

## Глава VI. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВАКУУМЕ

## §32. Свободное электромагнитное поле

Теперь мы переходим к анализу *нестационарных* электромагнитных явлений. Начнем с рассмотрения *свободного* электромагнитного поля, т.е. поля в тех областях пространства, где отсутствуют его источники – заряженные частицы:  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ . В этом случае уравнения Максвелла (8.1) превращаются в систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}, \quad (32.1)$$

из которой вытекают *волновые уравнения* (9.6)

$$\square \vec{E} = 0, \quad \square \vec{B} = 0, \quad (32.2)$$

где  $\square$  – оператор Даламбера, определяемый формулой (9.3).

Поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  выражаются через скалярный и векторный потенциалы  $\varphi$  и  $\vec{A}$ , согласно (10.3):

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (32.3)$$

Если подчинить  $\varphi$  и  $\vec{A}$  условию Лоренца (10.7), то они будут удовлетворять уравнениям Даламбера (10.8), которые в случае свободного электромагнитного поля также превращаются в волновые уравнения

$$\square \varphi = 0, \quad \square \vec{A} = 0. \quad (32.4)$$

Итак, каждая из величин  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\varphi$ ,  $\vec{A}$ , которые характеризуют состояние свободного электромагнитного поля и совокупность которых мы будем обозначать единым символом  $f$ , удовлетворяет уравнению

$$\square f \equiv \nabla^2 f(\vec{r}|t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}|t)}{\partial t^2} = 0. \quad (32.5)$$

Нас будут интересовать в основном его волновые решения, отвечающие распространению электромагнитного поля в пустом пространстве. Качественно возможность существования электромагнитных волн в вакууме можно усмотреть уже из самой структуры уравнений Максвелла (32.1). Из них видно, что переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле, которое, в свою очередь, вызывает появление нового переменного электрического поля, и т.д., причем данный процесс захватывает все большие и большие области пространства. Заметим, что именно так объясняется возникновение электромагнитных волн в школьном курсе физики. Ниже будет проведен строгий математический анализ этого явления.

Дополнение к §32\*

Указанный анализ часто проводится на языке потенциалов. Его можно упростить, совершая определенное калибровочное преобразование

$$\varphi \mapsto \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_0}{\partial t}, \quad \vec{A} \mapsto \vec{A} + \text{grad } \psi_0 \quad (32.6)$$

с некоторой функцией  $\psi_0$ , которая сама подчиняется уравнению

$$\square \psi_0 = 0. \quad (32.7)$$

Как показано в дополнении к §10, только в этой случае калибровочное преобразование (32.6) не нарушает условие Лоренца (10.7).

Выберем в качестве  $\psi_0$  функцию

$$\psi_0(\vec{r}|t) = c \int \varphi(\vec{r}|t) dt, \quad (32.8)$$

где  $\varphi$  – скалярный потенциал. Убедимся, что эта функция действительно удовлетворяет необходимому условию (32.7):

$$\square \psi_0 = c \square \int \varphi dt = c \int \square \varphi dt = 0.$$

На последнем этапе здесь использовано первое уравнение (32.4).

Учитывая, что  $\partial \psi_0 / \partial t = c\varphi$ , для преобразованного скалярного потенциала из (32.6) получим

$$\varphi = 0. \quad (32.9)$$

В итоге задача сводится к отысканию лишь векторного потенциала  $\vec{A}$ . Он по-прежнему удовлетворяет волновому уравнению (32.4)  $\square \vec{A} = 0$ , а условие Лоренца (10.7) превращается ввиду (32.9) в условие

$$\text{div } \vec{A} = 0, \quad (32.10)$$

по форме совпадающее с кулоновской калибровкой (10.11). Калибровка (32.9), дополненная ограничением (32.10), называется *волновой* калибровкой. Согласно (32.3), в этой калибровке поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  выражаются через векторный потенциал  $\vec{A}$  следующим образом:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (32.11)$$

§33. Плоские электромагнитные волны в вакууме

Рассмотрим важный случай *плоского* (одномерного) электромагнитного поля. По определению, это такое поле, для которого переменные состояния  $f$  (напомним, что  $f = \vec{E}, \vec{B}, \vec{A}, \varphi$ ) меняются лишь в одном направлении. Принимая для определенности его за ось  $x$ , будем иметь  $f = f(x|t)$ . Если плоское поле является свободным, то  $f$  подчиняется волновому уравнению (32.5), которое теперь будет выглядеть как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \quad (33.1)$$

Переписываем это уравнение следующим образом:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \left( \frac{x}{c} \right)} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \left( \frac{x}{c} \right)} \right) f = 0. \quad (33.2)$$

Отсюда становится очевидной естественность замены переменных

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c}, \quad \text{или} \quad t = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi). \quad (33.3)$$

Для производных по новым переменным имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (33.4,а)$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (33.4,б)$$

так что в этих переменных уравнение (33.2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (33.5)$$

где  $\tilde{f}(\xi, \eta) = f(x|t)$ . Интегрируем обе части (33.5) по переменной  $\eta$ :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} = g(\eta).$$

Проводя теперь интегрирование по переменной  $\xi$ , найдем

$$\tilde{f} = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Таким образом, для плоского электромагнитного поля общее решение волнового уравнения (33.1) имеет вид

$$f(x|t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (33.6)$$

Где  $f_1$  и  $f_2$  – произвольные функции.

Чтобы выяснить смысл этого результата, рассмотрим решение с  $f_2 = 0$ :

$$f(x|t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (33.7)$$

В каждой плоскости  $x = const$  поле изменяется во времени. В каждый момент времени  $t = const$  поле различно в точках пространства с разными координатами  $x$ . Поле одинаково для тех точек и моментов времени, для которых

$$t - \frac{x}{c} = const \equiv -\frac{x_0}{c},$$

т.е.

$$x = x_0 + ct. \quad (33.8)$$

Иными словами, если при  $t = 0$  в точке пространства с координатой  $x_0$  полевая переменная  $f$  имела значение  $f_1^0$ , то к моменту времени  $t = \tau$  это ее значение распространится вдоль оси  $x$  на расстояние  $c\tau$ . Таким образом, решению (33.7) соответствует электромагнитное поле, бегущее в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $c$ , т.е. *плоская электромагнитная волна*.

Аналогично, решение

$$f(x|t) = f_2\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (33.9)$$

которое получается из (33.6) при  $f_1 = 0$ , отвечает плоской электромагнитной волне, бегущей со скоростью  $c$  в отрицательном направлении оси  $x$ . Общее решение (33.6) описывает суперпозицию двух электромагнитных волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

Все сказанное выше справедливо, по сути дела, не только для электромагнитных волн, но и для волн любой природы, например, акустических. Специфика состоит лишь в том, что возникновение электромагнитных волн не требует никакой упругой среды, и они распространяются в вакууме. Кроме того, скорость их распространения есть

$$v = c. \quad (33.10)$$

Тем самым проясняется и физический смысл электродинамической постоянной  $c$  как скорости электромагнитных волн. Эта постоянная вошла в физику до появления теории Максвелла, и чисто электродинамические измерения показали, что она равна примерно  $3 \cdot 10^{10}$  см/с, т.е. что ее значение совпадает со значением скорости света в вакууме. Общеизвестно, сколь важную роль сыграло выяснение всех этих обстоятельств в истории физики, при установлении электромагнитной природы *света*.

Обратимся к более детальному анализу свойств электромагнитных волн в вакууме, состояние которых характеризуется векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Ниже нам потребуются две формулы дифференцирования скалярной функции  $f$ , зависящей от волнового аргумента  $\xi = t - x/c$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f', \quad \vec{\nabla} f = -\frac{1}{c} f' \vec{n}, \quad (33.11)$$

где штрих означает дифференцирование по всему аргументу  $\xi$ , а  $\vec{n}$  есть единичный вектор вдоль оси  $x$ , т.е. вдоль направления распространения волны. Первая из формул (33.11) очевидна, а вторая доказывается весьма просто:

$$\vec{\nabla} f \left( t - \frac{x}{c} \right) = f' \vec{\nabla} \left( t - \frac{x}{c} \right) = -\frac{1}{c} f' \vec{\nabla} x = -\frac{1}{c} f' \vec{n}.$$

Итак, рассматриваем электромагнитную волну, бегущую в положительном направлении оси  $x$ . Полагая  $f = E_x, E_y, E_z$ , из (33.7) получим для вектора напряженности электрического поля в этой волне

$$\vec{E} = \vec{E} \left( t - \frac{x}{c} \right). \quad (33.12)$$

Ограничимся случаем *линейно поляризованной* плоской электромагнитной волны, в которой вектор  $\vec{E}$  остается все время параллельным некоторому постоянному единичному вектору  $\vec{e}$ , называемому *вектором поляризации*. Для такой волны можно записать

$$\vec{E} = \vec{e} f \left( t - \frac{x}{c} \right). \quad (33.13)$$

Магнитное поле  $\vec{B}$  находится с помощью четвертого уравнения (32.1):

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} = -\text{rot } (\vec{e} f).$$

Учитывая, что  $\vec{B} = \vec{B}(t - x/c)$  и вспоминая формулы (33.11), получим отсюда

$$\frac{1}{c} \vec{B}' = -[\vec{\nabla}, \vec{e} f] = -[\vec{\nabla} f, \vec{e}] = -\left[ -\frac{1}{c} f' \vec{n}, \vec{e} \right] = \frac{1}{c} [\vec{n}, \vec{e}] f',$$

так что

$$\vec{B} = [\vec{n}, \vec{e}] f \left( t - \frac{x}{c} \right) \equiv \vec{b} f \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad \vec{b} = \text{const}. \quad (33.14)$$

Постоянная интегрирования выбрана равной нулю, ибо нас интересует только переменное поле. Принимая во внимание (33.13), будем иметь

$$\vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}]. \quad (33.15)$$

Аналогично, если исходить из выражения (33.14) для магнитного поля, то с помощью второго уравнения (32.1) найдем

$$\vec{E} = -[\vec{n}, \vec{B}]. \quad (33.16)$$

Воспользуемся теперь первым уравнением Максвелла (32.1):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(\vec{e}f) = 0.$$

Вновь используя формулы дифференцирования (33.11), будем иметь

$$(\vec{\nabla}, \vec{e}f) = (\vec{e}, \vec{\nabla}f) = \left( \vec{e}, -\frac{1}{c} f' \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} f' (\vec{e}, \vec{n}) = 0,$$

так что  $(\vec{e}, \vec{n}) = 0$ , или

$$(\vec{n}, \vec{E}) = 0. \quad (33.17)$$

Аналогично из (33.14) и третьего уравнения (32.1) получим

$$(\vec{n}, \vec{B}) = 0. \quad (33.18)$$

Из сопоставления (33.14) с (33.13) видно, что поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в плоской электромагнитной волне изменяются в пространстве и во времени синхронно. Из (33.17) и (33.18) явствует, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, т.е. что она является *поперечной*. Формулы (33.15) и (33.16) показывают, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  взаимно перпендикулярны, а если учесть предыдущее их свойство, то получим, что они равны по модулю ( $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  сравниваются здесь в одной точке пространства в один и тот же момент времени). В итоге установлены все важнейшие свойства плоских электромагнитных волн

$$\boxed{\vec{E} \perp \vec{n}, \quad \vec{B} \perp \vec{n}; \quad \vec{E} \perp \vec{B}; \quad |\vec{E}| = |\vec{B}|}, \quad (33.19)$$

которые уже использовались в §12 при вычислении давления света.

#### Дополнение к §33\*

Свойства плоских электромагнитных волн выше были установлены в предположении, что эти волны линейно поляризованы. Однако последнее ограничение не является существенным, в чем мы сейчас и убедимся.

Используем волновую калибровку (32.9) и исходим из выражения

$$\vec{A} = \vec{A} \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

для векторного потенциала, отвечающего плоской волне, которая бежит в положительном направлении оси  $x$ . Калибровочное условие (32.10) превращается в данном случае в

равенство  $\partial A_x / \partial x = 0$ , из которого следует, что  $\partial^2 A_x / \partial x^2 = 0$ . Но тогда из волнового уравнения (32.4) получаем  $\partial^2 A_x / \partial t^2 = 0$ , откуда  $\partial A_x / \partial t = \text{const}$  и, согласно (32.11),

$$E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const}$$

Однако постоянное продольное электрическое поле не имеет отношения к электромагнитной волне, и мы его положим равным нулю:  $E_x = 0$ . В итоге заключаем, что не только  $\partial A_x / \partial x = 0$ , но и  $\partial A_x / \partial t = 0$  а потому  $A_x = \text{const}$ . При этом подходящим выбором функции  $\psi_0$  в калибровочном преобразовании (32.6) данную постоянную можно обратить в нуль. Иными словами, без всякого ограничения общности можно считать, что

$$A_x = 0,$$

т.е. что вектор  $\vec{A}$  лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, которое задается единичным вектором  $\vec{n}$ :

$$\vec{A} \perp \vec{n}.$$

Электрическое и магнитное поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  находим с помощью соотношений (32.11):

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \vec{A}'$$

и

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \left[ \vec{\nabla}, \vec{A} \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] = \left[ \vec{\nabla} \left( t - \frac{x}{c} \right), \vec{A}' \right] = -\frac{1}{c} [\vec{n}, \vec{A}'] = [\vec{n}, \vec{E}]$$

(штрих означает дифференцирование по волновому аргументу  $t - x/c$ ). Из приведенных соотношений видно, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  изменяются синхронно, перпендикулярны направлению распространения волны (свойство поперечности), перпендикулярны друг другу и равны по модулю. А это и есть основные свойства плоской электромагнитной волны, которые теперь установлены в самой общей ситуации.

### §34. Сферические волны

Рассмотрим теперь случай *сферического* электромагнитного поля, для которого переменные состояния  $f$  зависят, при выбранном начале отсчета  $O$ , только от времени  $t$  и радиальной координаты  $r$ , т.е. от расстояния до точки  $O$ :  $f = f(r|t)$ . Будем считать, что источники поля (заряженные частицы) имеются лишь в некоторой окрестности точки  $O$ . Вне этой области функция  $f$  подчиняется волновому уравнению (32.5), которое запишем в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (34.1)$$

Чтобы свести задачу к уже рассмотренной, сделаем замену неизвестной функции:

$$f(r|t) = \frac{1}{r} \chi(r|t). \quad (34.2)$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\chi}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \chi,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \chi}{\partial r} - \chi \right) = r \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}.$$

Подставляя это выражение и (34.2) в уравнение (34.1), получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad (34.3)$$

В итоге мы пришли к уравнению, которое отличается от (33.1) лишь заменой  $x \mapsto r$ . Поэтому, чтобы найти его общее решение, достаточно в (33.6) сделать эту же замену, и мы получим

$$\chi(r|t) = f_1 \left( t - \frac{r}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{r}{c} \right).$$

Возвращаясь к исходной функции  $f$ , окончательно будем иметь

$$f(r|t) = \frac{f_1 \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} + \frac{f_2 \left( t + \frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (34.4)$$

Первое слагаемое соответствует электромагнитной волне, амплитуда которой убывает по закону  $1/r$  и которая бежит со скоростью  $c$  вдоль радиуса от точки  $O$ . Второе слагаемое отвечает аналогичной волне, бегущей в противоположном направлении. Таким образом, общее решение (34.4) описывает суперпозицию расходящейся и сходящейся *сферических* электромагнитных волн.

В каждой такой волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  обладают всеми теми же свойствами (33.19), что и в плоской волне. В данном случае их установление требует довольно громоздких выкладок, и мы их опускаем. Это тем более допустимо, что в общей ситуации свойства (33.19) для сферических волн нам не потребуются. Дело в том, что в дальнейшем достаточно будет рассматривать сферические волны только на больших расстояниях от их источника, т.е. при больших  $r$  (см. гл.VII). А при таком условии всякую сферическую волну в малых участках пространства можно считать плоской волной, со всеми протекающими отсюда последствиями.



Приведем несколько более строгое обоснование сказанному. В процессе установления свойств (33.19) приходится дифференцировать функции вида (34.4) по времени и по координатам. При вычислении производных по времени величину  $1/r$  следует, естественно, считать постоянной. Если бы это было так и при вычислении производных по координатам, то никаких проблем не возникало бы, ибо все выкладки были бы идентичны тем, которые проводились в предыдущем параграфе. Разумеется,  $1/r \neq const$ , что и приводит к усложнениям расчетов. Но если  $r$  велико, то в процессе дифференцирования  $1/r$  все-таки можно считать постоянной величиной. Убедимся в этом на примере вычисления градиента левого слагаемого в (34.4):

$$\text{grad}\left(\frac{f_1}{r}\right) = \frac{1}{r} \text{grad} f_1 + f_1 \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} \text{grad} f_1 - \frac{1}{r^2} f_1 \vec{r}.$$

При больших  $r$  первый член ведет себя как  $1/r$ , а второй – как  $1/r^2$ , так что при  $r \rightarrow \infty$  второй член убывает значительно быстрее первого, и им можно пренебречь. В итоге получаем

$$\text{grad}\left(\frac{f_1}{r}\right) \cong \frac{1}{r} \text{grad} f_1,$$

а это и соответствует тому, что при больших  $r$  можно считать  $1/r = const$ .

Рассмотренные здесь кратко основные свойства сферических волн будут существенно использованы в следующей главе, при анализе излучения электромагнитных волн.

### §35. Монохроматические плоские электромагнитные волны

Электромагнитное поле называется *монохроматическим*, если его переменные состояния  $f$  изменяются во времени по гармоническому закону, т.е. если они зависят от времени через посредство множителя  $\cos(\omega t + \alpha)$ . Как мы видели в §33, в *плоской* электромагнитной волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , переменные состояния  $f$  зависят только от аргумента  $t - x/c$ . Поэтому для плоской монохроматической волны полевые переменные есть гармонические функции от  $t - x/c$ :

$$f(x|t) = f_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right]. \quad (35.1)$$

Здесь  $f_0, \omega$  и  $\alpha$  – амплитуда, (циклическая) частота и начальная фаза соответственно, причем частота  $\omega$  определяет период  $T$  изменения поля:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (35.2)$$

Очень удобно представлять полевые переменные в виде вещественной части от некоторой комплексной функции. Для этого достаточно переписать выражение (35.1) как

$$f = \operatorname{Re} \left\{ f_0 e^{-i \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ f_0 e^{-i\alpha} e^{-i\omega \left( t - \frac{x}{c} \right)} \right\},$$

или

$$f(x|t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}_0 e^{i \left( \frac{\omega}{c} x - \omega t \right)} \right\}. \quad (35.3)$$

Здесь введена *комплексная амплитуда*

$$\hat{f}_0 = f_0 e^{-i\alpha}, \quad (35.4)$$

содержащая информацию как об обычной амплитуде  $f_0$ , так и о фазе  $\alpha$ . Удобство подобного представления обусловлено, в частности, тем, что при слежении двух монохроматических волн с одинаковыми частотами величина  $f_0$  не является аддитивной, тогда как комплексная амплитуда таковым свойством обладает:

$$\hat{f}_0^{(12)} = \hat{f}_0^{(1)} + \hat{f}_0^{(2)}. \quad (35.5)$$

Это значительно упрощает, например, анализ интерференционных явлений.

Введем теперь *волновое число*

$$k = \frac{\omega}{c}$$

и запишем (35.3) как

$$f(x|t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}_0 e^{i(kx - \omega t)} \right\}. \quad (35.6)$$

Напомним, что величина

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = cT \quad (35.7)$$

называется *длиной волны*. Она задает период изменения поля в зависимости от координаты в фиксированный момент времени и равна расстоянию, проходимому волной за период  $T$ . Вводя, наконец, *волновой вектор*

$$\vec{k} = k\vec{n}, \quad (35.8)$$

представим полевые переменные (35.1) в форме, которая не зависит от выбора системы координат:

$$f(\vec{r}|t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}. \quad (35.9)$$

Здесь уже необязательно считать, что волна бежит вдоль оси  $x$ . Выражение (35.9) отвечает волне, которая распространяется в произвольном (но фиксированном) направлении, задаваемом единичным вектором  $\vec{n}$ .

Отождествляя величину  $f$  в (35.9) с компонентами  $E_i$  ( $i = x, y, z$ ) вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , получим для них

$$E_i = \operatorname{Re} \left\{ \hat{E}_{0i} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}, \quad (35.10)$$

или, в векторной форме записи,

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \left\{ \hat{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}. \quad (35.11)$$

Величина  $\hat{\vec{E}}_0$  есть комплексная векторная амплитуда, которую представим как

$$\hat{\vec{E}}_0 = \vec{E}_1 - i\vec{E}_2. \quad (35.12)$$

Здесь  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  – обычные векторы, а знак минус перед мнимой частью введен из соображений удобства (см. §36). Заметим, что в силу условия поперечности (33.17)  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  должны быть перпендикулярны волновому вектору  $\vec{k}$ , а в остальном – эти постоянные векторы произвольны.

#### Дополнение к §35\*

Символ  $\operatorname{Re}$  в выражениях вида (35.9) часто опускают, записывая

$$f(\vec{r}|t) = \hat{f}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (35.13)$$

и обращаясь тем самым с величинами  $f$  как с обычными комплексными числами, выделяя их вещественные части лишь в самом конце вычислений (если это требуется). Однако здесь нужно соблюдать известную осторожность. Подобное соглашение не приводит к недоразумениям, если над величинами  $f$  совершаются линейные операции: сложение, дифференцирование и интегрирование. Но оно неправомерно, например, при перемножении двух функций  $f_1$  и  $f_2$ , ибо, вообще говоря,  $\operatorname{Re}(f_1 f_2) \neq \operatorname{Re} f_1 \cdot \operatorname{Re} f_2$ .

В качестве иллюстрации удобства комплексного формализма применим его к установлению основных свойств плоских монохроматических волн. Согласно (35.13), для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в каждой из таких волн можно записать

$$\vec{E} = \hat{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B} = \hat{\vec{B}}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \quad (35.14)$$

Подстановка этого выражения для  $\vec{E}$  (или  $\vec{B}$ ) в волновое уравнение (32.2) дает

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{k}^2 \hat{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E} = 0,$$

откуда  $k^2 = \omega^2/c^2$ , и мы приходим к связи (35.5) между частотой и волновым числом:  $k = \omega/c$ . Подставляя выражение (35.14) для  $\vec{E}$  в первое уравнение (32.1), найдем

$$\operatorname{div} \vec{E} = i \left( \vec{k}, \hat{E}_0 \right) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = i \left( \vec{k}, \vec{E} \right) = 0,$$

так что  $(\vec{k}, \vec{E}) = 0$ , или  $(\vec{n}, \vec{E}) = 0$ , где учтено, что  $\vec{k} = k\vec{n}$ . Аналогично из третьего уравнения (32.1) имеем  $(\vec{n}, \vec{B}) = 0$ , т.е. рассматриваемые волны, как и всякие плоские электромагнитные волны, являются поперечными. Подставим теперь выражения (35.14) во второе уравнение (32.1):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= i \left[ \vec{k}, \hat{B}_0 \right] e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = i \left[ \vec{k}, \vec{B} \right] = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c} \hat{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = -i \frac{\omega}{c} \vec{E}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что  $\vec{k} = k\vec{n}$  и  $\omega/c = k$ , находим  $\vec{E} = -\left[ \vec{n}, \vec{B} \right]$ . Аналогично из четвертого уравнения (32.1) получим  $\vec{B} = \left[ \vec{n}, \vec{E} \right]$ . Два последних соотношения свидетельствуют о том, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  взаимно ортогональны и равны по модулю.

### §36. Поляризация плоской монохроматической электромагнитной волны

Общий закон изменения вектора  $\vec{E}$  в плоской монохроматической электромагнитной волне можно представить в форме (35.11) с комплексной амплитудой (35.12). Подставим второе выражение в первое и раскроем экспоненту с мнимым показателем по формуле Эйлера:

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \left\{ \left( \vec{E}_1 - i\vec{E}_2 \right) \left[ \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + i \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \right] \right\}. \quad (36.1)$$

Выделяя вещественную часть в явном виде, получим

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + \vec{E}_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t). \quad (36.2)$$

Таким образом, в общей ситуации плоская монохроматическая волна представляет собой суперпозицию двух линейно поляризованных (см. §33) волн. Как отмечалось в связи с формулами (35.11) и (35.12) векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  перпендикулярны направлению распространения волны (волновому вектору  $\vec{k}$  или единичному вектору  $\vec{n}$ ), а в остальном произвольны. В частности, эти векторы, вообще говоря, не ортогональны друг другу.

Введем декартову систему координат, направив ось  $x$  вдоль волнового вектора  $\vec{k}$  и располагая оси  $y$  и  $z$  в перпендикулярной ему плоскости.

Тогда из (36.2) будем иметь

$$E_x = 0, \quad \begin{cases} E_y = E_1 \cos \alpha \cos(kx - \omega t) + E_2 \cos \beta \sin(kx - \omega t) \\ E_z = E_1 \sin \alpha \cos(kx - \omega t) + E_2 \sin \beta \sin(kx - \omega t) \end{cases}, \quad (36.3)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – углы, которые составляют векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  с осью  $y$ . Исследуем движение конца вектора  $\vec{E}$  в фиксированной плоскости  $x = const$ . Для наглядности его можно представлять себе как движение частицы с координатами  $y = E_y$  и  $z = E_z$ . Из (36.3) видно, что по каждому из направлений  $x$  и  $y$  это движение является суммой двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами. Но, как известно, подобные суммы сводятся к простым гармоническим колебаниям, и вместо (36.3) можно записать

$$\begin{cases} E_y = \varepsilon_1 \cos[(kx - \omega t) + \delta_1] \\ E_z = \varepsilon_2 \cos[(kx - \omega t) + \delta_2] \end{cases} \quad (36.4)$$

Амплитуды и фазы этих колебаний выражаются через параметры исходных колебаний (36.3), но соответствующие формулы нам не потребуются.

Итак, движение конца вектора  $\vec{E}$  есть суперпозиция двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с одинаковыми частотами. Рассмотрим сначала отдельные частные случаи.

(а) Если  $\delta_2 = \delta_1$  (или  $\varepsilon_2 = 0$ , или  $\varepsilon_1 = 0$ ), то конец вектора  $\vec{E}$  движется по отрезку прямой, направленной вдоль вектора  $\varepsilon_1 \vec{e}_y + \varepsilon_2 \vec{e}_z$  (или оси  $y$ , или оси  $z$ ). При распространении волны вектор  $\vec{E}$  будет оставаться все время параллельным постоянному вектору, совершая колебания в фиксированной плоскости. Подобные плоские электромагнитные волны нам уже встречались. Они называются *линейно* (либо плоско) поляризованными волнами.

(б) Если  $\delta_2 - \delta_1 = \pm \pi/2$ , то из (36.4) будем иметь

$$\begin{cases} E_y = \varepsilon_1 \cos[(kx - \omega t) + \delta_1] \\ E_z = \mp \varepsilon_2 \sin[(kx - \omega t) + \delta_1] \end{cases} \quad (36.5)$$

После деления  $E_y$  на  $\varepsilon_1$  и  $E_z$  на  $\varepsilon_2$ , возведения в квадрат и сложения получим

$$\frac{E_y^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{E_z^2}{\varepsilon_2^2} = 1. \quad (36.6)$$

Конец вектора  $\vec{E}$  при  $x = const$  движется по эллипсу с осями  $2\varepsilon_1$  и  $2\varepsilon_2$ , ориентированными вдоль  $y$  и  $z$ . При распространении волны он описывает винтовую линию, навитую на эллиптический цилиндр с осью  $x$  в качестве оси симметрии и с шагом, равным длине волны  $\lambda$ . Такие плоские монохроматические электромагнитные волны называются *эллиптически* поляризованными. В зависимости от знака разности фаз  $\delta_2 - \delta_1$  вектор  $\vec{E}$  вращается по часовой стрелке или против нее, и в соответствии с этим говорят о *правой* или *левой* эллиптической поляризации.

(в) Если в предыдущем случае  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon_0$ , то (36.6) превращается в уравнение окружности

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2. \quad (36.7)$$

Вектор  $\vec{E}$  вращается в плоскости  $x = const$ , оставаясь постоянным по модулю. При распространении волны его конец описывает круговую винтовую линию, и говорят, что волна обладает *круговой* (циркулярной) поляризацией, которая также бывает правой и левой.

Чтобы разобраться в самой общей ситуации, нужно из (36.4) исключить волновой аргумент  $kx - \omega t \equiv \psi$ . Делается это так. Из первого уравнения (36.4) находим

$$\cos(\psi + \delta_1) = \frac{E_y}{\varepsilon_1}$$

и подставляем это выражение во второе уравнение, переписанное как

$$E_z = \varepsilon_2 \cos[(\psi + \delta_1) + (\delta_2 - \delta_1)] = \varepsilon_2 \cos(\psi + \delta_1) \cos(\delta_2 - \delta_1) - \varepsilon_2 \sin(\psi + \delta_1) \sin(\delta_2 - \delta_1)$$

В итоге после несложных выкладок получим уравнение второго порядка

$$\frac{E_y^2}{\varepsilon_1^2} - \frac{2E_y E_z}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos(\delta_2 - \delta_1) + \frac{E_z^2}{\varepsilon_2^2} = \sin^2(\delta_2 - \delta_1). \quad (36.8)$$

Оно задает кривую, которая расположена в ограниченной области плоскости  $x = const$ , ибо из (36.8) явствует, что «координаты»  $E_y$  и  $E_z$  не могут принимать сколь угодно большие значения. Подобная кривая второго порядка есть эллипс, но теперь уже его оси симметрии повернуты относительно координатных осей  $y$  и  $z$  на некоторый угол. Мы видим, что наиболее общей является *эллиптическая* поляризация, причем из (36.8) легко получить все рассмотренные выше частные случаи.

Итак, всякая плоская монохроматическая электромагнитная волна обладает той или иной поляризацией. Однако большинство реальных источников электромагнитных волн состоит из огромного числа независимых элементарных излучателей, испускающих не вполне монохроматические волны со случайными значениям амплитуд и начальных фаз, а также со всевозможными поляризациями. Даже в лазерах, которые отличаются огромной степенью согласованности, возможны некоторые флуктуации указанных величин.

Если распределение амплитуд, начальных фаз и поляризаций отдельных волн полностью хаотическое, то электромагнитная волна в целом будет *неполяризованной*. Пример тому дает естественный свет, испускаемый тепловыми или люминесцентными источниками. Если же характеристики отдельных волн от разных элементарных излучателей в какой-то степени скоррелированы, то электромагнитная волна в целом оказывается *частично поляризованной*. Ее свойства описываются с помощью определенного тензора второго ранга, именуемого тензором поляризации (в квантовой теории – матрицей плотности), но мы на этих вопросах не останавливаемся<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См., например: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики, кн. 1., – Механика. Электродинамика. – М.: Наука, 1989, §73.

## §37. Эффект Доплера

Пусть неподвижный источник испускает монохроматические волны с частотой  $\omega_0$ . Если тот же источник движется относительно наблюдателя, то последний будет регистрировать частоту  $\omega$ , отличную от  $\omega_0$ . Это явление и называется *эффектом Доплера*. Задача состоит в том, чтобы найти частоту  $\omega$ , зная  $\omega_0$  и характер движения источника волн и наблюдателя. Как мы увидим ниже, в классической механике и в электродинамике результаты оказываются различными.

В классической физике вплоть до появления теории Максвелла рассматривались только волны в упругих средах. В частности, считалось, что свет распространяется в эфире. Для определенности будем говорить о звуковых волнах в воздухе, обозначая их скорость тем же символом  $c$ , что и скорость света. Подчеркнем, что источник звука считается неподвижным, если он покоится относительно воздуха. В данном случае ход решения задачи и ответ зависят от того, движется ли сам источник или наблюдатель. В обозначениях, поясненных на рисунке, получаются следующие результаты:

(а) если движется источник  $S$ , то

$$\omega_{кл}^{(1)} = \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \omega_0; \quad (37.1)$$

(б) если движется наблюдатель  $D$ , то

$$\omega_{кл}^{(2)} = \left( 1 + \frac{u}{c} \cos \varphi \right) \omega_0; \quad (37.2)$$

(в) в общей ситуации

$$\omega_{кл} = \frac{1 + \frac{u}{c} \cos \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \omega_0. \quad (37.3)$$

Обращаем внимание на то, что в последнем случае детектируемая частота определяется не скоростью сближения наблюдателя и источника, т.е. величиной

$$V_{сбл} = \frac{u}{c} \cos \varphi + \frac{v}{c} \cos \theta, \quad (37.4)$$

а их «абсолютными» скоростями  $u$  и  $v$  по отдельности.

Электромагнитные волны распространяются непосредственно в вакууме, а не в упругой среде, с которой можно было бы связать выделенную систему отсчета. Поэтому, когда говорится о неподвижном источнике этих волн, имеется в виду, что он рассматривается в собственной системе отсчета. И ясно, что оптический эффект Доплера должен определяться лишь скоростью относительного движения источника и наблюдателя. Ниже мы убедимся, что это действительно так. Но прежде чем переходить к соответствующему анализу, необходимо сделать небольшое отступление, представляющее и самостоятельный интерес.

Плоская монохроматическая электромагнитная волна должна оставаться таковой же во всех инерциальных системах отсчета, в частности в той, которая движется относительно

исходной системы отсчета вдоль общей оси  $z$ . Но согласно общим формулам (16.10), для  $z$  – компонентов электрического поля имеем

$$E'_z = E_z. \quad (37.5)$$

Это означает, что значения  $E_z$  в соответственных точках пространства и в соответственные моменты времени одинаковы, т.е. при изменении системы отсчета максимумы переходят в максимумы, минимумы в минимумы и т.д. Отсюда следует, что полная фаза рассматриваемой волны должна быть инвариантом преобразований Лоренца:

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t = inv \quad (37.6)$$

(более строго это утверждение обосновывается в дополнении к данному параграфу).  
Перепишем условие (37.6) как

$$k_j x_j + \left(i \frac{\omega}{c}\right)(ict) = k_j x_j + i \frac{\omega}{c} x_4 = inv \quad (j=1,2,3).$$

Поскольку  $x_j$  и  $x_4 = ict$  образуют 4-вектор  $X$  [см. (13.3)], то инвариантность фазы будет обеспечена, если волновой вектор  $\vec{k}$  и частота  $\omega$  также образуют 4-вектор

$$K = \left(\vec{k}, i \frac{\omega}{c}\right). \quad (37.7)$$

Тогда левая часть (37.6) представится в виде 4-мерного скалярного произведения:

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t = (K, X) \quad (37.8)$$

[см.(13.6)], которое есть инвариант преобразований Лоренца. 4-вектор  $K$  является изотропным вектором:

$$K^2 = 0, \quad (37.9)$$

что сразу следует из его определения (37.7) и из равенства  $k = \omega/c$ .

Умножив обе части (37.7) на постоянную Планка  $\hbar$ , получим

$$\hbar K = \left(\hbar \vec{k}, i \frac{\hbar \omega}{c}\right). \quad (37.10)$$

Но величина  $E = \hbar \omega$  есть энергия фотона, а  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  – его импульс.

Поэтому, в соответствии с (13.14), 4-вектор  $\mathcal{P} = \hbar K$  является 4-импульсом фотона:

$$\mathcal{P} = \left(\vec{p}, i \frac{E}{c}\right). \quad (37.11)$$

В его изотропности, т.е. в равенстве  $\mathcal{P}^2 = 0$ , вытекающем из (37.9), находит свое выражение то обстоятельство, что фотон имеет нулевую массу.



При изменении системы отсчета компоненты 4-вектора  $K$  преобразуются по общим формулам (13.12), из которых, в частности, имеем

$$k'_4 = \frac{k_4 - i \frac{v}{c} k_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (37.12)$$

Совместим начало системы отсчета  $S$  с наблюдателем, начало системы отсчета  $S'$  – с источником волн, и направим оси  $z$  и  $z'$  вдоль вектора скорости  $\vec{V}$ , с которой источник движется относительно наблюдателя. Учитывая, что  $k_4 = i\omega/c$  и  $k_3 = k \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta$ , где  $\theta$  – угол между направлением испускания волны (вектором  $\vec{k}$ ) и направлением движения источника (вектором  $\vec{V}$ ), из (37.12) получим

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (37.13)$$

Поскольку  $S'$  есть собственная система отсчета для источника волн, то  $\omega' = \omega_0$ , и мы для частоты  $\omega$ , регистрируемой наблюдателем, из (37.13) находим

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta} \omega_0. \quad (37.14)$$

Это и есть искомая формула, описывающая эффект Доплера для электромагнитных волн. Рассмотрим некоторые частные случаи.

(а) Если скорость относительного движения наблюдателя и источника невелика, т.е.  $V \ll c$ , то из (37.14) с точностью до членов первого порядка малости по  $V/c$  имеем

$$\omega \cong \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta\right) \cong \omega_0 \left(1 + \frac{V_{сбл}}{c}\right), \quad (37.15)$$

где  $V_{сбл}$  – скорость сближения источника и наблюдателя. Этот результат совпадает с результатом для классического (нерелятивистского) эффекта Доплера, который получается из (37.3) при  $u, v \ll c$ :

$$\omega_{кл} \cong \left(1 + \frac{u}{c} \cos \varphi\right) \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right) \omega_0 \cong \left(1 + \frac{u \cos \varphi + v \cos \theta}{c}\right) \omega_0 = \left(1 + \frac{V_{сбл}}{c}\right) \omega_0, \quad (37.16)$$

где  $V_{сбл}$  задается формулой (37.15).

(б) Если источник приближается к наблюдателю ( $\theta = 0$ ), то из (37.14)

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}} . \quad (37.17)$$

В то же время из выражения (37.1) при  $\theta = 0$  и (37.2) при  $\varphi = 0$  получаются совсем другие результаты:

$$\omega_{кл}^{(1)} = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v}{c}}, \quad \omega_{кл}^{(2)} = \omega_0 \left( 1 + \frac{u}{c} \right). \quad (37.18)$$

(в) Аналогичная ситуация возникает при удалении источника от наблюдателя вдоль направления распространения волны. Читателю предлагается самостоятельно выписать соответствующие формулы.

(г) Если источник движется перпендикулярно линии наблюдения, то из (37.3) при  $\theta = \pm \pi/2$  и  $\varphi = \pm \pi/2$  следует, что классический эффект Доплера отсутствует:

$$\omega_{кл} = \omega_0 . \quad (37.19)$$

В то же время релятивистский *поперечный* эффект Доплера имеет место, ибо при  $\theta = \pm \pi/2$  из (37.14) получаем

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} . \quad (37.20)$$

При умеренных скоростях

$$\omega \cong \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right), \quad (37.21)$$

и для обнаружения этого эффекта требуется огромная точность, так как

$$\frac{|\Delta\omega|}{\omega_0} \cong \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}, \quad (37.22)$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  – соответствующий сдвиг частоты. Его впервые наблюдали в 1938г. Айвс и Стилуэлл в излучении каналовых лучей – пучка атомов водорода, движущихся со скоростью  $V \cong 3 \cdot 10^8$  см/с. Эти опыты еще раз подтвердили справедливость специальной теории относительности, хотя к тому времени ее статус и так уже был достаточно надежным. Любопытно, что сами авторы пытались интерпретировать результаты своих измерений в рамках старой теории эфира. Впоследствии в целом ряде экспериментов правильность формулы (37.20) для поперечного эффекта Доплера была подтверждена с очень высокой степенью точности.

Дополнение к § 37\*

При более строгом обосновании свойства инвариантности (37.6) фазы плоской монохроматической электромагнитной волны естественно исходить из какого-то заведомо ковариантного соотношения. Выберем в качестве такового условие Лоренца (10.7)

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (37.23)$$

Оно явно ковариантно, ибо может быть представлено в 4-мерной форме записи (15.5)

$$\operatorname{Div} A \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (37.24)$$

Где  $A$  – 4-потенциал (15.2)

$$A = (\vec{A}, i\varphi). \quad (37.25)$$

В комплексном формализме для скалярного и векторного потенциалов плоской электромагнитной волны имеем, в соответствии с (35.3),

$$\varphi = \hat{\varphi}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{A} = \hat{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \quad (37.26)$$

Подставляя эти выражения в (37.23), получим

$$i(\vec{k}, \vec{A}) - i \frac{\omega}{c} \varphi = 0,$$

или

$$(\vec{k}, \vec{A}) + \left( i \frac{\omega}{c} \right) \cdot (i\varphi) = 0. \quad (37.27)$$

Согласно (37.24), левая часть здесь является 4-скаляром. Но величины  $\vec{A}$  и  $i\varphi$  есть компоненты 4-вектора (37.25), а значит, и величины  $\vec{k}$  и  $i\omega/c$  должны образовывать некоторый 4-вектор

$$K = \left( \vec{k}, i \frac{\omega}{c} \right). \quad (37.28)$$

В итоге приходим к определению (37.7). Условие Лоренца (37.27) для плоской монохроматической волны записывается теперь в явно ковариантной форме

$$(K, A) = 0, \quad (37.29)$$

а фаза этой волны представляется в виде скалярного произведения

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t = (K, X), \quad (37.30)$$

( $X$  – 4-радиус-вектор события). Но 4-мерное скалярное произведение есть инвариант преобразований Лоренца, чем и устанавливается инвариантность фазы плоской монохроматической электромагнитной волны.

Мы остановились на этой проблеме столь подробно потому, что в учебной литературе ей обычно не уделяется должного внимания, и инвариантность фазы обосновывается не всегда убедительно.

### §38\*. Волновой пакет

Рассмотрим плоскую линейно поляризованную монохроматическую электромагнитную волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ . Как мы видели в §35–36, для любой отличной от нуля переменной состояния  $f$  такой волны можно записать

$$f(x|t) = f_0 e^{i(kx - \omega t)} \equiv f_0 e^{ik\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)}, \quad (38.1)$$

где символ  $\text{Re}$  опущен (см. дополнение к §35), а амплитуда  $f_0$  выбрана вещественной, что всегда может быть сделано для линейно поляризованной волны.

Рассматриваемая волна обладает однозначно определенной скоростью, которая связывается со скоростью распространения поверхностей равной фазы  $kx - \omega t = \text{const}$  и потому называется *фазовой скоростью*  $v_\phi \equiv v$ . Из последней формы записи (38.1) очевидно, что

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (38.2)$$

Для электромагнитных волн в вакууме закон дисперсии  $\omega = \omega(k)$  линеен:  $\omega = ck$ . Поэтому их фазовая скорость постоянна, т.е. не зависит от частоты, и равна электродинамической константе  $c$ . В других случаях (электромагнитные волны в веществе, квантовомеханические волны вероятности и т.д.) закон дисперсии  $\omega = \omega(k)$  отличен от линейного, и фазовая скорость зависит от частоты, т.е. она различна для разных гармоник:  $v = v(\omega)$ .

Следует иметь в виду, что всякая плоская монохроматическая волна является лишь идеализацией реальных электромагнитных волн. С одной стороны, она должна простираться неограниченно как в пространстве, так и во времени; с другой стороны, не существует строго монохроматических излучателей (см. конец §36). Однако всякую реальную электромагнитную волну можно представить в виде суперпозиции различных монохроматических волн, для чего достаточно разложить ее в интеграл Фурье

$$f(x|t) = \int \tilde{f}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk, \quad (38.3)$$

где закон дисперсии  $\omega = \omega(k)$  считается заданным, но пока произвольным.

Будем рассматривать случай, когда фурье-образ  $\tilde{f}(k)$  имеет прямоугольную форму

$$\tilde{f}(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0 - \Delta k \\ \tilde{f}_0, & k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k \\ 0, & k > k_0 + \Delta k \end{cases}, \quad (38.4)$$

предполагая при этом, что  $k_0 \gg \Delta k$ . Запишем  $k \equiv k_0 + (k - k_0)$  и разложим частоту  $\omega(k)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $k_0$ :

$$\omega(k) \equiv \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) \equiv \omega_0 + \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0). \quad (38.5)$$

Подставляя эти выражения для  $k$  и  $\omega$  в (38.3), получим

$$\begin{aligned} f(x|t) &\equiv \tilde{f}_0 \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} e^{i(k - k_0) \left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]} dk = \\ &= \tilde{f}_0 e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i \varkappa \left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]} d\varkappa, \end{aligned}$$

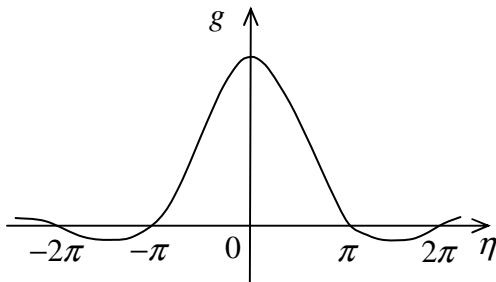
где введена переменная  $\varkappa = k - k_0$ . Проводя элементарное интегрирование, найдем

$$f(x|t) = 2\tilde{f}_0 \frac{\sin \left\{ \left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \Delta k \right\}}{x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}. \quad (38.6)$$

Таким образом, фурье-образу (38.4) отвечает электромагнитное поле, которое представляет собой бегущую волну со средней частотой, равной «несущей» частоте  $\omega_0 = \omega(k_0)$ , и с переменной амплитудой

$$f_0(x|t) = 2\tilde{f}_0 \Delta k \frac{\sin \left\{ \left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \Delta k \right\}}{\left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \Delta k} \equiv g \left( \left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \Delta k \right) \equiv g(\eta). \quad (38.7)$$

Эта амплитуда имеет бесконечное множество экстремумов (см. рисунок), среди которых выделен главный максимум в точке, где аргумент функции  $g$  равен нулю. Естественно считать, что в пределах этого максимума и сосредоточено все поле, так что волна оказывается фактически ограниченной в пространстве и во времени. Подобная волна именуется (особенно в квантовой механике) *волновым пакетом*.



Как видно из (38.7), главный максимум амплитуды сам изменяется в пространстве и

времени по волновому закону, распространяясь вдоль оси  $x$  со скоростью

$$v_{gp} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 \equiv \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k=k_0} . \quad (38.8)$$

Она характеризует движение центра волнового пакета, т.е. «группы» гармоник в целом, и называется *групповой скоростью*. Для электромагнитных волн в вакууме  $\omega = ck$ , и их групповая скорость постоянна (не зависит от  $k_0$ , а значит, от  $\omega_0$ ), причем она совпадает с фазовой скоростью (38.2):

$$v_{gp} = v_{fp} \equiv v = c . \quad (38.9)$$

Но в общей ситуации групповая и фазовая скорости – разные физические величины. Например, в случае квадратичного закона дисперсии  $\omega = \alpha k^2$ , характерного для квантовомеханических частиц (для которых  $\alpha = \hbar/2m$ ),  $v_{gp}$  и  $v_{fp}$  различаются вдвое (при условии, что частота монохроматической гармоники совпадает с несущей частотой волнового пакета). В этом можно сразу убедиться с помощью формул (38.2) и (38.8).

Как уже говорилось, «амплитуда»  $g(\eta)$  волнового пакета имеет резкий максимум в точке  $\eta = 0$ , т.е. при  $x = v_{gp}t$ . Ближайшие ее нули отвечают значениям  $\eta = \pm\pi$  [см. формулу (38.7) и рис. на с.175]. Поэтому мы и условились считать, что поле сосредоточено в интервале

$$(x - v_{gp}t) \Delta k = 2\pi . \quad (38.10)$$

В фиксированный момент времени  $t$  амплитуда заметно отлична от нуля лишь между точками с координатами  $x_1$  и  $x_2$ , которые находятся из условий

$$(x_{1,2} - v_{gp}t) \Delta k = \pm\pi . \quad (38.11)$$

Расстояние между этими точками

$$L \equiv |x_1 - x_2| = \frac{2\pi}{\Delta k} \quad (38.12)$$

называется *шириной* волнового пакета. Она характеризует ту точность  $\Delta x$ , с которой волну можно считать локализованной в пространстве. Из (38.12) явствует, что по порядку величины

$$\boxed{\Delta x \Delta k \sim 1} . \quad (38.13)$$

Аналогично, в фиксированной точке пространства  $x$  амплитуда заметно отлична от нуля в течение промежутка времени

$$T \equiv |t_1 - t_2| = \frac{2\pi}{v_{gp} \Delta k} = \frac{2\pi}{\left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 \Delta k} = \frac{2\pi}{\Delta \omega} , \quad (38.14)$$

называемого *длительностью* волнового пакета. Она характеризует то время  $\Delta t$ , в течение которого детектор регистрирует проходящую мимо него волну. Из (38.14) имеем по порядку величины

$$\boxed{\Delta t \Delta \omega \sim 1}. \quad (38.15)$$

Как явствует из последней оценки, чем более кратковременный сигнал требуется передать, тем шире должна быть полоса частот. Аналогично, из (38.13) следует, что чем более узок сигнал в пространстве, тем шире полоса значений волнового числа. Эти результаты весьма важны для радиофизики, при анализе возможностей передачи той или иной информации с помощью электромагнитных волн<sup>1)</sup>. Но особенно велика их роль в квантовой механике, где оценки (38.13) и (38.15) обретают методологический характер. Умножая обе их части на постоянную Планка  $\hbar$  и учитывая соотношения де Бройля  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  и  $E = \hbar \omega$ , придем к качественной формулировке *соотношений неопределенностей*

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar, \quad \Delta E \Delta t \sim \hbar, \quad (38.16)$$

фундаментальная значимость которых общеизвестна.

Результаты (38.13) и (38.15) на первый взгляд могут представиться весьма частными, ибо при их получении рассматривался сигнал  $f(x|t)$ , фурье-образ  $\tilde{f}(k)$  которого имеет прямоугольную форму (38.4). Оказывается, однако, что данные результаты сохраняют свою силу и в случае достаточно общей зависимости  $\tilde{f} = \tilde{f}(k)$ , а потому они универсальны. Это связано с наличием общих соотношений между фурье-образом и фурье-оригиналом, которые устанавливаются в теории интеграла Фурье.

Более серьезным является линейное приближение (38.5), которое мы приняли для закона дисперсии  $\omega = \omega(k)$ . При его использовании был получен волновой пакет (38.6), форма которого не изменяется в процессе распространения. Для электромагнитных волн в вакууме этот важный результат оказывается точным, ибо их закон дисперсии  $\omega = ck$  линеен без каких-либо приближений. Но при любой другой зависимости  $\omega = \omega(k)$  дело обстоит иначе. Учет в разложении функции  $\omega(k)$  квадратичных по  $k - k_0$  членов приводит к *расплыванию* волнового пакета со временем. Именно такая ситуация возникает в квантовой механике, где и обсуждаются фундаментальные следствия этого важного обстоятельства.

### §39\*. Собственные колебания поля

Рассмотрим электромагнитное поле в некоторой ограниченной области пространства, в которой отсутствуют заряженные частицы и которую для простоты будем считать прямоугольным параллелепипедом с ребрами  $L_x$ ,  $L_y$  и  $L_z$ . Важным примером такой области служит прямоугольная полость в веществе, нагретом до определенной температуры, внутри которой имеется электромагнитное излучение, находящееся в равновесии со стенками веществ. Продолжим периодически рассматриваемое поле за пределы указанного параллелепипеда и разложим его в 3-мерный ряд Фурье:

<sup>1)</sup> Данная проблематика достаточно подробно обсуждается, например, в кн.: Компанец А.С. Курс теоретической физики, т. I. – М.: Просвещение, 1972, §19.

$$f(\vec{r}|t) \equiv f(x, y, z|t) = \sum_{k_x, k_y, k_z} q_{k_x, k_y, k_z}(t) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \equiv \sum_{\vec{k}} q_{\vec{k}}(t) e^{i(\vec{k}, \vec{r})}. \quad (39.1)$$

В силу условий периодичности компоненты вектора  $\vec{k}$  пробегают дискретные последовательности значений:

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L_z} n_z, \quad (39.2)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  – целые числа (положительные и отрицательные).

Подставляя разложение Фурье (39.1) в волновое уравнение (32.5), найдем, что коэффициенты Фурье  $q_{\vec{k}}(t)$  подчиняются уравнению

$$\ddot{q}_{\vec{k}}(t) + c^2 k^2 q_{\vec{k}}(t) = 0,$$

которое, в силу соотношения  $c^2 k^2 = \omega_k^2$ , относится к осцилляторному типу

$$\ddot{q}_{\vec{k}}(t) + \omega_k^2 q_{\vec{k}}(t) = 0. \quad (39.3)$$

В этом смысле говорят, что свободное электромагнитное поле может быть представлено в виде бесконечного набора несвязанных осцилляторов с различными частотами  $\omega_k$ . Это наблюдение играет важную роль в процессе квантования электромагнитного поля. В связи с разложением (39.1) и уравнением (39.3) говорят также о *собственных колебаниях* (вспомним классическую механику), или *модах* колебаний свободного электромагнитного поля.

Для физических приложений полезно найти число осцилляторов электромагнитного поля с заданной поляризацией, частоты которых лежат в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Считая ребра рассматриваемого параллелепипеда большими, получим, в соответствии с (39.2), квазинепрерывный спектр значений волнового вектора  $\vec{k}$ . Для числа осцилляторов сорта  $j = x, y, z$  с волновыми числами от  $k_j$  до  $k_j + dk_j$  имеем из (39.2)

$$dN_j = \frac{L_j}{2\pi} dk_j, \quad (39.4)$$

так что

$$dN_{\vec{k}} = dN_x dN_y dN_z = \frac{L_x L_y L_z}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z. \quad (39.5)$$

Переходя в  $\vec{k}$  – пространстве к сферическим координатам, получим

$$dN_{\vec{k}} = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 dk d\Omega. \quad (39.6)$$

Интегрирование этого выражения по углам дает множитель  $4\pi$ , и для числа осцилляторов  $dN_k$  с волновыми числами, лежащими в интервале от  $k$  до  $k + dk$ , мы находим



$$dN_k = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk . \quad (39.7)$$

Однако здесь не учтено, что у каждой электромагнитной гармоники имеется два независимых состояния поляризации (см. §36), чему соответствуют и два независимых набора осцилляторов поля. Поэтому на самом деле вместо (39.7) имеем

$$dN_k = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk . \quad (39.8)$$

Принимая во внимание соотношение  $k = \omega/c$ , придем к окончательной формуле для числа осцилляторов  $dN_\omega$  с частотами в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ :

$$dN_\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega . \quad (39.9)$$

Применим этот результат к равновесному излучению в полости, стенки которой нагреты до температуры  $T$  (см. начало данного параграфа). Для средней плотности энергии этого излучения имеем

$$W = \frac{1}{8\pi} \left( \overline{E^2 + B^2} \right) , \quad (39.10)$$

где черта означает усреднение по времени. Обозначим через  $dW_\omega$  плотность энергии излучения в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  и введем *спектральную плотность* излучения  $\rho_\omega$  определением

$$dW_\omega = \rho_\omega d\omega . \quad (39.11)$$

Рассматриваем электромагнитное излучение в полости как набор несвязанных осцилляторов. Согласно известной теореме классической статистической физики, на каждую степень свободы многочастичной системы приходится энергия  $kT/2$  ( $k$  – постоянная Больцмана). Поэтому на каждый элементарный осциллятор приходится энергия  $kT$ , поскольку речь здесь идет о полной энергии, а в случае осциллятора она как раз вдвое больше кинетической энергии. Но тогда из (39.9) мы для  $dW_\omega$  получаем

$$dW_\omega = kT \frac{dN_\omega}{V} = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega , \quad (39.12)$$

и в итоге приходим к формуле Рэля-Джинса

$$\rho_\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2 . \quad (39.13)$$

Она сразу же приводит к «ультрафиолетовой катастрофе», т.е. к бесконечному значению плотности энергии равновесного излучения:

$$W = \int_0^{\infty} \rho_{\omega} d\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega = \infty .$$

Как известно, анализ именно этой проблематики привел М. Планка к гипотезе квантов, а в конечном итоге – к созданию квантовой теории.