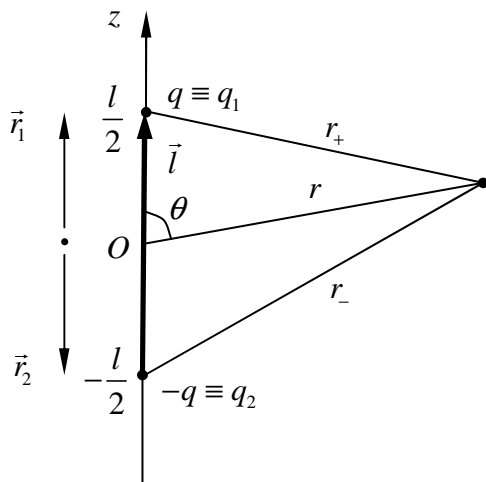
Подставляя это выражение в (22.46), приходим к известной формуле (22.24) для электростатического потенциала:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

§23. Электростатическое поле в дипольном приближении

Простейшей системой в электростатике является одна покоящаяся заряженная частица. Ее поле \vec{E} задается формулой (22.4), а потенциал φ этого поля – формулой (22.20). Рассмотрим следующую по сложности систему – электрический диполь, состоящий из двух частиц с зарядами q и $-q$, разделенных расстоянием l . С помощью принципа суперпозиции можно сразу записать потенциал поля диполя (обозначения пояснены на рисунке):

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} = \frac{q}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2\frac{l}{2}r \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2\frac{l}{2}r \cos \theta}}. \quad (23.1)$$



Как мы видим, уже в случае совсем простой системы зарядов выражение для потенциала оказывается весьма сложным и не обладает наглядностью.

Допустим, однако, что нас интересует поле на расстояниях r , больших по сравнению с размерами диполя l . Тогда в задаче возникает малый параметр $\varepsilon = l/r$, и функцию (23.1) можно разложить в ряд Тейлора, сохраняя лишь первые не исчезающие члены. Сразу пренебрегая квадратичными по l слагаемыми и вспоминая, что при $\varepsilon \ll 1$

$$(1 + \varepsilon)^\alpha \cong 1 + \alpha\varepsilon, \quad (23.2)$$

получим из (23.1), где $\alpha = -1/2$,

$$\begin{aligned} \varphi &\cong \frac{q}{\sqrt{r^2 - lr \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + lr \cos \theta}} = \frac{q}{r} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l}{r} \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{l}{r} \cos \theta}} \right\} \cong \\ &\cong \frac{q}{r} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} \frac{l}{r} \cos \theta\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{l}{r} \cos \theta\right) \right\} = \frac{q l}{r r} \cos \theta \cong \frac{q l \cdot r \cdot \cos \theta}{r^3}. \end{aligned}$$

Вводя вектор

$$\vec{d} = q\vec{l}, \quad (23.3)$$

придем к простой, хотя и приближенной формуле

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{(\vec{d}, \vec{r})}{r^3}, \quad (23.4)$$

тем более точной, чем лучше выполняется неравенство $r \gg l$.

Вектор (23.3) можно записать несколько иначе (см. рисунок):

$$\vec{d} = q\vec{l} = q\frac{\vec{l}}{2} + (-q)\left(-\frac{\vec{l}}{2}\right) \equiv q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2,$$

или

$$\vec{d} = \sum_{a=1}^2 q_a \vec{r}_a. \quad (23.5)$$

Покажем, что формула (23.4) с вектором \vec{d} вида (23.5) справедлива не только для простого диполя, но и в достаточно общей ситуации.

Пусть задано произвольное распределение зарядов, которые занимают ограниченную область пространства с диаметром l , и пусть требуется найти поле вдали от этих зарядов, т.е. при $r \gg l$ (считается, что начало координат помещено где-то внутри занимаемой ими области). Разумеется, данная задача допускает точное решение: потенциал искомого поля задается формулой (22.24) в случае непрерывного распределения зарядов или формулой (22.22) в случае их дискретного распределения. Будем рассматривать оба эти случая совместно, записывая

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \sum_a \frac{q_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}. \quad (23.6)$$

Но даже совсем простой пример диполя, рассмотренный выше, показал, что на практике точные выражения для потенциала приносят не столь уж много пользы. Гораздо более целесообразным оказывается приближенный анализ, основывающийся на разложении потенциала в ряд Тейлора

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \varphi_1(\vec{r}) + \varphi_2(\vec{r}) + \dots \quad (23.7)$$

по естественному малому параметру

$$\varepsilon = \frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|} = \frac{|\vec{r}_a|}{|\vec{r}|} \sim \frac{l}{r}. \quad (23.8)$$

В данном параграфе мы ограничимся рассмотрением лишь нулевого и первого членов разложения (23.7).

Для любой скалярной функции f , разложимой в ряд Тейлора,

$$f(\vec{r} - \vec{\rho}) \equiv f(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) = f(x, y, z) - \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \xi - \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \eta - \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \zeta + \dots,$$

т.е.

$$f(\vec{r} - \vec{\rho}) \equiv f(\vec{r}) - (\vec{\rho}, \vec{\nabla} f(\vec{r})). \quad (23.9)$$

Полагая $f = 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$, из (23.6) будем иметь

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &\equiv \varphi_0(\vec{r}) + \varphi_1(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dV' - \int \rho(\vec{r}') \left(\vec{r}', \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) dV' = \\ &= \sum_a \frac{q_a}{r} - \sum_a q_a \left(\vec{r}_a, \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right).\end{aligned}\quad (23.10)$$

Нулевой член этого разложения

$$\varphi_0(\vec{r}) = \frac{\int \rho(\vec{r}') dV'}{r} = \frac{\sum_a q_a}{r} \equiv \frac{Q}{r}\quad (23.11)$$

отвечает потенциалу поля, создаваемого точечной частицей, которая расположена в начале координат и несет весь заряд рассматриваемой системы

$$Q = \int \rho(\vec{r}') dV' = \sum_a q_a.\quad (23.12)$$

Если этот заряд отличен от нуля, то данным членом вполне можно и ограничиться, так как все прочие члены разложения будут играть всего лишь роль малых поправок к φ_0 .

Но если система в целом электрически нейтральна ($Q = 0$), то $\varphi_0 = 0$, и главным становится первый член разложения φ_1 (если он сам не равен нулю). Из (23.10) явствует, что в этом случае

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \varphi_1(\vec{r}) = - \left(\int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV', \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = - \left(\sum_a q_a \vec{r}_a, \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right),$$

т.е.

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{(\vec{d}, \vec{r})}{r^3}},\quad (23.13)$$

где

$$\boxed{\vec{d} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \sum_a q_a \vec{r}_a}\quad (23.14)$$

[сравн. с формулами (23.4) и (23.5)].

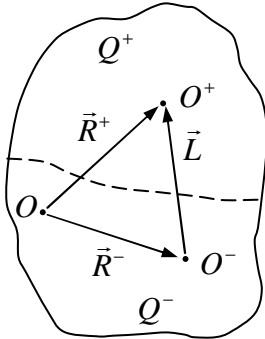
Вектор \vec{d} называется (электрическим) *дипольным моментом* системы. Обозначив через q_b^+ , q_c^- модули положительных и отрицательных зарядов, а через \vec{r}_b^+ и \vec{r}_c^- их радиусы-векторы, запишем

$$\vec{d} = \sum_a q_a \vec{r}_a = \sum_b q_b^+ \vec{r}_b^+ - \sum_c q_c^- \vec{r}_c^- = \left(\sum_b q_b^+ \right) \vec{R}^+ - \left(\sum_c q_c^- \right) \vec{R}^-,$$

где

$$\bar{R}^{\pm} = \frac{\sum q^{\pm} \bar{r}^{\pm}}{\sum q^{\pm}}$$

есть радиусы-векторы «центров» положительных и отрицательных зарядов (сравн. с определением центра масс). Если система в целом электрически нейтральна, то



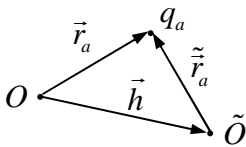
$$\sum_b q_b^+ \equiv Q^+ = \sum_c q_c^- \equiv Q^- \equiv Q,$$

и

$$\bar{d} = Q(\bar{R}^+ - \bar{R}^-) \equiv Q\bar{L}.$$

В итоге приходим к формуле вида (23.3) и к картинке, подобной той, которая изображена на с.112.

Сдвинем начало системы координат O на произвольный вектор \bar{h} . При этом дипольный момент системы, определяемый формулой (23.14), вообще говоря, изменится:



т.е.

$$\tilde{\bar{d}} \equiv \sum_a q_a \tilde{\bar{r}}_a = \sum_a q_a (\bar{r}_a - \bar{h}) = \sum_a q_a \bar{r}_a - \bar{h} \sum_a q_a,$$

$$\tilde{\bar{d}} = \bar{d} - Q\bar{h}, \quad (23.15)$$

где Q – полный заряд системы. Но если система частиц в целом электрически нейтральна, т.е. $Q = 0$, то вектор дипольного момента \bar{d} не будет зависеть от выбора начала системы координат:

$$\tilde{\bar{d}} = \bar{d}. \quad (23.16)$$

Этот результат достаточно важен, ибо он указывает на полную корректность определения дипольного момента как раз в тех случаях, когда обычно и применяется дипольное приближение (23.13) для электростатического поля.

Не менее важным является и следующее утверждение: если распределение заряда обладает центром симметрии, то дипольный момент этой системы равен нулю. Доказательство проведем, считая распределение заряда непрерывным и помещая начало системы координат в центр симметрии:

$$\bar{d} \equiv \int \bar{r} \rho(\bar{r}) dV = \int (-\bar{r}) \rho(-\bar{r}) dV = - \int \bar{r} \rho(\bar{r}) dV = -\bar{d},$$

откуда $\bar{d} = 0$. Здесь на первом этапе просто сделана замена переменных интегрирования $\bar{r} \mapsto -\bar{r}$, а на втором этапе учтено, что в силу предполагаемой симметрии задачи $\rho(-\bar{r}) = \rho(\bar{r})$.

Отмеченное обстоятельство играет фундаментальную роль в физике атомов, атомных ядер и элементарных частиц¹⁾. Так, из зеркальной симметрии пространства (точнее,

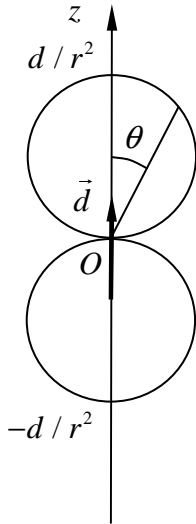
¹⁾ См., например: Наумов А.И. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – М.: Просвещение, 1984, §28.

электромагнитного взаимодействия) следует, что распределения электрического заряда в атомах и атомных ядрах должны обладать центрами симметрии, а поэтому у них не может быть дипольного момента. Мало того, из микроскопической обратимости времени вытекает, что дипольного момента не может быть и у элементарных частиц. В частности, это справедливо и для нейтрона. Дипольный момент последнего записывают в виде $d_n = e l_n$ (e – элементарный заряд), причем экспериментальные данные говорят о том, что его «плечо» $l_n < 10^{-26}$ м, тогда как размеры нейтрона по порядку величины равны 10^{-15} м. Данная проблема чрезвычайно важна для фундаментальной физики, и измерения дипольного момента нейтрона продолжают со все возрастающей точностью.

Вернемся к выражению (23.13) для потенциала поля диполя и перепишем его в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{(\vec{d}, \vec{n})}{r^2} = \frac{d}{r^2} \cos \theta, \quad (23.17)$$

где $\vec{n} = \vec{r}/r$ – единичный вектор в направлении на точку наблюдения. Мы видим, что при возрастании расстояния потенциал поля диполя убывает как $1/r^2$, т.е. быстрее потенциала



точечного заряда, убывающего как $1/r$. Кроме того, он обладает резко выраженной анизотропией. Модуль потенциала максимален в точках прямой, на которой лежит вектор \vec{d} , где $|\varphi| = d/r^2$. А во всех точках оси симметрии диполя, перпендикулярной вектору \vec{d} , $\varphi = 0$. Таким образом, «диаграмма направленности» потенциала поля диполя имеет вид полностью симметричной восьмерки (см. рисунок).

Найдем теперь напряженность \vec{E} поля диполя. Используя формулы векторного анализа

$$\text{grad}(\vec{k}, \vec{a}) = (\vec{k}, \vec{\nabla})\vec{a} + [\vec{k}, \text{rot } \vec{a}], \quad (\vec{k} = \text{const})$$

и

$$(\vec{k}, \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{k}, \quad \text{grad } \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

а также учитывая, что ротор центрального поля равен нулю, будем иметь

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad } \varphi = -\text{grad} \left(\vec{d}, \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -(\vec{d}, \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} - \left[\vec{d}, \text{rot } \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = -(\vec{d}, \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \\ &= -\frac{1}{r^3} (\vec{d}, \vec{\nabla}) \vec{r} - \vec{r} \left(\vec{d}, \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} \vec{d} - \vec{r} \left(\vec{d}, -\frac{3}{r^4} \frac{\vec{r}}{r} \right) = -\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{d}, \vec{r})}{r^5}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}(\vec{d}, \vec{r}) - r^2 \vec{d}}{r^5} = \frac{3\vec{n}(\vec{d}, \vec{n}) - \vec{d}}{r^3}. \quad (23.18)$$

На больших расстояниях $|\vec{E}| \sim 1/r^3$ (в случае точечного заряда $|\vec{E}| \sim 1/r^2$), причем поле \vec{E} также обладает анизотропией. Из (23.18) для поля \vec{E}_{\parallel} в точках оси диполя ($\theta = 0, \pi$) и для поля \vec{E}_{\perp} в точках его перпендикулярной оси симметрии ($\theta = \pi/2$) получаем

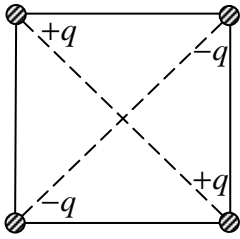
$$\vec{E}_{\parallel} = \frac{2\vec{d}}{r^3}, \quad \vec{E}_{\perp} = -\frac{\vec{d}}{r^3}, \quad (23.19)$$

откуда

$$\frac{|\vec{E}_{\parallel}|}{|\vec{E}_{\perp}|} = 2. \quad (23.20)$$

§24. Понятие о квадрупольном моменте

Если система частиц в целом электрически нейтральна ($Q = 0$), причем ее дипольный момент равен нулю ($\vec{d} = 0$), то разложение (23.7) электростатического потенциала начнется с члена φ_2 , который и будет определять поле на больших расстояниях. Простейшей моделью подобной системы может служить квадруполь, изображенный на рисунке. Если полный заряд системы отличен от нуля, но его распределение обладает центром симметрии, то естественно поместить начало координат именно в эту точку. Тогда дипольный момент окажется равным нулю (см. с.115), и основную поправку к кулоновому потенциалу на больших расстояниях будет давать опять-таки член φ_2 . Важный пример такого рода дает эллипсоид, равномерно заряженный по объему. Так или иначе, член φ_2 в разложении (23.7), именуемый *квадрупольным* потенциалом, может играть существенную роль в целом ряде задач электростатики. Ниже он кратко и обсуждается.



Квадрупольный потенциал в принципе находится весьма просто – путем разложения общего выражения (23.6) для потенциала в ряд Тейлора по ε с точностью до членов второго порядка малости. Опуская соответствующие выкладки (см. дополнение к данному параграфу), приведем окончательный результат:

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{D_{ij} x^i x^j}{r^5} = \frac{1}{2} \frac{D_{ij} n^i n^j}{r^3}, \quad (24.1)$$

где $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$, причем по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Девять величин

$$D_{ij} = \sum_a q_a (3x_a^i x_a^j - \delta^{ij} r_a^2) = \int \rho(\vec{r}') (3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2) dV' \quad (24.2)$$

образуют *тензор квадрупольного момента*. Он симметричен, а его след (сумма диагональных элементов) равен нулю:

$$D_{ij} = D_{ji}, \quad D_{ii} = 0, \quad (24.3)$$

так что у тензора (24.2) на самом деле имеется не 9, а всего 5 независимых компонентов.

Тензор квадрупольного момента, как и всякий симметричный тензор второго ранга, можно привести к диагональному виду. Для этого следует перейти к соответствующим координатным осям, которые называются главными. В главных осях у тензора D_{ij} отличны от нуля только три диагональных компонента. Выпишем их с помощью (24.2) в явном виде,

считая, что заряды всех частиц одинаковы ($q_a = \text{const} \equiv q$), или что объемная плотность заряда в области его распределения постоянна [$\rho(\vec{r}') = \text{const} \equiv \rho$], и обозначая главные координаты прописными буквами:

$$\begin{aligned} D_{11} \equiv D_{xx} &= q \sum_a (2X_a^2 - Y_a^2 - Z_a^2) = \rho \int (2X^2 - Y^2 - Z^2) dV, \\ D_{22} \equiv D_{YY} &= q \sum_a (2Y_a^2 - X_a^2 - Z_a^2) = \rho \int (2Y^2 - X^2 - Z^2) dV, \\ D_{33} \equiv D_{ZZ} &= q \sum_a (2Z_a^2 - X_a^2 - Y_a^2) = \rho \int (2Z^2 - X^2 - Y^2) dV. \end{aligned} \quad (24.4)$$

Допустим, что распределение заряда в системе обладает *сферической* симметрией. Тогда, очевидно,

$$\sum_a q_a x_a^2 = \sum_a q_a y_a^2 = \sum_a q_a z_a^2$$

(в случае непрерывного распределения равны соответствующие интегралы), и из (24.4) заключаем, что

$$D_{xx} = D_{yy} = D_{zz} = 0, \quad (24.5)$$

а значит, и в исходных координатных осях

$$D_{ij} = 0. \quad (24.6)$$

Таким образом, отличие от нуля компонентов тензора квадрупольного момента свидетельствует о том, что система заряженных частиц не имеет сферической симметрии. Для многих атомных ядер как раз $D_{ij} \neq 0$, и тем самым их форма отлична от сферической¹⁾.

Однако измерения показывают, что большинство несферических ядер обладает *аксиальной* симметрией. Рассмотрим этот случай, направив ось z вдоль оси симметрии. Тогда будем иметь

$$\sum_a q_a x_a^2 = \sum_a q_a y_a^2, \quad (24.7,а)$$

или

$$\int \rho(\vec{r}') x'^2 dV' = \int \rho(\vec{r}') y'^2 dV'. \quad (24.7,б)$$

Ось z автоматически оказывается главной осью ($z = Z$), а положение главных осей X и Y в плоскости xOy произвольно. В этих осях

$$D_{xx} = D_{yy} = q \sum_a (X_a^2 - Z_a^2) = \rho \int (X^2 - Z^2) dV \equiv -\frac{q}{2} D,$$

¹⁾ См., например: Наумов А.И. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – М.: Просвещение. 1984, §29.

$$D_{zz} = 2q \sum_a (Z_a^2 - X_a^2) = 2\rho \int (Z^2 - X^2) dV \equiv qD. \quad (24.8)$$

В итоге все компоненты тензора D_{ij} выражаются через одну величину

$$D \equiv \frac{D_{zz}}{q} = 2 \sum_a (Z_a^2 - X_a^2) = \frac{2\rho}{q} \int (Z^2 - X^2) dV, \quad (24.9)$$

которая имеет размерность площади и называется *квадрупольным моментом* аксиально симметричной системы. Именно она служит в данном случае мерой отклонения распределения заряда от сферического. В частности, считается, что все аксиально симметричные атомные ядра имеют форму эллипсоидов вращения. Нетрудно показать (см. дополнение к данному параграфу), что для них

$$D = \frac{2}{5} Z (c^2 - a^2). \quad (24.10)$$

Здесь $a, b = a$ и c – полуоси эллипсоида, а Z – атомный номер элемента, определяющий заряд ядра: $Q = Ze$ (e – элементарный заряд). Заметим, что некоторые ядра не обладают даже аксиальной симметрией, и они имеют форму трехосных эллипсоидов.

Вернемся к общему выражению (24.1) для квадрупольного потенциала, из которого видно, что с ростом r он убывает как $1/r^3$. Соответственно поле \vec{E} , которое мы не будем выписывать, убывает по модулю при $r \rightarrow \infty$ как $1/r^4$. Если тензор D_{ij} приведен к диагональному виду, то квадрупольный потенциал будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{D_{xx}x^2 + D_{yy}y^2 + D_{zz}z^2}{r^5}. \quad (24.11)$$

Если к тому же система обладает аксиальной симметрией, то с помощью (24.8) получим

$$\varphi_2(\vec{r}) = -\frac{qD}{4} \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^5} = \frac{qD}{4} \frac{3z^2 - r^2}{r^5}, \quad (24.12)$$

или

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4} \frac{qD}{r^3} (3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{2} \frac{qD}{r^3} \mathcal{P}_2(\cos\theta). \quad (24.13)$$

Здесь θ – угол между радиусом-вектором \vec{r} и осью z , а $P_2(\xi)$ – второй полином Лежандра.

Разложение (23.7) электростатического потенциала можно продолжить, учитывая члены все более высокого порядка малости по ε , которые все быстрее убывают с ростом расстояния. В итоге придем к общему *мультипольному* разложению потенциала, играющему важную роль во многих областях физики.

Дополнение к §24*

Получим, прежде всего, выражение (24.1) для квадрупольного потенциала. С этой целью учтем в разложении (23.7) квадратичный по ε член.

Принимая во внимание, что для любой скалярной функции f , разложимой в ряд Тейлора,

$$f(\vec{r} - \vec{\rho}) \equiv f(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3) = f(\vec{r}) - (\vec{\rho}, \vec{\nabla}f(\vec{r})) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j + \dots \quad (24.14)$$

и полагая $f = 1/|\vec{r} - \vec{r}_a|$, из второй формулы (23.6) будем иметь

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_a q_a x_a^i x_a^j \right\} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (24.15)$$

Однократное дифференцирование функции $1/r$ дает

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x_j} = -\frac{1}{r^2} \frac{x_j}{r} = -\frac{x_j}{r^3}.$$

Проводя еще одно дифференцирование, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial x_j}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} \delta_{ij} + x_j \frac{3}{r^4} \frac{x_i}{r},$$

так что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}. \quad (24.16)$$

Подставляем это выражение в (24.15):

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_a q_a (3x_a^i x_a^j) \right\} \frac{x_i x_j}{r^5} - \frac{1}{2} \left\{ \sum_a q_a (\delta_{ij} x_a^i x_a^j) \right\} \frac{r^2}{r^5}.$$

Используя очевидные равенства

$$\delta_{ij} x_a^i x_a^j = r_a^2, \quad r^2 = \delta_{ij} x_i x_j,$$

будем иметь

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_a q_a (3x_a^i x_a^j - r_a^2 \delta_{ij}) \right\} \frac{x_i x_j}{r^5}.$$

В итоге мы и пришли к формулам (24.1) и (24.2), задающим квадрупольный потенциал.

Вычислим теперь квадрупольный момент эллипсоида вращения с полуосями $a, b = a, c$, по объему которого с плотностью $\rho = const$ распределен заряд Q . Исходим из второго выражения (24.9):

$$D = \frac{2\rho}{q} \int (z^2 - x^2) dV. \quad (24.17)$$

Переходя в этом интеграле к обобщенным сферическим координатам

$$x = ar \cdot \sin \theta \cos \varphi, \quad y = ar \cdot \sin \theta \sin \varphi, \quad z = cr \cdot \cos \theta$$

и учитывая, что

$$dV \equiv dxdydz = a^2 c r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi; \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

получим из (24.17)

$$D = \frac{2\rho}{q} a^2 c \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} (c^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) d\varphi.$$

Проводя здесь элементарные интегрирования, найдем

$$D = \frac{2\rho}{5q} \frac{4}{3} \pi a^2 c (c^2 - a^2).$$

Учитывая, что объем эллипсоида равен

$$V = \frac{4\pi}{3} abc = \frac{4\pi}{3} a^2 c$$

и что $\rho V = Q$ есть его полный заряд, будем иметь

$$D = \frac{2}{5} \frac{Q}{q} (c^2 - a^2). \quad (24.18)$$

При применении этой формулы к атомному ядру следует положить $q = e$ (заряд протона) и $Q = Ze$ (заряд ядра). В итоге получим выражение (24.10) для квадрупольного момента атомного ядра, обладающего аксиальной симметрией. Если форма ядра незначительно отличается от сферической, то естественно положить $C = R$ и $a = R - \Delta R$, где R – «радиус» ядра, а ΔR – малая поправка. Величина

$$\beta \equiv \frac{\Delta R}{R} \ll 1 \quad (24.19)$$

называется параметром деформации ядра. В данном случае выражение (24.10) с точностью до членов первого порядка малости по β записывается как

$$D \cong \frac{4}{5} ZR\Delta R \cong \frac{4}{5} ZR^2 \beta, \quad (24.20)$$

и мы приходим к формуле (29.2) из учебного пособия по ядерной физике¹⁾.

¹⁾ Наумов А.И. Физика атомного ядра и элементарных частиц. - М.: Просвещение, 1984. – с.122.

§25. Энергия электростатического поля

Полагая $\vec{B} = 0$ в общей формуле (11.6), мы для плотности энергии электростатического поля получим

$$W = \frac{\vec{E}^2}{8\pi}. \quad (25.1)$$

Чтобы найти полную энергию поля U , нужно проинтегрировать это выражение по всему пространству:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}^2 dV. \quad (25.2)$$

Такая запись соответствует точке зрения «теории близкодействия»: энергия физической системы делокализована в пространстве, и вся она сосредоточена в электростатическом поле.

Преобразуем выражение (25.2), воспользовавшись тем, что $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, и применяя известные формулы векторного анализа:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}^2 dV = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{E}, \text{grad } \varphi) dV = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \text{div}(\varphi \vec{E}) dV + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \text{div} \vec{E} dV = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} \varphi(\vec{E}, d\vec{S}) + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \text{div} \vec{E} dV. \end{aligned}$$

Учитывая, что при $r \rightarrow \infty$ потенциал φ убывает не медленнее, чем $1/r$, а поле \vec{E} – не медленнее, чем $1/r^2$, и что площадь поверхности интегрирования растет всего лишь как r^2 , получим, что первый интеграл здесь обращается в нуль. Принимая, далее, во внимание, что $\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho$, найдем

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV, \quad (25.3)$$

или для дискретного распределения зарядов

$$U = \frac{1}{2} \sum_a q_a \varphi(\vec{r}_a). \quad (25.4)$$

Такая запись отвечает "промежуточной" точке зрения: энергия физической системы определяется взаимодействием заряженных частиц с порождаемым ими электростатическим полем.

Если в формулы (25.3) и (25.4) подставить соответственно выражения (22.24) и (22.22) для потенциала φ , то получим

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' \quad (25.5)$$

и

$$U = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}. \quad (25.6)$$

Эта форма записи соответствует точке зрения «теории дальнего действия»: энергия физической системы определяется непосредственными попарными взаимодействиями ее частиц. Теперь становится понятным и появление множителя $1/2$. Он указывает на то, что при вычислении полной энергии две пары частиц $a-b$ и $b-a$ нужно учитывать лишь один раз.

Заметим, что в рамках электростатики, как и вообще при рассмотрении стационарных процессов, все три указанные точки зрения формально выступают как равноправные. Все достоинства и уникальность полевой точки зрения («теории ближнего действия») выявляются только в случае существенно нестационарных процессов.

В исходной формуле (25.2) \vec{E} есть полное поле, порождаемое всеми электрическими зарядами. Поэтому и в (25.4) $\varphi(\vec{r}_a)$ – это потенциал полного поля в точке \vec{r}_a , которое создается всеми частицами, в том числе частицей с зарядом q_a . Соответственно суммирование в (25.6) проводится по всевозможным парам индексов a и b ; в частности, в сумму входят «диагональные» члены с $a=b$. Применяя с учетом сделанных замечаний формулу (25.4) к одному точечному заряду q_0 , находящемуся в точке \vec{r}_0 , получим

$$u_0 = \frac{1}{2} q_0 \varphi(\vec{r}_0) = \frac{1}{2} q_0 \frac{q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} = \infty!$$

К такому же результату приводит и формула (25.6):

$$u_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_0|} = \infty.$$

Уже это обстоятельство указывает на ограниченность области применимости классической электродинамики на малых расстояниях, и оно служило предметом многочисленных дискуссий на рубеже прошлого и нынешнего столетий. Трудность с бесконечной энергией исчезнет, если считать, что на самом деле точечных частиц не существует, а что это понятие применяется в качестве всего лишь полезной идеализации, или модели. Но в том-то и дело, что, согласно современным теоретическим воззрениям, фундаментальные заряженные частицы (лептоны и кварки) должны рассматриваться как истинно точечные объекты. Это подтверждается и экспериментальными данными, согласно которым радиус электрона $R_e < 10^{-18}$ м, так что он по крайней мере на 3 порядка меньше радиуса протона. Мы видим, что в данном контексте трудность с бесконечной энергией вполне реальна.

Формально ее можно преодолеть, приписывая точечным частицам некий радиус и устремляя его в конечном итоге к нулю. Рассмотрим эту процедуру подробнее. При конечном R выделим в сумме (25.6) конечные же «диагональные» члены и перепишем это выражение для энергии поля как

$$U = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} + \tilde{U}(R) \equiv U_{\text{взаим}} + U_{\text{собств}}. \quad (25.7)$$

Первый член зависит от взаимного положения частиц и имеет непосредственный физический смысл их *энергии взаимодействия*. При изменении положения частиц совершается работа, равная разности значений этой энергии для начальной и конечной конфигураций.

Второй член в (25.7), именуемый *собственной энергией* частиц, не зависит от их взаимного положения, а есть функция только их внутренних характеристик. Данный член играет роль аддитивной постоянной, с точностью до которой и определена потенциальная энергия. Поэтому еще до предельного перехода $R \rightarrow 0$ эту постоянную можно отбросить, записывая энергию системы заряженных частиц, а значит, и энергию создаваемого ими поля, в виде

$$U = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} \equiv \sum_{b < a} \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}. \quad (25.8)$$

В частности, для одной частицы получим $u = 0$, а для двух взаимодействующих частиц

$$u = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (25.9)$$

Отметим непрерывность операций отбрасывания собственной энергии $\tilde{U}(R)$ и предельного перехода $R \rightarrow 0$. Данная процедура весьма нетривиальна и служит предтечей так называемых перенормировок в квантовой теории поля, которая также страдает от наличия разного рода бесконечностей.

Вычислим собственную энергию электростатического поля, создаваемого шариком радиуса R , по объему которого равномерно распределен заряд q . Напряженность этого поля задается формулой (22.12), и поэтому, переходя в (25.2) к сферическим координатам, будем иметь

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}^2(r) r^2 dr d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^\infty r^2 \vec{E}^2(r) dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R r^2 \left(\frac{q}{R^2} \frac{r}{R} \right)^2 dr + \frac{1}{2} \int_R^\infty r^2 \left(\frac{q}{r^2} \right)^2 dr. \end{aligned}$$

Проводя элементарные интегрирования, получим

$$U_0 = \frac{3}{5} \frac{q^2}{R}. \quad (25.10)$$

Таким образом, действительно при $R \neq 0$ энергия оказывается конечной, а при $R \rightarrow 0$ она стремится к бесконечности.

Если внутри шарика $\rho \neq const$, то результат (25.10) изменится не столь уж существенно. В общей ситуации

$$U_0 = \alpha \frac{q^2}{R}, \quad (25.11)$$

причем для разумного распределения заряда коэффициент α равен по порядку величины 1. Читателю предлагается самостоятельно убедиться, что в случае равномерно заряженной сферы $\alpha = 1/2$.

В начале этого века многие физики (Г. Лоренц, А. Абрагам, А. Пуанкаре, П. Ланжевен и др.) придерживались той точки зрения, что вся масса электрона имеет чисто электромагнитное происхождение. При таком подходе энергия покоя этой частицы отождествляется с ее собственной электромагнитной энергией:

$$mc^2 = \alpha \frac{e^2}{R},$$

откуда для радиуса электрона получаем

$$R = \alpha \frac{e^2}{mc^2} \equiv \alpha r_e. \quad (25.12)$$

Здесь введена величина

$$r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2} \cong 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ м}, \quad (25.13)$$

называемая *классическим радиусом электрона*. В современной физике смысл этой величины вовсе не соответствует ее названию. Классический радиус электрона появляется в некоторых задачах электродинамики просто как параметр размерности длины, образованный из фундаментальных постоянных e , m , c . Например, он входит в формулу Томсона для сечения рассеяния света свободными электронами (см. гл. VII).

Величину r_e можно трактовать также как расстояние между электронами, на котором энергия их электростатического взаимодействия становится равной энергии покоя каждой частицы:

$$\frac{e^2}{r_e} = mc^2. \quad (25.14)$$

Можно было бы думать, что именно такими расстояниями и ограничивается снизу область применимости классической электродинамики. Но на самом деле многие ее концепции становятся непригодными уже на расстояниях порядка комптоновской длины волны электрона

$$\lambda_e \equiv \frac{\hbar}{mc} \cong 3,9 \cdot 10^{-13} \text{ м}, \quad (25.15)$$

на которых становятся существенными квантоворелятивистские эффекты¹⁾. Поэтому в рамках классической электродинамики упоминавшиеся выше трудности с бесконечностью собственной энергии точечных частиц представляют скорее академический, чем физический интерес.

¹⁾ См.: Наумов А.И. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – М.: Просвещение, 1984, §64.

§26. Заряженные частицы во внешнем электростатическом поле

Рассмотрим систему заряженных частиц, которая находится в заданном электростатическом поле $\vec{E}(\vec{r})$. Эта система считается жесткой, так что взаимодействие между отдельными ее частицами фиксировано, и оно не учитывается. Нас будет интересовать потенциальная энергия данной системы во внешнем поле, а также полная сила и момент сил, действующие на нее со стороны этого поля.

Нетрудно выписать соответствующие точные выражения. Учитывая, что потенциальная энергия одной частицы в электростатическом поле задается формулой (20.5), для полной потенциальной энергии будем иметь

$$U = U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_a u_0(\vec{r}_a) = \sum_a q_a \varphi(\vec{r}_a). \quad (26.1)$$

Обращаем внимание на отсутствие здесь множителя $1/2$ [сравн. с (25.4)]. Полная сила, действующая на систему частиц, есть

$$\vec{F} = \sum_a \vec{F}_a = \sum_a q_a \vec{E}(\vec{r}_a), \quad (26.2)$$

а полный момент сил равен

$$\vec{M} = \sum_a \vec{M}_a = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{F}_a] = \sum_a q_a [\vec{r}_a, \vec{E}(\vec{r}_a)]. \quad (26.3)$$

Однако, как уже неоднократно подчеркивалось (см., например, §23), на практике точные формулы зачастую оказываются не столь уж полезными. Целесообразнее пользоваться приближенными выражениями, которые получаются из точных путем разложения в ряд Тейлора по какому-то малому параметру. В рассматриваемой задаче такой параметр возникает, когда внешнее поле $\vec{E}(\vec{r})$ можно считать *квазиоднородным*, т.е. когда размеры l системы частиц много меньше характерного расстояния L , на котором поле меняется сколько-нибудь существенным образом. Иными словами, в пределах системы частиц квазиоднородное поле $\vec{E}(\vec{r})$ является почти однородным (откуда и терминология), а эффекты его неоднородности учитывают низшие члены разложения в ряд Тейлора по параметру $l/L \ll 1$. При фактическом проведении этой процедуры начало координат помещается где-то внутри системы частиц и значения $f(\vec{r}_a)$ полевых величин f разлагаются по радиусам-векторам частиц \vec{r}_a .

Начнем анализ с выражения (26.1) для полной потенциальной энергии. Пользуясь соотношением (23.9), разложим $\varphi(\vec{r}_a)$ в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка малости:

$$\varphi(\vec{r}_a) \cong \varphi(0) + \left(\vec{r}_a, \text{grad} \varphi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=0} \right) \quad (26.4)$$

и подставим результат в (26.1):

$$U \cong u_0 + u_1 = \left\{ \sum_a q_a \right\} \varphi(0) + \left(\left\{ \sum_a q_a \vec{r}_a \right\}, \text{grad} \varphi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=0} \right). \quad (26.5)$$

В нулевом приближении

$$u \cong u_0 = Q\varphi(0), \quad Q = \sum_a q_a \quad (26.6)$$

и полная энергия совпадает с энергией одной частицы, которая расположена в начале координат и несет весь заряд Q рассматриваемой системы [сравн. с формулой (23.11)]. Первая поправка u_1 к потенциальной энергии, являющаяся главным членом в случае, когда система в целом электрически нейтральна ($Q = 0$), имеет вид

$$u_1 = -(\vec{d}, \vec{E}(0)), \quad \vec{d} = \sum_a q_a \vec{r}_a. \quad (26.7)$$

Мы видим, что при $Q = 0$ потенциальная энергия системы заряженных частиц во внешнем поле определяется ее дипольным моментом \vec{d} .

Чтобы получить приближенное выражение для полной силы (26.2), нужно разложить в ряд Тейлора векторную функцию $\vec{E}(\vec{r}_a)$. Так как для каждого ее компонента справедливо соотношение (23.9), то с точностью до членов первого порядка малости будем иметь

$$\vec{E}(\vec{r}_a) \cong \vec{E}(0) + (\vec{r}_a, \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})|_{\vec{r}=0}. \quad (26.8)$$

Подстановка этого результата в (26.2) дает

$$\vec{F} \cong \vec{F}_0 + \vec{F}_1 = \left\{ \sum_a q_a \right\} \vec{E}(0) + \left(\left\{ \sum_a q_a \vec{r}_a \right\}, \vec{\nabla} \right) \vec{E}(\vec{r})|_{\vec{r}=0}. \quad (26.9)$$

В нулевом приближении

$$\vec{F} \cong \vec{F}_0 = Q\vec{E}(0), \quad (26.10)$$

и полная сила определяется суммарным зарядом Q системы частиц и значением поля \vec{E} в начале координат [сравн. с (26.6)]. Если система в целом электрически нейтральна ($Q = 0$), то главным в разложении выражения для полной силы будет член

$$\vec{F}_1 = (\vec{d}, \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})|_{\vec{r}=0}. \quad (26.11)$$

Он определяется дипольным моментом системы и пространственной скоростью изменения поля \vec{E} в начале координат. В частности, со стороны однородного поля $\vec{E} = const$ никакой силы на диполь не действует. Этот результат вполне очевиден.

Чтобы получить полный момент сил, действующий на систему заряженных частиц со стороны квазиоднородного поля, достаточно подставить в точное выражение (26.3) нулевой член разложения (26.8):

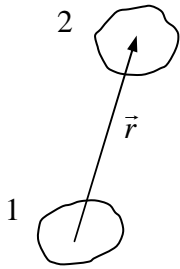
$$\vec{M} \cong \vec{M}_0 = \left[\left\{ \sum_a q_a \vec{r}_a \right\}, \vec{E}(0) \right],$$

откуда

$$\vec{M} \cong \vec{M}_0 = [\vec{d}, \vec{E}(0)]. \quad (26.12)$$

В данном приближении момент сил определяется дипольным моментом системы частиц и значением самого поля \vec{E} в начале координат. Для простого диполя и однородного поля этот результат известен из курса общей физики. Он используется в школьной физике для объяснения поляризации диэлектриков.

В заключение данного параграфа рассмотрим следующую проблему. Пусть имеются две системы заряженных частиц 1 и 2, собственные размеры l_1 и l_2 которых малы по сравнению с разделяющим их расстоянием r . Требуется получить выражение для энергии их



взаимодействия в следующих практически интересных случаях: полные заряды каждой системы отличны от нуля (два иона), одна из них электрически нейтральна (электрон и атом), обе системы нейтральны (два атома или две молекулы). Рассматриваем вторую систему в электростатическом поле первой системы и применяем результаты, сформулированные в данном параграфе и в §23.

В случае взаимодействия заряд-заряд из (26.6) и (23.11), имеем

$$u_{qq} = q_2 \phi_1^{(0)} = q_2 \frac{q_1}{r},$$

т.е.

$$u_{qq} = \frac{q_1 q_2}{r} \sim \frac{1}{r}, \quad (26.13)$$

где указан характер убывания энергии взаимодействия с ростом расстояния. Для взаимодействия заряд – диполь из (26.6) и (23.13) получаем

$$u_{qd} = q_2 \phi_1^{(1)} = q_2 \frac{(\vec{d}_1 \vec{r})}{r^3},$$

т.е.

$$u_{qd} = \frac{q(\vec{d}, \vec{r})}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}. \quad (26.14)$$

Наконец, для взаимодействия диполь – диполь формулы (26.7) и (23.18) дают

$$u_{dd} = -(\vec{d}_2, \vec{E}_1^{(1)}) = -\left(\vec{d}_2, \frac{3\vec{r}(\vec{d}_1, \vec{r}) - \vec{d}_1 r^2}{r^5} \right),$$

или

$$u_{dd} = \frac{(\vec{d}_1, \vec{d}_2) r^2 - 3(\vec{d}_1, \vec{r})(\vec{d}_2, \vec{r})}{r^5} \sim \frac{1}{r^3}. \quad (26.15)$$

Данные результаты применяются, например, в атомной физике.

Дополнение к §26*

Следующий член в разложении (26.5) потенциальной энергии имеет вид

$$u_2 = \frac{1}{2} \sum_a q_a x_a^i x_a^j \left. \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{r}=0} \quad (26.16)$$

[сравн. с 24.15]. Чтобы привести его к нужному виду, заметим, что потенциал φ внешнего поля подчиняется уравнению Лапласа, ибо в интересующей нас области создающие его заряды отсутствуют ($\rho = 0$). Поэтому

$$\delta_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \equiv \nabla^2 \varphi = 0,$$

и вместо (26.16) можно записать

$$u_2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_a q_a \left(x_a^i x_a^j - \frac{1}{3} r_a^2 \delta_{ij} \right) \right\} \left. \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{r}=0}.$$

В итоге окончательно получаем

$$u_2 = \frac{1}{\sigma} D_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0) = -\frac{1}{\sigma} D_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j}(0), \quad (26.17)$$

где D_{ij} – тензор квадрупольного момента, вводимый определением (24.2).