Глава V. СТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§27. Уравнения для стационарного магнитного поля

Следующий по степени сложности случай возникает, когда в уравнениях Максвелла (8.1) можно положить частные производные по времени равными нулю, не считая, однако, что и электрический ток обращается в нуль. В этом случае вновь получаем две независимые системы уравнений отдельно для электрического и магнитного полей:

$$\begin{cases} div\ \vec{E} = 4\pi\rho \\ rot\ \vec{E} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} div\ \vec{B} = 0 \\ rot\vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases} \tag{27.1}$$

Описываемое ими электромагнитное поле будем называть *стационарным*. Но следует иметь в виду, что при рассмотрении на макроскопическом и микроскопическом уровнях трактовка данного термина оказывается несколько различной.

При макроскопическом подходе он понимается стандартно – так, как это разъяснено в §2. А именно, процесс движения заряженных частиц является стационарным, когда $\partial f/\partial t = 0$ для любой из характеризующих его величин f. Так, если заряда распределены по объему, то их плотность ρ и плотность тока $\vec{j}$ должны быть непрерывными функциями координат, не зависящими от времени. Не исключается существование и стационарных линейных тиков. Ясно, что в подобной ситуации поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ тоже не зависят от времени $\left(\partial\vec{E}/\partial t = 0,\quad \partial\vec{B}/\partial t = 0\right)$, а потому они подчиняются уравнениям (27.1).

На микроскопическом уровне рассмотрения распределение зарядов всегда дискретно, и их движение не может быть стационарным в истинном смысле этого слова (см. §2) Поэтому интерпретация понятия стационарности при таком подходе будет отличаться от предыдущей.

Пусть заряженные частицы совершают финитное движение. Оно является периодическим или квазипериодическим, вследствие чего целесообразно рассматривать не сами величины $f\left(\vec{r}\,|\,t\right)$, а их средние по времени

$$\overline{f\left(\vec{r}\,|\,t\right)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\left(\vec{r}\,|\,t\right)dt = f\left(\vec{r}\right), \tag{27.2}$$

которые являются функциями только координат. При этом

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^\infty \frac{df}{dt}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{f\left(T\right)-f\left(0\right)}{T} = 0\,, \tag{27.3}$$

где на последнем этапе учтено, что в силу предполагаемой финитности движения все функции f оказываются ограниченными.

Проводя теперь в уравнениях Максвелла (8.1) указанную операцию усреднения и учитывая (27.3), мы и придем к уравнениям (27.1). Таким образом, их можно трактовать как уравнения, описывающие среднее электромагнитное поле, которое создается точечными заряженными частицами, совершающими финитное движение. Это поле не зависит от времени, и вполне допустимо также именовать его стационарным полем.

Ниже используются обе интерпретации уравнений (27.1) и стационарного электромагнитного поля, поведение которого они описывают. При этом в зависимости от характера обсуждаемых проблем бывает удобным рассматривать то объемные токи, то линейные токи, то токи, порождаемые движением точечных частиц. Переходы от одной картины распределения зарядов к другой осуществляются подстановками типа (2.10)

$$\vec{j}dV \leftrightarrow Jd\vec{l} \leftrightarrow q_a\vec{v}_a\,, \tag{27.4}$$

причем в первом случае подразумевается интегрирование по объему, во втором – интегрирование по замкнутому контуру, в третьем – суммирование по заряженным частицам.

Как говорилось выше, при рассмотрении дискретного распределения зарядов все физические величины f следует усреднять по времени. В дальнейшем подразумевается, что в этом случае необходимая операция усреднения уже проведена, но знак среднего всюду для краткости опускается. Поэтому, если в процессе каких-то выкладок появятся производные по времени df/dt, то, имея в виду соотношение (27.3), мы их будем просто отбрасывать.

Вернемся к уравнениям (27.1) для стационарного электромагнитного поля. Как мы видим, стационарное электрическое поле $\vec{E}$ подчиняется тем же уравнениям (19.2), что в электростатике. Они были подробно проанализированы в предыдущей главе.

В данной главе все внимание уделяется *стационарному магнитному полю* $\vec{B}=\vec{B}(\vec{r})$, которое называется также постоянным магнитным или магнитостатическим (по аналогии с электростатическим) полем. Однако в свете сказанного выше два последних термина представляются менее удачными. Стационарное магнитное поле удовлетворяет уравнениям

$$\boxed{div\ \vec{B}=0, \quad rot\ \vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}}\,. \tag{27.5}$$

Первое из них является универсальным. Оно свидетельствует о соленоидальности любого магнитного поля, что равнозначно отсутствию в природе магнитных зарядов (подробнее см. §8). Второе уравнение (27.5) говорит о том, что стационарное магнитное поле порождается только электрическими токами, т.е. движением заряженных частиц.

Образуя дивергенцию от обеих частей этого уравнения, придем к закону сохранения электрического заряда в форме стационарного уравнения непрерывности (2.21)

$$div\,\vec{j}=0\,. \tag{27.6}$$

Некоторые его следствия обсуждались в §2. Отметим среди них постоянство силы тока J [равенство (2.25)] вдоль трубки тока. Этот результат достаточно важен, ибо позволяет при наличии линейных токов выносить величину J за знак соответствующего контурного интеграла.

Докажем теперь, что из уравнения непрерывности (27.6) в случае финитного движения частиц вытекает равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\vec{j}(\vec{r})\,dV=0\,, \tag{27.7}$$

которое нам потребуется в дальнейшем. Учитывая, что $div\,\vec{j}=0$ и что $(\vec{j},\vec{\nabla})\vec{r}=\vec{j}$, имеем

$$(\vec{\nabla},\vec{j})\vec{r}=(\vec{j},\vec{\nabla})\vec{r}+\vec{r}\ div\,\vec{j}=(\vec{j},\vec{\nabla})\vec{r}=\vec{j}\,.$$

Чтобы доказать равенство (27.7), достаточно воспользоваться этим соотношением, обобщенной теоремой Гаусса и тем, что в силу финитности движения $\vec{j}=0$ вне ограниченной области пространства:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}\, dV = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{\nabla},\vec{j}\right)\vec{r}\, dV = \int_{\Sigma_\infty} \left(d\vec{S},\vec{j}\right)\vec{r} = 0 .$$

Выше в качестве переменной состояния стационарного магнитного поля выступал вектор индукции $\vec{B}$. Но, как мы знаем из §10, возможен и другой способ описания состояний поля. В данном случае перейти к нему позволяет первое уравнение (27.5). Оно говорит о том, что всякое магнитное поле является *соленоидальным*, а потому существует такое векторное поле $\vec{A}=\vec{A}(\vec{r})$, что

$$\boxed{\vec{B} = rot\, \vec{A}} \tag{27.8}$$

[сравн. с (10.3)]. Функция $\vec{A}$ называется *векторным потенциалом*, который и выступает в качестве другой переменной состояния магнитного поля.

Векторный потенциал определяется равенством (27.8) неоднозначно. Согласно преобразованию (10.6), к нему можно добавить выражение вида $grad\ \psi$ с произвольной скалярной функцией ψ. Наличие такого произвола позволяет наложить на $\vec{A}$ дополнительное условие

$$div\, \vec{A} = 0 , \tag{27.8,a}$$

которое есть частный случай условия Лоренца (10.7) для стационарных процессов. Не нарушая условия Лоренца, можно еще сделать замену

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{C} \tag{27.9}$$

и обычно (но не всегда – сравн. с §19,20) векторую постоянную $\vec{C}$ удается выбрать так, чтобы векторный потенциал удовлетворял естественному граничному условию

$$\left|\vec{A}(\vec{r})\right| \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty . \tag{27.10}$$

Подобная нормировка $\vec{A}$, если она возможна, всюду ниже и будет предполагаться.

Уравнение для векторного потенциала получается подстановкой выражения (27.8) во второе уравнение (27.5):

$$rot\ \vec{B} = rot\left(rot\ \vec{A}\right) \equiv grad\left(div\ \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} .$$

Учитывая условие (27.8), получим, что векторный потенциал подчиняется уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} , \tag{27.11}$$

а в тех областях пространства, где нет электрических токов $\left(\vec{j}=0\right)$ – уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 . \tag{27.12}$$

С математической точки зрения уравнение (27.11) идентично уравнению (19.11) для электростатического потенциала. Поэтому его решение, удовлетворяющее естественному условию (27.10), выписывается сразу, по аналогии с (22.24):

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'}\,. \tag{27.13}$$

Чтобы получить векторный потенциал магнитного поля, создаваемого линейными токами и движущимися точечными частицами, достаточно в (27.13) сделать подстановки (27.4). В результате будем иметь

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{J}{c}\oint\limits_L \frac{d\vec{l}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{27.14}$$

и

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\sum_a \frac{q_a \vec{v}_a}{|\vec{r}-\vec{r}_a|}\,. \tag{27.15}$$

При вычислении магнитного поля $\vec{B} = rot\,\vec{A}$ пользуемся формулой

$$rot(\varphi\vec{a}) = [grad\ \varphi,\ \vec{a}], \qquad \vec{a} = const\,,$$

с помощью которой из (27.13) получаем

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}rot\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' = \frac{1}{c}\int\limits_V rot_{\vec{r}}\left\{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{j}(\vec{r}\,')\right\}dV' =$$

$$= \frac{1}{c}\int\limits_V \left[grad_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \vec{j}(\vec{r}\,')\right]dV' = -\frac{1}{c}\int\limits_V \left[\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}, \vec{j}(\vec{r}\,')\right]dV'.$$

Таким образом, имеем

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\left[\vec{j}(\vec{r}), \vec{r}-\vec{r}\,'\right]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dV'}\,, \tag{27.16}$$

или, после подстановок (27.4),

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{J}{c}\oint\limits_L \frac{\left[d\vec{l}\,', \vec{r}-\vec{r}\,'\right]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{27.17}$$

и

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\sum_a \frac{q_a[\vec{v}_a, \vec{r}-\vec{r}_a]}{|\vec{r}-\vec{r}_a|^3}\,. \tag{27.18}$$

В результате приходим к *закону Био–Савара–Лапласа* в форме (7.16), (7.15) и (7.17) соответственно.

Для поля одного точечного заряда q_a, пролетающего в данный момент времени через точку $\vec{r}_a$ со скоростью $\vec{v}_a$, из (27.18) находим

$$\vec{B}_a(\vec{r}) = \frac{q_a}{c}\frac{[\vec{v}_a, \vec{r}-\vec{r}_a]}{|\vec{r}-\vec{r}_a|^3} \equiv \frac{q_a}{c}\frac{[\vec{v}_a, \vec{R}]}{R^3}. \tag{27.19}$$

Если в точку $\vec{r}$ поместить заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$, то на него со стороны заряда q_a будет действовать магнитная сила

$$\vec{F}_q^M = \frac{q}{c}[\vec{v}, \vec{B}_a] = \frac{qq_a}{c^2}\frac{[\vec{v},[\vec{v}_a, R]]}{R^3}, \tag{27.20}$$

и мы возвращаемся к формуле (6.13). Подчеркнем приближенный характер результатов (27.18) – (27.20). Они справедливы лишь постольку, поскольку в уравнениях Максвелла (8.1) допустимо пренебрежение эффектами запаздывания (подробнее см. §28). Точные выражения для электрического и магнитного полей одной заряженной частицы, движущейся равномерно, будут получены в дополнении к следующему параграфу.

Дополнение к §27*

Убедимся, что векторный потенциал $\vec{A}$, задаваемый формулой (27.13), удовлетворяет дополнительному условию (27.8). Выкладки здесь вполне аналогичны тем, которые проводились в дополнении к §7 при выводе уравнения (7.49), и мы их не комментируем. Имеем

$$div\,\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}div\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3}div_{\vec{r}}\left\{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{j}(\vec{r}')\right\}dV' =$$
$$= \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\vec{j}(\vec{r}'), grad_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dV' =$$
$$= -\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\vec{j}(\vec{r}'), grad_{\vec{r}'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dV' - \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3}div_{\vec{r}'}\vec{j}(\vec{r}')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' =$$
$$= -\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3}div_{\vec{r}'}\left\{\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right\}dV' = -\frac{1}{c}\oint_{S_\infty}\frac{(\vec{j}(\vec{r}')d\vec{S}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0,$$

что и требуется. Читателю предлагается самостоятельно осмыслить каждый этап этих выкладок.

§28. Электромагнитное поле равномерно движущегося заряда

В предыдущем параграфе электромагнитное поле, описываемое уравнениями (27.1), интерпретировалось двумя способами: либо как поле, создаваемое стационарными токами, либо как усредненное поле, создаваемое точечными частицами, которые совершают финитное движение. Однако уравнения (27.1) можно трактовать и несколько иначе.

Допустим, что точечные заряженные частицы совершают медленное движение, в том смысле, что

$$\left|\vec{v}_a\right| \ll c\,, \tag{28.1}$$

причем теперь уже оно не предполагается финитным. Так как скорости частиц малы, то в каждой данной точке пространства поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ изменяются медленно. Иными словами, их производные по времени сказываются тоже малыми, так что в уравнениях Максвелла (8.1) этими производными можно пренебречь, и в итоге мы вновь придем к уравнениям (27.1). Теперь все физические величины, в том числе поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, будут зависеть от времени t, но они содержат его лишь в качестве параметра, а не независимой переменной. При подобной трактовке уравнения (27.1) имеют заведомо приближенный характер, причем приближение состоит в том, что не учитываются эффекты запаздывания. А именно, считается, что электромагнитное поле во всех пространственных точках изменяется синхронно с изменением механического состояния порождающих его заряженных частиц.

Рассмотрим один точечный заряд q, движущийся с малой постоянной скоростью $\vec{v}$. Создаваемые им поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ будут подчиняться уравнениям (27.1) в их только что приведенной трактовке. Первая пара этих уравнений совпадает с уравнениями электростатики, а вторая пара – с уравнениями «магнитостатики». Поэтому интересующие нас поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ можно вычислить по общим формулам (22.9) и (27.16), подставляя в них

$$\rho\left(\vec{r}\middle|t\right) = q\delta\left(\vec{r}-\vec{v}t\right), \qquad \vec{j}\left(\vec{r}\middle|t\right) = q\vec{v}\delta\left(\vec{r}-\vec{v}t\right) \tag{28.2}$$

(начало координат совмещено с точкой, в которой заряд находился при $t=0$). Однако проще воспользоваться уже готовыми формулами (22.6) и (27.19) для стационарных полей точечного заряда, полагая в них $q_a = q,\quad \vec{r}_a = \vec{v}t,\quad \vec{v}_a = \vec{v}$. В итоге сразу получим

$$\vec{E}\left(\vec{r}\middle|t\right) = q\frac{\vec{r}-\vec{v}t}{\left|\vec{r}-\vec{v}t\right|^3} \tag{28.3}$$

и

$$\vec{B}\left(\vec{r}\middle|t\right) = \frac{q}{c}\frac{\left[\vec{v},\vec{r}-\vec{v}t\right]}{\left|\vec{r}-\vec{v}t\right|^3} = \frac{q}{c}\frac{\left[\vec{v},\vec{r}\right]}{\left|\vec{r}-\vec{v}t\right|^3}. \tag{28.4}$$

Сравнивая две последние формулы, заключаем, что электрическое и магнитное поля заряженной частицы, движущейся равномерно с малой скоростью, связаны простым соотношением

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{E}\right]. \tag{28.5}$$

Отсюда видно, что эти поля взаимно перпендикулярны, и что

$$\frac{\left|\vec{B}\right|}{\left|\vec{E}\right|} \sim \frac{v}{c}. \tag{28.6}$$

Тиким образом, магнитное поле оказывается в v/c раз слабее электрического, и это вполне естественно, ибо оно возникает именно за счет движения заряженной частицы. Заметим, что при использовании Международной системы единиц (СИ) сопоставление "интенсивностей" электрического и магнитного полей является более сложным, ибо в СИ размерности величин $\vec{E}$ и $\vec{B}$ различны.

Дополнение к §28*

Найдем электромагнитное поле равномерно движущегося заряда q, не считая теперь его скорость $\vec{v}$ малой. В этом случае уравнения (27.1) неприменимы, и в принципе нужно исходить из общей системы уравнений Максвелла (8.1) с плотностью заряда и плотностью тока, задаваемыми формулами (28.2). Однако непосредственное решение этой системы уравнений оказывается весьма сложным делом. Гораздо проще определить сначала поле в "движущейся" системе отсчета S', связанной с зарядом, а затем перейти в "неподвижную" систему отсчета S.

В системе отсчета S', где $\vec{v}' = 0$, сразу можно записать

$$\vec{E}' = \frac{q\vec{r}'}{r'^3}, \qquad \vec{B}' = 0. \tag{28.7}$$

При переходе к исходной системе отсчета S используем формулы (16.10), которые для электрического поля дают

$$E_x = \frac{E'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{qx'}{r'^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{qy'}{r'^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, E_z = E'_z = \frac{qz'}{r'^3}. \tag{28.8}$$

Учтем теперь, что

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

и

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(x^2+y^2\right) + \left(z-vt\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\tilde{R}^2}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где введено обозначение

$$\tilde{R}^2 \equiv \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(x^2+y^2\right) + \left(z-vt\right)^2. \tag{28.9}$$

Подставляя эти выражение в (28.8), получим

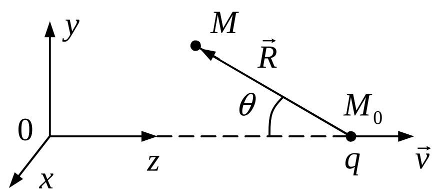
$$E_x = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{qx}{\tilde{R}^3}, \quad E_y = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{qy}{\tilde{R}^3}, \quad E_z = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{q\left(z-vt\right)}{\tilde{R}^3}, \tag{28.9,a}$$

т.е.

$$\vec{E} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{q\vec{R}}{\tilde{R}^3}. \tag{28.10}$$

Здесь введен вектор

$$\vec{R} = \left\{x, y, z - vt\right\}, \tag{28.11}$$



соединяющий точку $M_0(0,0,vt)$ с точкой наблюдения $M(x,y,z)$. Как видно из рисунка,

$$x^2 + y^2 = R^2 \sin^2\theta,$$

и выражение (28.9) для $\tilde{R}^2$ можно переписать как

$$\tilde{R}^2 = \left[x^2 + y^2 + (z - vt)^2\right] - \frac{v^2}{c^2}\left(x^2 + y^2\right) = R^2 - \frac{v^2}{c^2} R^2 \sin^2\theta = R^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right).$$

Подставляя его в (28.10), для электрического поля окончательно найдем

$$\vec{E} = \frac{q\vec{R}}{R^3} \frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}} . \tag{28.12}$$

При $v \ll c$ приходим отсюда к известному результату (28.3).

Чтобы найти магнитное поле $\vec{B}$, положим в формулах (16.10) в соответствии с (28.7) $\vec{B}' = 0$:

$$B_x = -\frac{v}{c}\frac{E_y'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = -\frac{v}{c}E_y, \quad B_y = \frac{v}{c}\frac{E_x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{c}E_x, \quad B_z = B_z' = 0 ,$$

где учтены соотношения (28.8). В итоге для поля $\vec{B}$ получается выражение вида (28.5):

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{E}\right]. \tag{28.13}$$

Для модулей векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ из (28.12) и (28.13) имеем

$$E = E_0 I(v,\theta), \qquad B = B_0 I(v,\theta). \tag{28.14}$$

Здесь величины E_0 и B_0 задаются теми же формулами, что при $v \ll c$:

$$E_0 = \frac{q}{R^2}, \qquad B_0 = \frac{v}{c}\frac{q}{R^2}\sin\theta, \tag{28.15}$$

а $I(v,\theta)$ есть релятивистский фактор:

$$I(v,\theta) = \frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}} . \tag{28.16}$$

В направлении движения частицы $(\theta = 0, \pi)$ поле уменьшается $1 - v^2/c^2$ раз, а в перпендикулярных направлениях $(\theta = \pi/2)$ оно возрастает в $\left(1 - v^2/c^2\right)^{-V^2}$ раз по сравнению с полем медленно движущейся частицы.

Как явствует из (28.14), векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ всегда ортогональны. В ультрарелятивистском пределе $v \to c$ они расположены в малой окрестности плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{v}$, и практически равны по модулю. Тем самым электромагнитное поле очень быстро движущейся заряженной частицы похоже по своим свойствам на плоскую электромагнитную волну.

В случае, когда скорость релятивистской частицы зависит от времени, задача об отыскании ее поля оказывается значительно более сложной, а соответствующие формулы – гораздо более громоздкими[1)].

§29. Стационарное магнитное поле в дипольном приближении

Обсудим проблему, во многом аналогичную той, которая обсуждалась в §23 в рамках электростатики. Пусть заряженные частицы совершают финитное движение в области пространства с диаметром l. Требуется найти порождаемое ими (усредненное) магнитное поле на больших расстояниях от этой системы частиц, т.е. при $r \gg |\vec{r}_a| \sim l$.

Исходим из выражения (27.15)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\sum_a \frac{q_a \vec{v}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \tag{29.1}$$

для векторного потенциала и разлагаем его в ряд Тейлора по малому параметру (23.8), ограничиваясь низшими членами. Имея в виду формулу (23.9) и полагая в ней $f = 1/|\vec{r} - \vec{\rho}|$ и $\vec{\rho} = \vec{r}_a$, из (29.1) получим

$$\vec{A}(\vec{r}) \cong \vec{A}_0(\vec{r}) + \vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{1}{cr}\sum_a q_a \vec{v}_a - \frac{1}{c}\sum_a q_a \vec{v}_a \left(\vec{r}_a, \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right). \tag{29.2}$$

Нулевой член разложения можно представить в виде полной производной по времени:

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{cr}\sum_a q_a \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{cr}\sum_a q_a \vec{r}_a\right\}, \tag{29.3}$$

и поэтому его следует считать равным нулю (см. §27). Заметим, что если рассматривать объемное распределение токов, то нужно исходить из выражения (27,13) для $\vec{A}(\vec{r})$. В этом случае нулевой член разложения

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{cr}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\, dV' \tag{29.4}$$

[1)] См., например, Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики, кн. I. Механика. Электродинамика. – М.: Наука, 1969, §78.

обращается в нуль в силу соотношения (27.7). Равенство $\vec{A}_0 = 0$ фактически равнозначно отсутствию в природе магнитных зарядов [сравн. его с выражением (23.11) для φ_0].

Итак, в первом нетривиальном приближении имеем

$$\vec{A}(\vec{r}) \cong -\frac{1}{c}\sum_a q_a \vec{v}_a \left(\vec{r}_a, \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{cr^3}\sum_a q_a \vec{v}_a (\vec{r}, \vec{r}_a). \tag{29.5}$$

Преобразуем последнюю сумму следующим образом:

$$\sum_a q_a \vec{v}_a (\vec{r}, \vec{r}_a) = \frac{1}{2}\sum_a q_a \frac{d\vec{r}_a}{dt}(\vec{r}, \vec{r}_a) + \frac{1}{2}\sum_a q_a \vec{v}_a (\vec{r}, \vec{r}_a) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_a q_a \vec{r}_a (\vec{r}, \vec{r}_a)\right\} - \frac{1}{2}\sum_a q_a \vec{r}_a (\vec{r}, \vec{v}_a) + \frac{1}{2}\sum_a q_a \vec{v}_a (\vec{r}, \vec{r}_a) \ .$$

Вновь опуская полную производную по времени и учитывая, что

$$\vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right], \tag{29.6}$$

из (29.5) получим

$$\vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{1}{2cr^3}\sum_a q_a \left[\vec{r}, [\vec{v}_a, \vec{r}_a]\right] = \frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2c}\sum_a q_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a], \vec{r}\right],$$

или

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3}}. \tag{29.7}$$

Здесь введен вектор

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2c}\sum_a q_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a]}, \tag{29.8}$$

полностью определяемый состоянием системы заряженных частиц и не зависящий от точки наблюдения. Он называется магнитным дипольным моментом, или просто *магнитным моментом* системы и вполне аналогичен ее электрическому дипольному моменту (23.14). Переход к объемному распределению зарядов и к линейным токам осуществляется с помощью подстановок (27.4), которые дают соответственно

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\int_V \left[\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')\right] dV' \tag{29.9}$$

и

$$\vec{m} = \frac{J}{2c}\oint_L \left[\vec{r}', d\vec{l}'\right]. \tag{29.10}$$

Для вычисления магнитного поля $\vec{B}$ используем формулу

$$rot\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\vec{b}, \vec{\nabla}\right)\vec{a} - \left(\vec{a}, \vec{\nabla}\right)\vec{b} + \vec{a}\ div\ \vec{b} - \vec{b}\ div\ \vec{a} \tag{29.11}$$

и учитываем, что дифференцирование проводится лишь по координатам точки наблюдения, благодаря чему нужно считать $\vec{m} = const$. Из (29.7) имеем

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} \cong rot\left[\vec{m}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right] = \vec{m}\; div\frac{\vec{r}}{r^3} - \left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\vec{m}\delta\left(\vec{r}\right) - \left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Но по самой постановке задачи $\vec{r} \neq 0$, а потому первое слагаемое обращается в нуль. Для второго слагаемого находим

$$\left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^3}\left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\vec{r} + \vec{r}\left(\vec{m},\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\vec{m}}{r^3} - \frac{3\vec{r}\left(\vec{m},\vec{r}\right)}{r^5}$$

и окончательно получаем

$$\vec{B}\left(\vec{r}\right) = \frac{3\vec{r}\left(\vec{m},\vec{r}\right) - r^2\vec{m}}{r^5}\ . \tag{29.12}$$

Рассмотренное приближение для магнитного поля, основывающееся на учете только первого члена разложения $\vec{A}\left(\vec{r}\right)$ в ряд Тейлора по малому параметру (23.8), именуется *магнитным дипольным* приближением. Продолжая это разложение, придем к магнитному квадрупольному, магнитному октупольному и т.д. приближениям (сравн. с §24), которые мы не рассматриваем.

Обсудим некоторые свойства вектора магнитного момента. Сдвигая начало системы координат на произвольный вектор $\vec{h}$ (см. рисунок на с.115), из (29.8) получим

$$\tilde{\vec{m}} = \frac{1}{2c}\sum_a q_a\left[\tilde{\vec{r}}_a, \tilde{\vec{v}}_a\right] = \frac{1}{2c}\sum_a q_a\left[\vec{r}_a - \vec{h}, \vec{v}_a\right] = \frac{1}{2c}\sum_a q_a\left[\vec{r}_a, \vec{v}_a\right] - \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2c}\sum_a q_a\left[\vec{h}, \vec{r}_a\right]\right\}.$$

Отбросив полную производную по времени, найдем

$$\tilde{\vec{m}} = \vec{m}\,, \tag{29.13}$$

так что магнитный момент не зависит от выбора начала координат. Читателю предлагается самостоятельно убедиться в этом, исходя также из формул (29.9) и (29.10). Как мы видели в §23, для дипольного момента аналогичный результат справедлив только в случае электрически нейтральной системы частиц. Здесь же он является универсальным, ибо магнитных зарядов не существует, и всякая система частиц «магнитно нейтральна».

Рассмотрим замкнутый линейный ток и перепишем формулу (29.10) для его магнитного момента как

$$\vec{m} = \frac{J}{c}\oint_L \frac{1}{2}\left[\vec{r}, d\vec{l}\right]. \tag{29.14}$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{2}\left[\vec{r}, d\vec{l}\right] = dS\cdot\vec{n} \equiv d\vec{S}\,, \tag{29.15}$$

где dS – элемент площади, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали. Подставляя выражение (29.15) в (29.14), для *плоского* контура с током, для которого $\vec{n} = const$, получим

$$\vec{m} = \frac{1}{c} JS \cdot \vec{n} \equiv \frac{1}{c} J\vec{S} \,. \tag{29.16}$$

Именно так вводится вектор магнитного момента в курсе общей физики[1)].

Пусть все частицы обладают одинаковыми удельными зарядами:

$$\frac{q_a}{m_a} = const \equiv \frac{q}{m} \tag{29.17}$$

(наиболее важный частный случай – система тождественных частиц). Для такой системы из (29.8) имеем

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_a q_a \left[\vec{r}_a, \vec{v}_a\right] \equiv \frac{1}{2c} \sum_a \frac{q_a}{m_a} m_a \left[\vec{r}_a, \vec{v}_a\right] = \frac{q}{2mc} \sum_a \left[\vec{r}_a, m_a \vec{v}_a\right],$$

т.е.

$$\boxed{\vec{m} = \frac{q}{2mc} \vec{L} \equiv \gamma \vec{L}}\,, \tag{29.18}$$

где $\vec{L}$ – обычный момент импульса. Таким образом, в данном случае магнитный момент пропорционален полному механическому моменту. Коэффициент пропорциональности

$$\gamma = \frac{q}{2mc} \tag{29.19}$$

называется *гиромагнитным отношением*.

Проекция вектора магнитного момента на произвольную ось z равна

$$m_z = \frac{q}{2mc} L_z \,. \tag{29.20}$$

Но для микрочастиц проекция момента импульса квантуется:

$$L_z = \hbar M_L \,, \tag{29.21}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, M_L – магнитное квантовое число, принимающее целые значения. Подстановка (29.21) в (29.20) дает

$$m_z = \frac{q\hbar}{2mc} M_L \equiv \pm \mu_0 M_L \,. \tag{29.22}$$

Величина

$$\mu_0 = \frac{|q|\hbar}{2mc} \,, \tag{29.23}$$

[1)] См., например: Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. – М.: Просвещение, 1980. – с.83.

имеющая смысл кванта магнитного момента, называется *магнетоном*. Если система состоит из электронов $\left(m = m_e,\ |q| = e\right)$, то получаем *магнетон Бора*

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}, \tag{29.24}$$

а если из протонов ($m = m_p,\ q = e$) , – *ядерный магнетон*

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c}. \tag{29.25}$$

Последние результаты играют важную роль в атомной и ядерной физике.

§30. Энергия стационарного магнитного поля

Полагая $\vec{E} = 0$ в общей формуле (11.6) и проводя интегрирование по всему пространству, мы для полной энергии магнитного поля получим

$$U = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \vec{B}^2 dV. \tag{30.1}$$

Преобразуем это выражение, воспользовавшись тем, что $\vec{B} = rot\,\vec{A}$, и применяя известные формулы векторного анализа:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \vec{B}^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{B}, rot\vec{A}\right) dV = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} div\left[\vec{A}, \vec{B}\right] dV + \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{A}, rot\vec{B}\right) dV =$$
$$= \frac{1}{8\pi} \oint\limits_{S_\infty} \left(\left[\vec{A}, \vec{B}\right], d\vec{S}\right) + \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{A}, rot\vec{B}\right) dV.$$

Интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю [сравн. с выводом формулы (25.3)]. Учитывая, далее, что $rot\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, получим для полной энергии магнитного поля выражение

$$U = \frac{1}{2c} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{j}(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r})\right) dV, \tag{30.2}$$

аналогичное выражению (25.3) для энергии электростатического поля. Подставляя, наконец, в (30.2) выражение (27.13) для векторного потенциала, придем к формуле, аналогичной (25.5):

$$U = \frac{1}{2c^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\left(\vec{j}(\vec{r}), \vec{j}(\vec{r}\,')\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV dV'. \tag{30.3}$$

Если разбить все пространство на отдельные области, нумеруемые индексом i, в которых протекают токи $\vec{j}_i$, то, учитывая свойство аддитивности $\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i$, из (30.3) найдем

$$U = \sum_{i,k} U_{ik}\,, \tag{30.4}$$

где

$$U_{ik} = \frac{1}{2c^2} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\left(\vec{j}_i(\vec{r}_i), \vec{j}_k(\vec{r}_k)\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} dV_i dV_j\,. \tag{30.5}$$

Величины u_{ii} имеют смысл собственных энергий токов, а u_{ik} при $i \neq k$ – энергий их взаимодействия. В случае, когда в каждой выделенной области имеется по одному замкнутому линейному току, в (30.5) следует сделать подстановки (27.4) $\vec{j}_i dV_i \mapsto J_i d\vec{l}_i$, в результате чего получим

$$U_{ik} \frac{J_i J_k}{2c^2} \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{\left(d\vec{l}_i, d\vec{l}_k\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}\,. \tag{30.6}$$

В итоге полная энергия магнитного поля линейных токов будет записываться как

$$U = \sum_{i,k} u_{ik} = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} J_i J_k\,. \tag{30.7}$$

Здесь введены *индуктивные коэффициенты*

$$L_{ik} = \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{\left(d\vec{l}_i, d\vec{l}_k\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}\,, \tag{30.8}$$

которые определяются исключительно геометрией, т.е. формой и размерами линейных проводников. Величины L_{ii} есть коэффициенты *самоиндукции*, а L_{ik} при $i \neq k$ – коэффициенты *взаимной индукции* этих проводников.

Коэффициент самоиндукции (индуктивность) линейного проводника является одним из важных понятий школьного курса физики[1)]. Однако изложенный выше материал не может быть непосредственно спроецирован на этот курс. К тому же вычисление интегралов (30.8) на практике оказывается весьма сложным делом. Мало того, при $k = i$ эти интегралы, задающие коэффициенты самоиндукции, расходятся. Последнее обстоятельство вовсе не удивительно, так как в силу (30.7) величина L_{ii} определяет *собственную* магнитную энергию линейного тока, которая, как и собственная электрическая анергия точечного заряда, бесконечно велика (см. §25).

Чтобы преодолеть указанные трудности, получим другое выражение для полной энергии магнитного поля системы линейных токов. Исходим непосредственно из формулы (30.2), учитываем свойство аддитивности $\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i$ и переходим от объемных токов к линейным:

[1)] Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, 1986, §96.

$$U=\frac{1}{2c}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\vec{A},\vec{j}\right)dV=\frac{1}{2c}\sum_i\int\limits_{V_i}\left(\vec{A},\vec{j}_i\right)dV=\frac{1}{2c}\sum_i J_i\oint\limits_{L_i}\left(\vec{A},d\vec{l}\right). \tag{30.9}$$

Но величина

$$\oint\limits_{L_i}\left(\vec{A},d\vec{l}\right)=\int\limits_{S_i}\left(rot\vec{A},d\vec{S}\right)=\int\limits_{S_i}\left(\vec{B},d\vec{S}\right)\equiv\Phi_i \tag{30.10}$$

есть *магнитный поток* через контур i-го проводника, создаваемый полями всех проводников, в том числе и данного. Подстановка (30.10) в (30.9) дает для полной магнитной энергии

$$U=\frac{1}{2c}\sum_i J_i\Phi_i\,. \tag{30.11}$$

Из сравнения этого выражения с (30.7) находим

$$\Phi_i=\frac{1}{c}\sum_k L_{ik}J_k\,. \tag{30.12}$$

Таким образом, индуктивные коэффициенты L_{ik} выступают в качестве коэффициентов линейных по токам J_k форм, задающих магнитные потоки через контуры проводников.

В частности, для уединенного проводника из (30.7), (30.11) и (30.12) находим

$$u=\frac{1}{2c^2}LJ^2=\frac{1}{2c}J\Phi,\;\; \Phi=\frac{1}{c}LJ\,. \tag{30.13}$$

Через посредство последнего соотношения (30.13) и вводится понятие индуктивности в школьном курсе физики[1]. Это соотношение дает также простую формулу

$$L=c\frac{\Phi}{J}\,, \tag{30.14}$$

с помощью которой обычно и вычисляют коэффициенты самоиндукции различных соленоидов и проволочных катушек[2].

Следует иметь в виду, однако, что формула (30.15), как и (30.8), дает для индуктивности идеального линейного проводника бесконечно большое значение. Но подобные бесконечности не должны вызывать беспокойства, ибо понятие линейного проводника (в отличие от понятия точечного заряда – см. §25) является заведомой идеализацией. Всякий реальный проводник имеет конечные поперечные размеры, и его индуктивность также конечна, причем ее значение тем больше, чем тоньше проводник.

Фактическое вычисление коэффициентов самоиндукции тонких проводников на практике оказывается довольно сложным делом. При соответствующих расчетах чаще используют не (30.14), а формулу

---

1) Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, 1986, §96. Появление в (30.13) «лишнего» множителя $1/c$ связано с использованием гауссовой системы единиц.

2) См., например: Сивухин Д.В. Общий курс физики, т. III. – Электричество. – М.: Наука, 1977, §68.

$$L = 2c^2 \frac{U}{J^2} \ , \tag{30.15}$$

вытекающую из первого соотношения (30.13). Энергия же магнитного поля U находится с помощью ее исходного выражения (30.1). В качестве примера приведем результат вычисления индуктивности тонкого кольца (радиус b) из неферромагнитного провода кругового сечения (радиус $a \ll b$):

$$L = 4\pi b \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right). \tag{30.16}$$

Эта формула не точная, а приближенная, но уже из ее структуры должно быть ясно, сколь сложен расчет индуктивности даже для простейших проводников[1)].

§31. Движущиеся частицы во внешнем магнитном поле

В заключение данной главы обсудим проблему, во многом аналогичную той, которая обсуждалась в §26 в рамках электростатики. Пусть имеется система заряженных частиц (или токов – объемных либо линейных), совершающих заданное движение во *внешнем* стационарном магнитном поле $\vec{B}(\vec{r})$, которое также считается заданным. Нас будут интересовать полные сила и момент сил, действующие на систему частиц со стороны внешнего поля, а также энергия ее взаимодействия с этим полем.

Начнем обсуждение с точных выражений для полной магнитной силы, действующей на систему частиц в разных физических ситуациях. На одну частицу действует магнитная часть силы Лоренца (4.1), и потому для системы точечных заряженных частиц имеем

$$\vec{F} = \sum_a \frac{q_a}{c} \left[\vec{v}_a, \vec{B}(\vec{r}_a) \right]. \tag{31.1}$$

Производя здесь подстановки (27.4), получим силу, действующую на объемный ток:

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_V \left[\vec{j}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r}) \right] dV \tag{31.2}$$

[см. формулы (4.5), (4.6) и (4.7)] и на линейный ток:

$$\vec{F} = \frac{J}{c} \oint_L \left[d\vec{l}, \vec{B}(\vec{r}) \right]. \tag{31.3}$$

Последнее выражение обычно записывают в дифференциальной форме

$$d\vec{F} = \frac{J}{c} \left[d\vec{l}, \vec{B} \right] , \tag{31.4}$$

и в итоге мы приходим к закону Ампера (4.8).

[1)] Вывод формулы (30.16) можно найти в кн.: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – Задача 2 к §34.

Снабдим теперь рассматриваемые токи индексом 1 и будем считать, что внешнее поле $\vec{B}$ создается некоторыми другими токами (с индексом 2), которые не перекрываются с рассматриваемыми. Тогда, учитывая общую формулу (27.16),

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_{V_2} \frac{\left[\vec{j}_2(\vec{r}_2), \vec{r}-\vec{r}_2\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|^3} dV_2 , \tag{31.5}$$

из (31.2) для полной силы $\vec{F}_{12}$, действующей на объемный ток 1 со стороны объемного тока 2, получим

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{c^2}\int\limits_{V_1}\int\limits_{V_2} \frac{\left[\vec{j}_1(\vec{r}_1), \left[\vec{j}_2(\vec{r}_2), \vec{r}_1-\vec{r}_2\right]\right]}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|^3} dV_1 dV_2 . \tag{31.6}$$

Аналогично, из (31.3) и (27,17) в случае линейных токов найдем

$$\vec{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2}\oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2} \frac{\left[d\vec{l}_1, \left[d\vec{l}_2, \vec{r}_1-\vec{r}_2\right]\right]}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|^3} . \tag{31.7}$$

Если записать это выражение в дифференциальной форме, то придем к закону Био – Савара – Лапласа (6.10):

$$d^2\vec{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2}\frac{\left[d\vec{l}_{1,}\left[d\vec{l}_2 \vec{R}_{12}\right]\right]}{R_{12}^3}, \qquad \vec{R}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 . \tag{31.8}$$

Все приведенные выше формулы являются точными, но на практике они зачастую оказываются не столь уж полезными (сравн. с §23, 26 и 29). Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы сформулировать достаточно простые приближенные результаты, справедливые в случае *квазиоднородного* внешнего поля $\vec{B}(\vec{r})$ (смысл термина разъяснен в §26). Их можно предугадать, отправляясь от аналогии магнитостатики с электростатикой, которая частично выявилась уже в §29 [сравн., например, формулы (29.12) и (23.18)] и в §30 [сравн. (30.2) и (25.3), (30.3) и (25.5)]. При этом для полноты аналогии естественно рассматривать электрически нейтральную $(Q=0)$ электростатическую систему частиц, ибо магнитных зарядов не существует. Итак, производя в соответствующих формулах из §26 замены $\vec{d} \to \vec{m}$ и $\vec{E} \to \vec{B}$ придем к следующей таблице.

Электростатика		*Магнитостатика*	
$\vec{F} = \left(\vec{d}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$	(26.11)	$\vec{F} = \left(\vec{m}, \vec{\nabla}\right)\vec{B}$	(31.9)
$U = -\left(\vec{d}, \vec{E}\right)$	(26.7)	$U = -\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$	(31.10)
$\vec{\mathrm{M}} = \left[\vec{d}, \vec{\mathrm{E}}\right]$	(26.12)	$\vec{\mathrm{M}} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$	(31.11)

Наиболее сложным является доказательство приближенной формулы (31.9) для полной магнитной силы[1)], которая более точно записывается как

[1)] Или по сути дела эквивалентной ей (см. ниже) формулы (31.10). Мы предпочитаем выбор в

$$\vec{F} = \left(\vec{m}, \vec{\nabla}\right) \vec{B}\left(\vec{r}\right)\Big|_{\vec{r}=0}. \tag{31.12}$$

Мы принимаем эту формулу без вывода (который можно найти в дополнении к данному параграфу), обсуждая ниже лишь важнейшие ее следствия.

Так, из (31.9) сразу вытекает, что в случае *однородного* магнитного поля сила равна нулю:

$$\vec{B} = const \Rightarrow \vec{F} = 0. \tag{31.13}$$

Если речь идет о замкнутом витке с током, то этот вывод вполне естественен. Действительно, в его элементах представлены всевозможные направления скорости движения зарядов, и действующие на эти заряды со стороны однородного магнитного поля элементарные силы Лоренца взаимно компенсируются.

Однако в случае, когда рассматривается система точечных заряженных частиц, результат (31.13) представляется довольно неожиданным и на первый взгляд даже неверным. Ведь получается, что при $\vec{B} = const$ магнитная сила, действующая на одну частицу, равна нулю, тогда как мы знаем, что она задается формулой (4.1) при $\vec{E} = 0$ и вовсе не равна нулю. Парадокс разрешается тем, что в данном случае речь идет не о самой силе $\vec{F}$, а о ее значении $\bar{\vec{F}}$, усредненном по времени (см. §27). Так, заряженная частица в однородном магнитном поле движется, как известно, по круговой винтовой линии, а если ее начальная скорость перпендикулярна вектору $\vec{B}$, – по окружности. Мгновенное значение силы Лоренца, конечно, отлично от нуля, ибо в противном случае частица двигалась бы равномерно и прямолинейно. Но столь же очевидно, что среднее значение этой силы, вычисленное за период, равно нулю, а именно это и утверждает (31.13).

Кстати, данный результат очень легко получить непосредственно из точного выражения (31.1), не прибегая к формуле (31.9). Действительно, при $\vec{B} = const$ это выражение имеет вид полной производной по времени:

$$\vec{F} = \sum_a \frac{q_a}{c}\left[\frac{d\vec{r}_a}{dt}, \vec{B}\right] = \frac{d}{dt}\left\{\sum_a \frac{q_a}{c}\left[\vec{r}_a, \vec{B}\right]\right\},$$

и потому его следует считать равным нулю. Как говорилось в §27, точно это означает как раз то, что в процессе усреднения данная величина обращается в нуль в силу соотношения (27.3).

Вернемся к формуле (31.9) и представим ее в несколько иной форме. С этой целью рассмотрим соотношение

$$grad\left(\vec{m}, \vec{B}\right) = \left(\vec{m}, \vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}, \vec{\nabla}\right)\vec{m} + \left[\vec{m},\ rot\ \vec{B}\right] + \left[\vec{B},\ rot\ \vec{m}\right], \tag{31.14}$$

известное из векторного анализа. Учитывая, что оператор дифференцирования действует на координаты $\vec{r}$ точки наблюдения, от которых зависит поле $\vec{B}$, но не на координаты $\vec{r}_a$ частиц, которые входят в магнитный момент $\vec{m}$, заключаем, что второе и четвертое слагаемые в правой части (31.14) равны нулю. Кроме того, для внешнего поля $rot\ \vec{B} = 0$ (оно

качестве исходного именно выражение (31.9) для силы, а затем выводим из него формулу (31.10). Дело в том, что физический смысл величины U в данном случае достаточно сложен и не совсем однозначен. При детальном анализе оказывается, что ее нельзя трактовать как «настоящую» потенциальную энергию.

создается токами, расположенными где-то вдали от системы частиц), а потому обращается в нуль и третье слагаемое в правой части (31.14). Поэтому в рассматриваемом случае

$$grad\left(\vec{m},\vec{B}\right)=\left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\vec{B}\,. \qquad (31.15)$$

Сравнение с (31.9) и дает нам другое выражение для магнитной силы:

$$\vec{F}=grad\left(\vec{m},\vec{B}\right). \qquad (31.16)$$

Таким образом, мы видим, что эту силу можно представить в форме, аналогичной той, в которой представляется потенциальная энергия в механике:

$$\vec{F}=-grad\;U\,, \qquad (31.17)$$

где

$$U=-\left(\vec{m},\vec{B}\right). \qquad (31.18)$$

В итоге приходим к формуле (31.10). Однако здесь величина U не имеет столь простого физического смысла, как в механике, и поэтому ее часто называют не потенциальной энергией, а *потенциальной функцией*[1)].

Рассмотрим две финитные системы заряженных частиц, разделенных достаточно большим расстоянием (см. рисунок на с.128) и найдем потенциальную функцию (энергию) U_{12} их магнитного взаимодействия. Воспользуемся для этого приемом, описанным в конце §26. Считаем вторую систему находящейся в магнитном поле первой системы и записываем в соответствии с (31.10)

$$U_{12}=-\left(\vec{m}_2,\vec{B}_1\right). \qquad (31.19)$$

Подставляя сюда для поля $\vec{B}_1$ его приближенное выражение (29.12)

$$\vec{B}_1=\frac{3\vec{r}\left(\vec{m}_1,\vec{r}\right)-r^2m_1}{r^5}\,, \qquad (31.20)$$

справедливое при больших r, получим формулу

$$U_{12}=\frac{\left(\vec{m}_1,\vec{m}_2\right)r^2-3\left(\vec{m}_1,\vec{r}\right)\left(\vec{m}_2,\vec{r}\right)}{r^5}\,, \qquad (31.21)$$

полностью аналогичную формуле (26.15) из электростатики.

Выведем теперь из (31.10) формулу (31.11). Для этого учтем, что момент силы $\vec{M}$ выражается через потенциальную функцию U, обладающую всеми формальными свойствами потенциальной энергии, следующим образом[2)]:

[1)] Иногда потенциальной энергией именуют величину $W_m=-U$, но и эта терминология не вполне адекватна.

[2)] См., например: Жирнов Н.И. Классическая механика. – М.: Просвещение, 1980, §12.

$$\vec{M} = -\frac{\partial u}{\partial \vec{\varphi}} \equiv \left\{ -\frac{\partial u}{\partial \varphi_x}, -\frac{\partial u}{\partial \varphi_y}, -\frac{\partial u}{\partial \varphi_z} \right\}, \qquad (31.22)$$

где φ_α – углы поворота вокруг соответствующих координатных осей. Но, согласно (31.10),

$$U = -mB\cos\theta = -mB\cos\varphi_z\,, \qquad (31.23)$$

причем последняя форма записи указывает, что ось z выбрана перпендикулярной плоскости, в которой лежат векторы $\vec{m}$ и $\vec{B}$. Подставляя (31.23) в (31.22) и принимая во внимание, что квазиоднородное поле $\vec{B}(\vec{r})$ в нулевом приближении можно считать однородным $\left(\vec{B} = const\right)$, найдем

$$\vec{M} = \{0, 0, -mB\sin\theta\}, \qquad (31.24)$$

и в итоге приходим к формуле (31.11).

Сформулированные в данном параграфе результаты играют важную роль в атомной и в ядерной физике. Они используются при анализе эффекта Зеемана, опытов типа Штерна – Герлаха и свойств ядерных сил, при рассмотрении явлений электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) и ядерного магнитного резонанса (ЯМР), при теоретическом обосновании способов измерения магнитных моментов атомов, атомных ядер и элементарных частиц и др.

Дополнение к §31*

Выведем приближенное выражение (31.9) для полной магнитной силы, действующей со стороны квазиоднородного поля на финитную систему заряженных частиц. Помещая начало координат внутри этой системы и подставляя в точную формулу (31.1) первые два члена разложения магнитного поля

$$\vec{B}(\vec{r}_a) = \vec{B}(0) + \left(\vec{r}_a, \vec{\nabla}\right)\vec{B}(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \ldots \qquad (31.25)$$

[сравн. с (26.8)], получим

$$\vec{F} \cong \sum_a \frac{q_a}{c}\left[\vec{v}_a, \vec{B}(0)\right] + \sum_a \frac{q_a}{c}\left[\vec{v}_a, \left(\vec{r}_a, \vec{\nabla}\right)\vec{B}(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0}\right] \equiv \vec{F}_0 + \vec{F}_1\,. \qquad (31.26)$$

Первая сумма представляется в виде

$$\vec{F}_0 \equiv \sum_a \frac{q_a}{c}\left[\frac{d\vec{r}_a}{dt}, \vec{B}(0)\right] = \frac{d}{dt}\left\{\sum_a \frac{q_a}{c}\left[\vec{r}_a, \vec{B}(0)\right]\right\} \qquad (31.27)$$

и после усреднения по времени обращается в нуль. Вторую сумму в (31.26) преобразуем способом, аналогичным тому, который применялся при преобразовании (29.5) в (29.7). Опуская для краткости указание на то, что в $\vec{B}(\vec{r})$ нужно положить после дифференцирования $\vec{r} = 0$, будем иметь

$$\vec{F}_1 \equiv \sum_a \frac{q_a}{c}\left[\vec{v}_a,\left(\vec{r}_a,\vec{\nabla}\right)\vec{B}\right] = \sum_a \frac{q_a}{c}\left[\vec{v}_a,\left(\vec{\nabla},\vec{r}_a\right)\vec{B}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_a \frac{q_a}{c}\left[\frac{d\vec{r}_a}{dt},\left(\vec{\nabla},\vec{r}_a\right)\vec{B}\right] + \frac{1}{2}\sum_a \frac{q_a}{c}\left[\vec{v}_a,\left(\vec{\nabla},\vec{r}_a\right)\vec{B}\right] =$$

$$= \cancelto{=0}{\frac{d}{dt}\left\{\sum_a \frac{q_a}{2c}\left[\vec{r}_a,\left(\vec{\nabla},\vec{r}_a\right)\vec{B}\right]\right\}} - \frac{1}{2}\sum_a \frac{q_a}{c}\left[\vec{r}_a,\left(\vec{\nabla},\vec{v}_a\right)\vec{B}\right] + \frac{1}{2}\sum_a \frac{q_a}{c}\left[\vec{v}_a,\left(\vec{\nabla},\vec{r}_a\right)\vec{B}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_a \frac{q_a}{c}\left[\vec{v}_a\left(\vec{\nabla},\vec{r}_a\right) - \vec{r}_a,\left(\vec{\nabla},\vec{v}_a\right)\vec{B}\right] = \frac{1}{2c}\sum_a q_a\left[\left[\vec{\nabla},[\vec{v}_a,\vec{r}_a]\right],\vec{B}\right] =$$

$$= \left[\left[\frac{1}{2c}\sum_a q_a\left[\vec{r}_a,\vec{v}_a\right],\vec{\nabla}\right],\vec{B}\right] = \left[\left[\vec{m},\vec{\nabla}\right],\vec{B}\right].$$

Преобразуем последнее выражение, отмечая при необходимости вектор галочкой для указания того, что только на него и действует оператор дифференцирования:

$$\vec{F}_1 = \left[\left[\vec{m},\vec{\nabla}\right],\vec{B}\right] = \left[\check{\vec{B}},\left[\vec{\nabla},\vec{m}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\check{\vec{B}},\vec{m}\right) - \vec{m}\left(\check{\vec{B}},\vec{\nabla}\right) =$$

$$= \vec{\nabla}\left(\vec{m},\vec{B}\right) - \vec{m}\left(\vec{\nabla},\vec{B}\right) = grad\left(\vec{m},\vec{B}\right) - \vec{m}\,div\vec{B} = \left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\vec{B},$$

где на последнем этапе использовано соотношение (31.15) и принято во внимание, что для магнитного поля всегда $div\vec{B} = 0$. Формула (31.9) доказана.

Докажем ее другим способом, рассматривая не систему точечных частиц, а замкнутый линейный проводник с постоянным током. Сформулируем предварительно одно важное математическое утверждение. Исходим из обычной теоремы Стокса, которую представим в следующей форме:

$$\oint_L \left(d\vec{l},\vec{a}\right) = \int_S \left(rot\ \vec{a},d\vec{S}\right) = \int_S \left(\left[\vec{\nabla},\vec{a}\right],d\vec{S}\right) = \int_S \left(\left[d\vec{S},\vec{\nabla}\right],\vec{a}\right).$$

Отсюда видно, что при переходе от интеграла по замкнутому контуру к интегралу по натянутой на него поверхности следует элемент длины $d\vec{l}$ поставить на первое место и затем произвести замену

$$d\vec{l} \mapsto \left[d\vec{S},\vec{\nabla}\right]. \tag{31.28}$$

Это утверждение называется обобщенной теоремой Стокса.

Применяя ее к выражению (31.3) для силы, действующей со стороны магнитного поля на контур с током, найдем

$$\vec{F} = \frac{J}{c}\oint_L \left[d\vec{l},\vec{B}\right] = \frac{J}{c}\int_S \left[\left[\vec{n},\vec{\nabla}\right],\vec{B}\right]dS. \tag{31.29}$$

Подынтегральное выражение преобразуется следующим образом:

$$\left[\left[\vec{n},\vec{\nabla}\right],\vec{B}\right] = \left[\check{\vec{B}},\left[\vec{\nabla},\vec{n}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\check{\vec{B}},\vec{n}\right) - \vec{n}\left(\check{\vec{B}},\vec{\nabla}\right) = \left(\vec{n},\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left[\vec{n},rot\vec{B}\right] - \vec{n}\ div\vec{B}.$$

Поэтому, учитывая, что $div\vec{B}=0$, а для внешнего поля и $rot\ \vec{B}=0$, имеем

$$\vec{F}=\frac{J}{c}\int_S\left(d\vec{S},\vec{\nabla}\right)\vec{B}. \tag{31.30}$$

В случае квазиоднородного поля вектор $\vec{B}$ вместе с оператором $\vec{\nabla}$ можно вынести за знак интеграла. В итоге, вспоминая формулу (29.16), мы и придем к доказываемому результату:

$$\vec{F}=\left(\left\{\frac{J}{c}\int_S d\vec{S}\right\},\vec{\nabla}\right)\vec{B}=\left(\frac{J}{c}\vec{S},\vec{\nabla}\right)\vec{B}=\left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\vec{B}.$$

Получим теперь формулу (31.11) для момента силы, не обращаясь к понятию потенциальной функции и к выражению (31.10) для нее. Исходим непосредственно из определения полного момента сил и из выражения для магнитной части силы Лоренца, действующей на одну частицу:

$$\vec{M}=\sum_a\left[\vec{r}_a,\vec{F}_a\right]=\sum_a\frac{q_a}{c}\left[\vec{r}_a,\left[\vec{v}_a,\vec{B}(\vec{r}_a)\right]\right]. \tag{31.31}$$

Преобразуем правую часть, считая в нулевом приближении $\vec{B}=const$:

$$\vec{M}=\sum_a\frac{q_a}{c}\left\{\vec{v}_a\left(\vec{r}_a,\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\vec{r}_a,\vec{v}_a\right)\right\}=\sum_a\frac{q_a}{c}\vec{v}_a\left(\vec{B},\vec{r}_a\right)-\frac{d}{dt}\left\{\sum_a\frac{q_a}{c}\vec{B}\vec{r}_a^{\,2}\right\}.$$

Отбрасываем полную производную и проводим дальнейшие преобразования:

$$\begin{aligned}\vec{M}&=\frac{1}{2}\sum_a\frac{q_a}{c}\frac{d\vec{r}_a}{dt}\left(\vec{B},\vec{r}_a\right)+\frac{1}{2}\sum_a\frac{q_a}{c}\vec{v}_a\left(\vec{B},\vec{r}_a\right)=\\&=\frac{d}{dt}\left\{\sum_a\frac{q_a}{2c}\vec{r}_a\left(\vec{B},\vec{r}_a\right)\right\}-\frac{1}{2}\sum_a\frac{q_a}{c}\vec{r}_a\left(\vec{B},\vec{v}_a\right)+\frac{1}{2}\sum_a\frac{q_a}{c}\vec{v}_a\left(\vec{B},\vec{r}_a\right)=\\&=\frac{1}{2c}\sum_a q_a\left\{\vec{v}_a\left(\vec{B},\vec{r}_a\right)-\vec{r}_a\left(\vec{B},\vec{v}_a\right)\right\}=\frac{1}{2c}\sum_a q_a\left[\vec{B},[\vec{v}_a,\vec{r}_a]\right]=\\&=\left[\frac{1}{2c}\sum_a q_a\left[\vec{r}_a,\vec{v}_a\right],\vec{B}\right]=\left[\vec{m},\vec{B}\right],\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Выясним теперь природу потенциальной функции U, задаваемой формулой (31.10). Магнитная сила, действующая на заряженную частицу, не является потенциальной. Но, как известно[1)], существует функция Лагранжа

$$L_a=\frac{m_a\vec{v}_a^{\,2}}{2}+\frac{q_a}{c}\left(\vec{v}_a,\vec{A}(\vec{r}_a)\right)-q_a\varphi(\vec{r}_a), \tag{31.32}$$

с помощью которой получается правильное уравнение движения частицы с силой Лоренца.

[1)] См., например: Жирнов Н.И. Классическая механика. – М.: Просвещение, 1980, §29.

Для системы невзаимодействующих частиц

$$L = \sum_a L_a = \sum_a \frac{m_a \vec{v}_a^2}{2} + \sum_a \frac{q_a}{c}\left(\vec{v}_a, \vec{A}(\vec{r}_a)\right) - \sum_a q_a \varphi(\vec{r}_a) \equiv L_0 + L_M + L_E \ , \tag{31.33}$$

где через L_M и L_E обозначены магнитная и электрическая части функции Лагранжа (в случае стационарного поля такая терминология допустима).

Преобразуем член L_M, считая в нулевом приближении квазиоднородное поле $\vec{B}(\vec{r})$ однородным и учитывая, что для однородного поля

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[\vec{B}, \vec{r}\right]. \tag{31.34}$$

(Читателю предлагается самостоятельно проверить, что при $\vec{B} = const$ действительно $rot\ \vec{A} = \vec{B}$.) Подстановка (31.34.) в L_M дает

$$L_M \equiv \sum_a \frac{q_a}{c}\left(\vec{v}_a, \vec{A}(\vec{r}_a)\right) \cong \sum_a \frac{q_a}{2c}\left(\vec{v}_a, \left[\vec{B}, \vec{r}_a\right]\right) = \left(\frac{1}{2c}\sum_a q_a \left[\vec{r}_a, \vec{v}_a\right], \vec{B}\right),$$

т.е.

$$L_M = \left(\vec{m}, \vec{B}\right). \tag{31.35}$$

Заметим, что и электрическая часть функции Лагранжа (31.33) может быть представлена аналогичным образом:

$$L_E = \left(\vec{d}, \vec{E}\right). \tag{31.36}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в L_E выражение

$$\varphi(\vec{r}) = -\left(\vec{r}, \vec{E}\right) \tag{31.37}$$

для потенциала однородного электрического поля $\vec{E}$.

Величина $U = -L_E$ несомненно имеет смысл потенциальной энергии нейтральной в целом системы заряженных частиц во внешнем электрическом поле. Но такое заключение следует вовсе не из структуры функции Лагранжа, а из независимых соображений – из того, что стационарные электрические силы являются потенциальными. Именно на этом основывался вывод выражения (26.7) для U в рамках электростатики.

Совсем иначе обстоит дело с величиной (31.35). Иногда в учебной литературе она отождествляется с магнитной энергией[1)]. Однако подобная трактовка представляется нам неудачной, ибо функция Лагранжа не есть энергия. Мало того, далеко не всегда ее удается представить в «канонической» форме $L = T - U$, и (31.33) дает как раз пример такого рода.

[1)] См., например: Измайлов С.В. Курс электродинамики. – М.: Учпедгиз, 1962, §39; Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985, §26.3. В первом из этих учебников «магнитной энергии» $\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$ придается даже смысл кинетической энергии.

Независимой же интерпретации величины L_M (или $-L_M$) как потенциальной энергии не существует, поскольку исходная сила (магнитная часть силы Лоренца) не относится к числу потенциальных.

Заметим, что согласно (31.16) для полной силы $\vec{F}$, задаваемой формулой (31.9), можно записать

$$\vec{F} = grad\ L_M\ . \tag{31.38}$$

Этот результат вполне согласуется с лагранжевым формализмом, так как обобщенная сила Q_α, отвечающая обобщенной координате q_α, равна как раз $Q_\alpha = \partial L / \partial q_\alpha$. Величина же $U = -L_M$ вводится исключительно для того, чтобы сохранить максимальное сходство с ньютоновым формализмом, в котором $\vec{F} = -gradU$. В механике величина U есть потенциальная энергия, но здесь, как мы видели, она такого смысла не имеет. По этой причине мы и предпочитаем называть эту величину потенциальной функцией.