

Глава VII. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН§40. Запаздывающие потенциалы

Теперь мы рассмотрим самый общий случай, когда переменное электромагнитное поле создается заряженными частицами, которые движутся произвольным образом. Подчеркнем еще раз, что движение частиц считается известным, т.е. что плотность заряда  $\rho(\vec{r}|t)$  и плотность тока  $\vec{j}(\vec{r}|t)$  есть заданные функции, и требуется найти поля  $\vec{E}(\vec{r}|t)$  и  $\vec{B}(\vec{r}|t)$ , подчиняющиеся общей системе уравнений Максвелла (8.1). Как и обычно, удобно перейти от полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  к потенциалам  $\varphi$  и  $\vec{A}$ , связанным с ними соотношениями (10.3). Если наложить на потенциалы условие Лоренца (10.7), то они будут удовлетворять уравнениям Даламбера (10.8).

Будем пока для определенности иметь дело со скалярным потенциалом  $\varphi$ , уравнение для которого записывается как

$$\square\varphi(\vec{r}|t) \equiv \nabla^2\varphi(\vec{r}|t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi(\vec{r}|t)}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\vec{r}|t). \quad (40.1)$$

Отыскание общего решения этого уравнения строгими математическими методами представляет собой довольно сложную задачу, и мы ею заниматься не будем<sup>1)</sup>. Вместо этого, применяя простые качественные соображения, мы выпишем некоторое частное решение уравнения (40.1), которое имеет самый непосредственный физический смысл и которое нам только и потребуется в дальнейшем.

Совершая в (40.1) формальный предельный переход  $c \rightarrow \infty$ , придем к уравнению Пуассона

$$\nabla^2\varphi_\infty(\vec{r}|t) = -4\pi\rho(\vec{r}|t). \quad (40.2)$$

Время  $t$  оно содержит всего лишь в качестве параметра (сравн. с §28), и решение этого уравнения задается формулой (22.24):

$$\varphi_\infty(\vec{r}|t) = \int \frac{\rho(\vec{r}'|t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (40.3)$$

Смысл данного результата совершенно очевиден. Равенство  $c = \infty$  отвечает отсутствию всякого запаздывания, и изменение электромагнитного поля в точке наблюдения  $\vec{r}$  синхронно следует за изменением распределения зарядов в точках их расположения  $\vec{r}'$ .

Обратимся теперь к реальной ситуации, описываемой уравнением (40.1). Здесь уже необходимо учитывать наличие запаздывания, обусловленное конечностью скорости  $c$  распространения электромагнитных возмущений.

Благодаря этому поле в точке наблюдения  $\vec{r}$  «почувствует» изменение плотности заряда в точке  $\vec{r}'$  в момент  $t'$  не сразу, а лишь в момент времени

<sup>1)</sup> См., например: Левич В.Г. Курс теоретической физики, т.1. – М.: Физматгиз, 1962. – Ч.1, § 24.

$$t = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \quad (40.4)$$

ибо  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  есть как раз расстояние между указанными точками. Сказанное означает, что при вычислении значения поля в точке  $\vec{r}$  в момент  $t$  нужно в интеграл (40.3) подставлять значения плотности  $\rho$  в точках  $\vec{r}'$ , которые она имеет в более ранние моменты времени

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}. \quad (40.5)$$

В итоге приходим к следующему выражению для скалярного потенциала:

$$\varphi(\vec{r}|t) = \int \frac{\rho\left(\vec{r}'|t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (40.6)$$

Однако в дальнейшем гораздо более важную роль будет играть выражение для векторного потенциала электромагнитного поля. Оно получается из (40.6) очевидной подстановкой  $\rho \mapsto \vec{j}/c$ , так что

$$\vec{A}(\vec{r}|t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}'|t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (40.7)$$

Из изложенного совершенно ясен физический смысл формул (40.6) и (40.7). По вполне понятным причинам задеваемые ими величины  $\varphi$  и  $\vec{A}$  называются *запаздывающими потенциалами*.

#### Дополнение к §40\*

Не претендуя на полную математическую строгость, выведем формулу (40.6), используя принцип суперпозиции и некоторые из установленных ранее результатов. Выделим с этой целью элементарный объем  $dV_0$ , включающий начало координат и содержащий заряд  $dq_0(t) = \rho(\vec{0}|t) dV_0$ , и найдем скалярный потенциал  $d\varphi_0(\vec{r}|t)$  электромагнитного поля, которое создается этим зарядом в точке  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ . Так как  $\rho = 0$  при  $\vec{r} \neq 0$ , то всюду, кроме начала координат, искомый потенциал  $d\varphi_0$  подчиняется волновому уравнению, причем система обладает сферической симметрией. Но подобная задача уже была рассмотрена в §34, и там мы получили ее общее решение (34.4), которое теперь запишем как

$$d\varphi_0(\vec{r}|t) = \frac{df_0\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{dg_0\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (40.8)$$

Найдем явный вид функций  $df_0$  и  $dg_0$ , исходя из специфики рассматриваемой здесь задачи. Вспомним, прежде всего, что первое слагаемое в правой части (40.8) представляет собой расходящуюся сферическую волну, а второе слагаемое – сходящуюся сферическую волну. Нас интересует только электромагнитное поле, создаваемое зарядом  $dq_0$ , а потому ясно, что следует положить  $dg_0 = 0$ . В противном случае на заряд  $dq_0$  падала бы еще и волна, которая порождается не им самим, а генерируется какими-то источниками, расположенными на бесконечности (внешнее излучение). Итак, физическая постановка задачи приводит к тому, что

$$d\varphi_0(\vec{r}|t) = \frac{df_0\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (40.9)$$

Чтобы найти функцию  $df_0$ , рассмотрим поведение найденного решения вблизи начала координат, где находится заряд  $dq_0$ . При  $r \rightarrow 0$  непосредственно из (40.9) имеем

$$d\varphi_0 = \frac{df_0(t)}{r}. \quad (40.10)$$

С другой стороны, для поля вблизи создающего его заряда можно пренебречь всеми эффектами запаздывания, а потому оно должно иметь кулоновский вид

$$d\varphi_0 = \frac{dq_0(t)}{r} = \frac{\rho(\vec{0}|t)}{r} dV_0. \quad (40.11)$$

Из сравнения (40.10) с (40.11) явствует, что

$$df_0(t) = \rho(\vec{0}|t) dV_0, \quad (40.12)$$

и формула (40.9) принимает следующий вид:

$$d\varphi_0(\vec{r}|t) = \frac{\rho\left(\vec{0}\left|t - \frac{r}{c}\right.\right)}{r} dV_0. \quad (40.13)$$

Выделим теперь элементарный объем  $dV'$ , включающий не начало координат, а произвольную точку  $\vec{r}'$ , и содержащий заряд  $dq(t) = \rho(\vec{r}'|t) dV'$ . Потенциал  $d\varphi(\vec{r}|t)$  поля, создаваемого этим зарядом, можно сразу получить из (40.13) простым сдвигом начала координат на вектор  $\vec{r}'$ , т.е. заменой  $\vec{r} \mapsto \vec{r} - \vec{r}'$ . В итоге будем иметь

$$d\varphi(\vec{r}|t) = \frac{\rho\left(\vec{r}'\left|t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right.\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (40.14)$$

Чтобы найти потенциал  $\varphi(\vec{r}|t)$  полного поля в точке  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ , создаваемого всеми зарядами, достаточно воспользоваться принципом суперпозиции и просуммировать выражение (40.14) по этим зарядам, т.е. фактически проинтегрировать его по всему пространству. В результате мы и приходим к формуле (40.6) для запаздывающего скалярного потенциала.

Следует иметь в виду, однако, что приведенный вывод этой формулы не может быть признан математически безупречным. Правде всего, при получении выражения (40.14) рассматривался изолированный элементарный объем  $dV'$ , в котором содержится переменный во времени заряд  $dq(t)$ . Но существование такой физической системы не допускается законом сохранения электрического заряда. Правда, в конце проводится суммирование по всем элементарным объемам, после которого кажущиеся локальные нарушения сохранения заряда должны взаимно скомпенсироваться. Это ясно из физических соображений, хотя строгое обоснование подобной компенсации, особенно при наличии эффектов запаздывания, оказывается непростым делом. К сожалению, этой не столь уж значительной трудностью проблема не исчерпывается. Самым уязвимым местом в приведенном выводе является переход от (40.9) к (40.13), а если говорить конкретнее, распространение равенства (40.12), установленного в непосредственной близости от рассматриваемого заряда, на всю пространственную область.

В описанной ситуации представляется целесообразным убедиться прямой проверкой, что потенциал (40.6), полученный на основе эвристических или полуэвристических соображений, действительно удовлетворяет уравнению (40.1). С этой целью подействуем на функцию (40.6) оператором Даламбера и изменим порядок дифференцирования и интегрирования:

$$\square\varphi(\vec{r}|t) = \int_{\square_{\vec{r},t}} \frac{\rho\left(\vec{r}'|t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \int \left( \nabla_{\vec{R}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \right) \frac{\rho(\vec{r}'|T)}{R} dV'. \quad (40.15)$$

Здесь введены обозначения

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \equiv \vec{R}, \quad t - \frac{R}{c} \equiv T \quad (40.16)$$

и учтено, что  $\vec{\nabla}_{\vec{r}} = \vec{\nabla}_{\vec{R}}$  и  $\partial/\partial t = \partial/\partial T$ . При вычислении лапласиана от  $\rho/R$  действуем последовательно два раза оператором  $\vec{\nabla}$ . Первое дифференцирование проводим достаточно подробно:

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}} \frac{\rho(\vec{r}'|T)}{R} = \rho \vec{\nabla}_{\vec{R}} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \vec{\nabla}_{\vec{R}} \rho = \rho \vec{\nabla}_{\vec{R}} \frac{1}{R} + \frac{\dot{\rho}}{R} \vec{\nabla}_{\vec{R}} T = \rho \vec{\nabla}_{\vec{R}} \frac{1}{R} - \frac{\dot{\rho}}{cR} \vec{\nabla}_{\vec{R}} R,$$

где точка означает производную по аргументу  $T$ . После второго дифференцирования получаем

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\rho}{R} &= \vec{\nabla} \left( \rho \vec{\nabla}_{\vec{R}} \frac{1}{R} - \frac{\dot{\rho}}{cR} \vec{\nabla}_{\vec{R}} R \right) = \\ &= \left\{ \rho \nabla^2 \frac{1}{R} - \frac{\dot{\rho}}{c} \left( \vec{\nabla}_{\vec{R}} R, \vec{\nabla}_{\vec{R}} \frac{1}{R} \right) \right\} - \left\{ \frac{\dot{\rho}}{c} \left( \vec{\nabla}_{\vec{R}} \frac{1}{R}, \vec{\nabla}_{\vec{R}} R \right) + \frac{\dot{\rho}}{cR} \nabla^2 R - \frac{\ddot{\rho}}{c^2 R} (\vec{\nabla}_{\vec{R}} R, \vec{\nabla}_{\vec{R}} R) \right\}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\vec{R}), \quad \bar{\nabla} R = \frac{\vec{R}}{R}, \quad \bar{\nabla} \frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}, \quad \nabla^2 R = \frac{2}{R},$$

будем иметь

$$\nabla^2 \frac{\rho}{R} = -4\pi\rho\delta(R) + \frac{\ddot{\rho}}{c^2 R}.$$

Совместно с очевидным равенством

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left( \frac{\rho}{R} \right) = \frac{\ddot{\rho}}{R}$$

это дает

$$\square \frac{\rho}{R} = -4\pi\rho\delta(\vec{R}) \equiv -4\pi\rho\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (40.17)$$

где учтены обозначения (40.16). Подстановка последнего выражения в интеграл (40.15) и приводит к устанавливаемому результату:

$$\square\phi(\vec{r}|t) = -4\pi \int \rho \left( \vec{r}' | t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' = -4\pi\rho(\vec{r}|t). \quad (40.18)$$

При выводе формулы (40.6) для запаздывающего скалярного потенциала мы на основе физических соображений положили в (40.8)  $dg_0 = 0$ . Но в принципе в (40.8) можно было бы положить  $df_0 = 0$ , что привело бы к опережающему скалярному потенциалу

$$\tilde{\phi}(\vec{r}|t) = \int \frac{\rho \left( \vec{r}' | t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (40.19)$$

также удовлетворяющему исходному уравнению (40.1). Аналогичная формула, которая получается из (40.19) заменой  $\rho \mapsto \vec{j}/c$ , справедлива и для векторного потенциала.

Существование подобных решений не должно вызывать удивления, ибо опережающие потенциалы отличаются от запаздывающих фактически лишь знаком времени  $t$  в функциях  $\rho$  и  $\vec{j}$ , а основные уравнения электродинамики, в том числе уравнение Даламбера (40.1), инварианты относительно обращения времени  $t \rightarrow -t$ . Однако не следует путать формальные математические результаты с физическими. Как мы видели выше, запаздывающие потенциалы отвечают вполне определенной постановке физической задачи и имеют самый непосредственный физический смысл, тогда как опережающим потенциалам придать подобный смысл довольно затруднительно. Тем не менее, иногда они используются в физических задачах, в частности, когда приходится учитывать падающее на систему заряженных частиц из «бесконечности» внешнее электромагнитное излучение. Мало того, в истории физики известен случай (Дж.Уилер и Р.Фейнман, 1945 г.) последовательного применения полусуммы запаздывающих и опережающих потенциалов с целью возвращения

в электродинамике к концепции дальнего действия. Однако эта интересная сама по себе попытка не увенчалась особым успехом, хотя и стимулировала целый ряд исследований, в частности разработку Р.Фейнманом эффективных методов расчета в квантовой электродинамике.

#### §41. Дипольное приближение для поля в волновой зоне

Исходим из выражения (40.7) для запаздывающего векторного потенциала:

$$\vec{A}(\vec{r}|t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}'|t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (41.1)$$

Как мы видели в гл. IV и V, соответствующие формулы не столь уж полезны даже в случае стационарных полей, где нет вообще никакой зависимости от времени. Здесь же ситуация усугубляется тем, что при интегрировании по области расположения частиц разным пространственным точкам  $\vec{r}'$  отвечают разные моменты времени  $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ . Поэтому, как и обычно, целесообразным оказывается какой-то адекватный приближенный анализ.

Пусть задано произвольное распределение зарядов, которые движутся в ограниченной области пространства, и пусть начало координат помещено где-то внутри этой области. Нас будет интересовать электромагнитное поле вдали от порождающих его зарядов, т.е. при  $r \gg r'$ . В такой задаче имеется малый параметр  $\varepsilon = r'/r$ , по которому естественно проводить разложение в ряд Тейлора. При этом мы ограничимся нулевым членом разложения функции (41.1), просто полагая  $\vec{r}' = 0$  во всех разностях  $\vec{r} - \vec{r}'$  (подробнее см. приложение к данному параграфу). В результате для векторного потенциала (40.1) получим следующее приближенное выражение, которое неизмеримо проще исходного:

$$\vec{A}(\vec{r}|t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}'|\tau) dV', \quad (41.2)$$

где  $\tau \equiv t - r/c$ .

Будем рассматривать систему точечных заряженных частиц, для которой преобразование интеграла в правой части (41.2) осуществляется особенно просто. Переходя от объемного распределения зарядов к дискретному посредством подстановки (27.4), найдем, что

$$\int \vec{j}(\vec{r}'|\tau) dV' = \sum_a q_a \vec{v}_a(\tau) = \frac{d}{d\tau} \sum_a q_a \vec{r}_a(\tau) \quad (41.3)$$

[сравн. с формулой (29.3)]. Заметим, что в случае стационарного магнитного поля нулевой член разложения векторного потенциала, имеющий вид полной производной по времени, обращался в нуль (см. §29). Но здесь именно этот член играет ведущую роль.

Подставляя (41.3) в (41.2), получим в рассматриваемом приближении

$$\vec{A}(\vec{r}|t) = \frac{1}{c} \frac{\dot{\vec{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (41.4)$$

Здесь  $\vec{d}$  – дипольный момент системы частиц, вводимый определением (23.14), почему данное приближение и называется *дипольным*. При этом под точкой у производной  $\dot{\vec{d}}$  можно

понимать, очевидно, дифференцирование как по всему аргументу  $\tau$ , так и по времени  $t$ . Из формулы (41.4) явствует, что электромагнитное поле системы заряженных частиц, совершающих произвольное финитное движение, представляет собой на больших расстояниях от этой системы *расходящуюся сферическую волну* (см. §34).

Будем теперь считать неравенство  $r \gg r'$  столь сильным, чтобы в небольших участках сферическую волну можно было рассматривать как плоскую волну (подробнее см. дополнение к данному параграфу). О соответствующей пространственной области говорят как о *волновой зоне*. Согласно сказанному в §34, при дифференцировании функций вида (34.4) в волновой зоне величину  $1/r$  можно выносить из-под знака производных. Данное замечание весьма полезно при вычислении полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в дипольном приближении в волновой зоне.

Находим, с учетом этого замечания, из (41.4) магнитное поле  $\vec{B}$ :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{cr} \text{rot } \dot{\vec{d}} = \frac{1}{cr} \left[ \vec{\nabla}, \dot{\vec{d}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{cr} \left[ \vec{\nabla} \left( t - \frac{r}{c} \right), \ddot{\vec{d}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] = \frac{1}{cr} \left[ -\frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r}, \ddot{\vec{d}} \right],\end{aligned}$$

так что

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}|t) = \frac{1}{c^2} \frac{\left[ \ddot{\vec{d}} \left( t - \frac{r}{c} \right), \vec{n} \right]}{r} \equiv \frac{\vec{B}_0 \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r}}. \quad (41.5)$$

где  $\vec{n} \equiv \vec{r}/r$ . Вычисление электрического поля  $\vec{E}$  не требует специальных выкладок, ибо в рассматриваемом случае оно связано с магнитным полем  $\vec{B}$  тем же соотношением (33.16)  $\vec{E} = [\vec{B}, \vec{n}]$ , что в плоской волне. Отсюда и из (41.5) сразу получаем

$$\vec{E}(\vec{r}|t) = \frac{\left[ \left[ \ddot{\vec{d}} \left( t - \frac{r}{c} \right), \vec{n} \right], \vec{n} \right]}{c^2 r} \equiv \frac{\vec{E}_0 \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (41.6)$$

Как мы видели в гл. IV и V, при финитном распределении электрических зарядов *стационарные поля*  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  убывают при  $r \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $1/r^2$ . Из формул же (41.5) и (41.6) явствует, что при аналогичном распределении зарядов *переменные во времени поля*  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  ведут себя на больших расстояниях совершенно иначе: при  $r \rightarrow \infty$  они убывают значительно медленнее стационарных полей – по закону  $1/r$ . Это обстоятельство играет решающую роль при физической интерпретации полученных выше результатов, которая будет обсуждаться в следующем параграфе.

#### Дополнение к §41\*

Обсудим условия применимости принятых выше приближений. Обратимся, прежде всего, к разложению векторного потенциала (41.1) по малому параметру  $\varepsilon = r'/r$ . Что касается плавно меняющейся функции  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ , то при  $\varepsilon \ll 1$ , т.е. при  $r \gg r'$ , ее несомненно можно заменить на  $1/r$ . С плотностью же тока  $\vec{j}$ , которая может быстро изменяться во

времени, дело обстоит сложнее. Здесь следует, вообще говоря, сначала разложить  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  в ее аргументе, удерживая члены первого порядка малости по  $\varepsilon$ , а затем провести разложение и самой функции  $\vec{j}$  по  $r'/r$ . Используя формулу (23.9), сразу получим

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \cong r - \left( \vec{r}', \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (41.7)$$

и, оставляя пока  $\vec{j}$  неразложенным, из (41.1) будем иметь

$$\vec{A}(\vec{r}|t) \cong \frac{1}{cr} \int \vec{j} \left( \vec{r}' | t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r}', \vec{r})}{cr} \right) dV' . \quad (41.8)$$

Рассмотрим временной аргумент плотности тока  $\vec{j}$ . Он включает время наблюдения  $t$  и *полное* время запаздывания, содержащее два слагаемых. Первое слагаемое  $r/c$  отвечает запаздыванию *системы* и равно времени распространения сигнала от заряженных частиц до точки наблюдения. Второе слагаемое  $(\vec{r}', \vec{r})/cr \sim r'/c$  соответствует *собственному* запаздыванию, будучи равным по порядку величины времени распространения сигнала в пределах самой системы частиц. Разумеется, собственное запаздывание как раз в отношении  $r'/r$  меньше запаздывания системы, но пренебрегать им в общей ситуации нельзя. Дело в том, что при очень быстром движении заряженных частиц их распределение, а значит, плотность тока  $\vec{j}$ , даже за малое время может измениться существенным образом. Время собственного запаздывания в (41.8) можно положить равным нулю только в том случае, если оно гораздо меньше характерного времени движения частиц внутри системы, т.е. если выполнено условие

$$\frac{(\vec{r}', \vec{r})}{cr} \sim \frac{r'}{c} \ll \frac{r'}{v} . \quad (41.9)$$

Только тогда можно будет пользоваться вместо (41.8) формулой (41.2), т.е. только тогда будет справедливо дипольное приближение (41.4) для векторного потенциала. Таким образом, имеется *два* условия применимости дипольного приближения. Исходное условие

$$r \gg r' \quad (41.10)$$

соответствует тому, что поле рассматривается на больших расстояниях от системы заряженных частиц. Другое условие

$$v \ll c \quad (41.11)$$

сразу вытекает из неравенства (41.9), где  $v$  есть характерная скорость частиц. Оно означает, что движение зарядов, порождающих электромагнитное поле, должно быть нерелятивистским.

При формулировке условия применимости приближения волновой зоны считаем, что заряженные частицы совершают квазипериодическое движение, а потому можно говорить о характерной длине  $\lambda$  сферической волны (41.4). Для замены последней в небольших участках плоской волной необходимо, чтобы расстояние  $r$  было гораздо больше не только размеров  $r'$  системы частиц, но и указанной длины волны  $\lambda$ :



$$r \gg \lambda. \quad (41.12)$$

Это и есть условие применимости приближения волновой зоны.

Сформулированные результаты допускают единообразное представление. Чтобы убедиться в этом, запишем условие (41.11) несколько иначе. Возвращаясь к породившему его неравенству (41.9), будем иметь

$$\frac{r'}{v} \gg \frac{r'}{c} \Rightarrow c \frac{r'}{v} \gg r' \Rightarrow cT \Rightarrow r',$$

т.е.

$$\lambda \gg r'. \quad (41.11,а)$$

Объединяя (41.11) с (41.12), получим следующие окончательные условия применимости дипольного приближения в волновой зоне:

$$r \gg \lambda \gg r'. \quad (41.13)$$

Отсюда видно, что если рассмотрение проводится в волновой зоне ( $r \gg \lambda$ ) и если движение частиц считается нерелятивистским ( $\lambda \gg r'$ ), то исходное предположение  $r \gg r'$  выполняется автоматически.

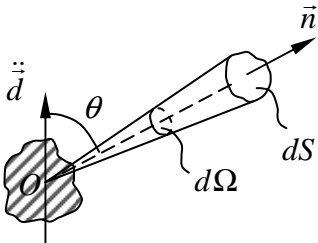
#### §42. Дипольное излучение

Как видно из формул (41.5) и (41.6), от системы зарядов, совершающих финитное движение, распространяется сферическая электромагнитная волна. Это соответствует тому, что часть энергии данной системы частиц расходуется на электромагнитное *излучение*. Плотность потока излучаемой энергии задается вектором Пойнтинга (11.7)

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{c}{4\pi} B^2 \vec{n}, \quad (42.1)$$

где при переходе к последнему выражению учтены свойства поперечности волны  $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{n}$  и соотношение  $\vec{E} = [\vec{B}, \vec{n}]$ , согласно которому  $\vec{E} \perp \vec{B}$  и  $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ .

*Дифференциальная интенсивность* излучения  $dI$  определяется как количество электромагнитной энергии, протекающей в единицу времени через элемент площади  $d\vec{S}$  сферической поверхности радиуса  $r$  с центром в начале координат, в окрестности которого находятся источники излучения (см. рисунок). Можно сказать также, что  $dI$  есть количество электромагнитной энергии, испускаемой излучателями в единицу времени в элемент телесного угла  $d\Omega$ , на который опирается элемент площади  $d\vec{S}$ .



Вспоминая смысл вектора Пойнтинга, будем иметь

$$dI = (\vec{\Pi}, d\vec{S}) = \left( \frac{c}{4\pi} B^2 \vec{n}, r^2 d\Omega \vec{n} \right), \quad (42.2)$$

где учтена формула (42.1), а также то, что  $d\vec{S} \parallel \vec{n}$  и  $dS = r^2 d\Omega$ . Из (42.2) находим

$$dI = \frac{c}{4\pi} B^2 r^2 d\Omega. \quad (42.3)$$

Подставляя сюда выражение (41.5) для магнитного поля  $\vec{B}$ , получим

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} \left[ \ddot{\vec{d}}, \vec{n} \right]^2 d\Omega. \quad (42.4)$$

Именно в этом пункте и сыграло свою решающую роль то обстоятельство, что при больших  $r$  поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  убывают по модулю как  $1/r$ . В итоге дифференциальная интенсивность излучения  $dI$ , если брать ее в соответственные моменты времени, оказывается не зависящей от расстояния  $r$  до источников. В этом находит свое выражение закон сохранения энергии, приводящий в данном случае к непрерывности потока энергии электромагнитного излучения. И именно поэтому под  $dI$  можно понимать энергию, испускаемую в элемент телесного угла  $d\Omega$ , без указания элементарной площадки  $d\vec{S}$ , которая на него опирается.

Раскроем в (42.4) модуль векторного произведения, учитывая, что  $|\vec{n}| = 1$ :

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} \left| \ddot{\vec{d}} \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (42.5)$$

Отсюда сразу видно, как излучение распределяется по углу  $\theta$  между вектором  $\ddot{\vec{d}}$  и вектором  $\vec{n}$ , задающим направление излучения (см. рисунок). Принимая во внимание, что  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ , из (42.5) найдем

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} \left| \ddot{\vec{d}} \right|^2 \sin^3 \theta d\theta d\varphi. \quad (42.6)$$

Для вычисления *полной интенсивности* излучения  $I$ , т.е. количества электромагнитной энергии, испускаемой источниками в единицу времени по всем направлениям, нужно выполнить в (42.6) интегрирование по углам. Так как интеграл по углу  $\varphi$  равен  $2\pi$ , а

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = \frac{4}{3},$$

то из (42.6) мы приходим к одной из основных формул классической теории излучения

$$\boxed{I = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\vec{d}} \right|^2}, \quad (42.7)$$

которая имеет и свой непосредственный квантовый аналог<sup>1)</sup>. Если дипольный момент изменяется во времени по периодическому (например, гармоническому) закону, то целесообразно вместо мгновенных значений  $dI$  и  $I$  интенсивности излучения рассматривать средние по периоду  $T$  значения вида

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt. \quad (42.8)$$

<sup>1)</sup> См., например: Шпольский Э.В. Атомная физика, т. II, 5-е изд. – М.: Наука, 1984, §64.

Полученные выше результаты относятся к (электрическому) *дипольному* излучению. При учете следующих членов разложения запаздывающих потенциалов возникает излучение и других типов: магнитное дипольное, электрическое квадрупольное и т.д.<sup>1)</sup> Обычно вносимые ими поправки гораздо меньше основного эффекта, связанного с дипольным излучением. Но если последнее по каким-то причинам отсутствует (пример такого рода приводится в §43), то иные типы излучения становятся главенствующими.

#### §43. Простейшие излучающие системы

Обсудим некоторые простейшие излучающие системы, а также некоторые задачи, возникающие в теории излучения, которые важны с точки зрения преподавания школьного курса физики.

1. Пусть дипольный момент системы заряженных частиц изменяется во времени по *гармоническому* закону

$$\vec{d} = \vec{d}_0 \cos \omega t. \quad (43.1)$$

Тогда из формул (41.5) и (41.6) для магнитного и электрического полей, порождаемых таким элементарным излучателем, будем иметь

$$\vec{B}(\vec{r}|t) = \frac{\omega^2 [\vec{n}, \vec{d}_0] \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}{c^2 r} \equiv \frac{\vec{B}_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} \quad (43.2)$$

и

$$\vec{E}(\vec{r}|t) = \frac{\omega^2 \left[ [\vec{n}, \vec{d}_0], \vec{n} \right] \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}{c^2 r} \equiv \frac{\vec{E}_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (43.3)$$

Видим, что электромагнитное поле представляет собой монохроматическую расходящуюся сферическую волну с частотой, равной частоте излучателя. Для полной интенсивности излучения из (42.7) и (43.1) находим

$$I(t) = \frac{2d_0^2 \omega^4}{3c^3} \cos^2 \omega t. \quad (43.4)$$

Усредняя эту величину по времени с учетом того, что  $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ , получим

$$\bar{I} = \frac{d_0^2 \omega^4}{3c^3}. \quad (43.5)$$

Отсюда видно, что интенсивность излучения диполя, изменяющегося по гармоническому закону, прямо пропорциональна квадрату амплитуды дипольного момента, а главное, четвертой степени частоты его колебаний. В итоге сразу становится понятным следующее утверждение из школьного учебника физики<sup>2)</sup>:

«... для образования интенсивных электромагнитных волн необходимо создать электромагнитные колебания достаточно высокой частоты»,

а также

<sup>1)</sup> См., например: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973, §71.

<sup>2)</sup> Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика 10. – М.: Просвещение, 1986, §43.

«... энергия, излучаемая в единицу времени, пропорциональна четвертой степени частоты».

Общеизвестно, сколь важную роль играют эти положения с точки зрения осуществления эффективной радиосвязи, основывающейся на модуляции высокочастотных электромагнитных колебаний низкочастотным сигналом<sup>1)</sup>.

2. Рассмотрим систему частиц с одинаковыми удельными зарядами:

$$\frac{q_a}{m_a} = \text{const} \equiv \frac{q}{m} \quad (43.6)$$

(наиболее важный случай – системы одинаковых частиц, например, электронов). Для дипольного момента любой такой системы имеем

$$\vec{d} = \sum_a q_a \vec{r}_a \equiv \sum_a \frac{q_a}{m_a} m_a \vec{r}_a = \frac{q}{m} \sum_a m_a \vec{r}_a. \quad (43.7)$$

Но

$$\sum_a m_a \vec{r}_a \equiv \sum_a m_a \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a} = M \vec{R}, \quad (43.8)$$

где  $M$  – полная масса системы,  $\vec{R}$  – радиус-вектор ее центра масс, а потому

$$\vec{d} = \frac{M}{m} q \vec{R}. \quad (43.9)$$

Если рассматриваемая система является замкнутой, то, как известно из механики, ее центр масс движется равномерно, т.е.  $\ddot{\vec{R}} = 0$ . Из (43.9) явствует, что тогда и  $\ddot{\vec{d}} = 0$ , а потому дипольное излучение у замкнутой системы частиц с одинаковыми удельными зарядами отсутствует. Согласно сказанному в конце §42, это не означает, что у подобной системы излучения нет, но оно, при прочих равных условиях, является весьма слабым.

Именно такая ситуация всегда имеет место в гравитодинамике, где роль заряда играет величина  $\sqrt{G}m$  ( $G$  – гравитационная постоянная), и «удельные заряды» всех частиц равны  $\sqrt{G}$ , т.е. одинаковы. Здесь может возникать только относительно слабое квадрупольное излучение. К тому же интенсивность гравитационного взаимодействия, ответственного в данном случае за излучение, предельно мала (см. табл.2 на с.5). По указанным причинам гравитационные волны до сих пор не зарегистрированы, хотя предпринималось и предпринимается множество попыток их детектирования.

3. Для одной заряженной частицы дипольный момент равен  $q\vec{r}$ , и

$$\ddot{\vec{d}} = q\ddot{\vec{r}} \equiv q\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{F}, \quad (43.10)$$

где  $\vec{a}$  – ускорение частицы,  $\vec{F}$  – действующая на нее сила. Отсюда видно, что излучать может только ускоренно движущийся заряд. Впрочем, это ясно уже из принципа относительности, ибо при  $\vec{v} = \text{const}$  существует инерциальная система отсчета, в которой данная частица покоится. Неподвижный же заряд создает вокруг себя только кулоново поле,

<sup>1)</sup> Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика 10. – М.: Просвещение, 1986, §44–46.

не излучая никакой энергии. Гораздо более важен альтернативный вывод, вытекающий из (43.10) и результатов §42: всякий ускоренно движущийся заряд обязательно излучает электромагнитные волны, причем уже в дипольном приближении. Подставляя выражения (43.10) в формулу (42.7), получим для полной интенсивности излучения

$$I = \frac{2q^2 a^2}{3c^3} = \frac{2q^2 F^2}{3m^2 c^3}. \quad (43.11)$$

3,а. Со стороны магнитного поля на заряженную частицу действует сила Лоренца

$$\vec{F} = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{B}], \quad (43.12)$$

и, согласно (43.11), интенсивность излучения этой частицы будет равна

$$I = \frac{2q^4}{3m^2 c^5} [\vec{v}, \vec{B}]^2. \quad (43.13)$$

Если магнитное поле  $\vec{B}$  стационарно и однородно, и если начальная скорость частицы  $\vec{v}_0$  перпендикулярна вектору  $\vec{B}$ , то в отсутствие излучения, как известно, частица двигалась бы по окружности неизменного радиуса с постоянной по модулю скоростью  $\vec{v} \perp \vec{B}$ . За счет излучения частица будет растрчивать свою механическую энергию, двигаясь по спирали, которая стягивается к центру исходной окружности (сравн. с движением искусственного спутника Земли, попавшего в верхние слои атмосферы).

3,б. Рассмотрим теперь поведение заряженной частицы в современных циклических ускорителях, где на нее действует не только магнитное, но и электрическое поле. Последнее сообщает частице энергию  $\varepsilon$ , прирост которой в единицу времени задается формулой (4.10):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathcal{P} = q(\vec{v}, \vec{E}). \quad (43.14)$$

Магнитное поле закручивает траектории частиц. Его закон изменения во времени  $\vec{B} = \vec{B}(t)$  и/или радиальную зависимость  $\vec{B} = \vec{B}(r)$  можно подобрать так, чтобы частица двигалась по окружности постоянного радиуса  $R$ . Но всякое криволинейное движение есть движение ускоренное, и потому ускоряемая частица будет растрчивать свою энергию на электромагнитное излучение, именуемое в данном случае *синхронным*. Энергетические потери в единицу времени определяются формулой (43.11), в которую нужно подставить центростремительное ускорение  $a = v^2/R$ :

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = I = \frac{2q^2 v^4}{3R^2 c^3} \equiv \frac{8q^2}{3m^2 R^2 c^3} \left( \frac{mv^2}{2} \right)^2 = \frac{8q^2}{3R^2 c^3} \frac{\varepsilon^2}{m^2}. \quad (43.15)$$

Они увеличиваются с возрастанием энергии по квадратичному закону и в конце концов становятся сравнимыми с приростом энергии (43.14). Потери на синхротронное излучение особенно велики для легких частиц, ибо они пропорциональны  $m^{-2}$ . Поэтому в настоящее время мощные циклические ускорители электронов практически не применяются, а вместо

них используются линейные ускорители, в которых синхротронное излучение отсутствует. Напротив, все мощные ускорители протонов до сих пор являются циклическими<sup>1)</sup>.

Заметим, что выводы, сделанные из (43.15), носят качественный характер, ибо эта формула получена в нерелятивистском приближении. Современные же ускорители работают в ультрарелятивистском режиме, т.е. в энергетической области  $\varepsilon \gg mc^2$ , в которой только потери на синхротронное излучение и существенны. Как показывают соответствующие расчеты, в этой области

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2q^2}{3R^2 c^7} \frac{\varepsilon^4}{m^4}. \quad (43.16)$$

И на самом деле трудности циклического ускорения электронов усугубляются в еще большей степени, поскольку интенсивность синхротронного излучения в реальных условиях пропорциональна  $\varepsilon^4/m^4$ . Подчеркнем также, что синхротронное излучение, основы теории которого заложили в 1944г. советские физики Д.Д.Иваненко и И.Я. Померанчук, приводит не только к вредным эффектам. Оно нашло множество полезных применений в различных областях современной физики<sup>2)</sup>. Кроме того, механизм возникновения синхротронного излучения часто используется в астрофизике для объяснения рентгеновских, оптических и радиоизлучений самых различных космических источников.

3,в. В школьном учебнике физики можно прочитать следующее<sup>3)</sup>:

«Простая и наглядная планетарная модель атома имеет прямое экспериментальное обоснование... Но эта модель совершенно не способна объяснить факт существования атома, его устойчивость... Как показывают совершенно строгие расчеты, основанные на механике Ньютона и электродинамике Максвелла, электрон за ничтожное время должен упасть на ядро. Атом должен прекратить свое существование.»

Теперь мы полностью подготовлены к тому, чтобы провести соответствующие расчеты, хотя они и не будут «совершенно» строгими. Оценим время жизни резерфордского атома водорода, в котором электрон обращается вокруг протона. За счет электромагнитного излучения он должен двигаться по спирали, стягивающейся к протону (сравн. с п. 3,а). Будем считать энергетические потери на протяжении одного оборота малыми (это предположение оправдывается окончательным результатом), так что в каждый малый промежуток времени электрон можно рассматривать движущимся по окружности, радиус  $r = r(t)$  которой постепенно уменьшается. Подставляя в формулу (43.11) кулонову силу  $F = e^2/r^2$ , действующую на электрон со стороны протона, получим для его энергетических потерь в единицу времени

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = I = \frac{2e^6}{3m^2 c^4} \frac{1}{r^4}. \quad (43.17)$$

Скорость  $v$ , входящую в выражение для энергии

<sup>1)</sup> См., например: Наумов А.И. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – М.: Просвещение, 1984, § 17–19.

<sup>2)</sup> См. сб. статей: Синхротронное излучение. Свойства и применение/Пер. с англ. – М.: Мир, 1981.

<sup>3)</sup> Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика 10. – М.: Просвещение, 1986, §93.

$$\mathcal{E} = T + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r}, \quad (43.18)$$

исключим с помощью второго закона Ньютона

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}, \quad (43.19)$$

в результате чего будем иметь

$$\mathcal{E} = -\frac{e^2}{2r}. \quad (43.20)$$

Тогда соотношение (43.17) превратится в дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $r = r(t)$ :

$$\frac{e^2}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{2e^6}{3m^2 c^4} \left( \frac{1}{r} \right)^4. \quad (43.21)$$

Вводя функцию  $u = 1/r$  и разделяя в (43.21) переменные, получим

$$dt = \frac{3m^2 c^3}{4e^4} u^{-4} du. \quad (43.22)$$

Для отыскания времени жизни  $\tau$  атома водорода нужно выполнить интегрирование по  $r$  от его начального значения  $r = R$  до конечного значения  $r = 0$  или, что эквивалентно, интегрирование по  $u$  от  $1/R$  до  $\infty$ :

$$\tau = \frac{3m^2 c^3}{4e^4} \int_{1/R}^{\infty} u^{-4} du. \quad (43.23)$$

В итоге приходим к следующему результату:

$$\tau = \frac{m^2 c^3 R^3}{4e^4}. \quad (43.24)$$

Подстановка сюда численных значений

$$m \cong 9 \cdot 10^{-28} \text{ г}, \quad c \cong 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}, \quad R \sim 10^{-8} \text{ см}, \quad e \cong 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед.}$$

дает по порядку величины

$$\boxed{\tau \sim 10^{-10} \text{ с}}. \quad (43.25)$$

Мы видим, что действительно «...электрон за ничтожное время должен упасть на ядро».

Как известно, эта и другие трудности классической планетарной модели атома были предварительно преодолены Н.Бором в 1913 г., а затем окончательно устранены квантовой механикой.

В заключение несколько слов о справедливости принятого выше исходного предположения. Полагая во втором законе Ньютона (43.19)  $r = R$  (начальный радиус) и  $v = V$  (начальная скорость), получим

$$\frac{V}{R} = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}},$$

откуда для начального периода  $T$  обращения электрона находим

$$T = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi \sqrt{\frac{mR^3}{e^2}}. \quad (43.26)$$

Подставляя сюда численные значения, будем иметь

$$T \sim 10^{-16} \text{ с}. \quad (43.27)$$

Эта величина в  $10^6$  меньше времени (43.25), и электрон, падающий на протон (согласно классическим представлениям!), должен совершить огромное число оборотов. Поэтому расстояния между соседними витками спирали будут чрезвычайно малы, благодаря чему и можно считать, что в каждый относительно малый промежуток времени электрон движется по окружности. Заметим, что результат «совершенно строгих расчетов» отличается от (43.24) лишь множителем  $16/9$ , т.е. менее чем вдвое.

#### §44\*. Рассеяние света свободными электронами

Если на систему заряженных частиц падает внешняя электромагнитная волна, то под ее воздействием частицы обретут ускорения и станут излучать по всем направлениям, вторичные волны. В итоге возникнет, как говорят, *рассеяние* первичной электромагнитной волны. Для его характеристики вводится *дифференциальное сечение* рассеяния  $d\sigma$ . Оно определяется как отношение количества энергии, испускаемой зарядами в единицу времени в элемент телесного угла  $d\Omega$ , т.е. дифференциальной интенсивности их излучения  $dI$ , к плотности потока энергии поля, падающего на систему извне, т.е. к модулю вектора Пойнтинга  $\vec{\Pi}$ :

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{\Pi}} \quad (44.1)$$

(черта означает усреднение по времени). Дифференциальное сечение имеет, очевидно, размерность площади. Интегрируя его по всем направлениям, получим *полное сечение* рассеяния  $\sigma$ .

Пусть теперь имеется один свободный электрон, первоначально неподвижный, и пусть на него падает плоская монохроматическая линейно поляризованная световая волна, под действием которой он начинает двигаться. Как мы видели в гл. VI, электрическое поле такой волны можно записать в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha). \quad (44.2)$$

Обычно оно является весьма слабым (лазерные источники не рассматриваем), а потому вызываемые им колебания электрона будут малы:

$$|\Delta\vec{r}| \ll \lambda, \quad v \ll c, \quad (44.3)$$



где  $\Delta \vec{r}$  – его перемещение, а  $\vec{v}$  – скорость. Первое неравенство позволяет при рассмотрении электрической силы, действующей на электрон, считать член  $\vec{k}\vec{r} \sim r/\lambda$  в полной фазе волны (44.2) постоянным по сравнению с  $\omega t$ , так что его можно включить в начальную фазу  $\alpha$ , полагая

$$\vec{E} \cong \vec{E}_0 \cos(\omega t + \beta). \quad (44.4)$$

Второе неравенство (44.3) дает возможность пренебречь магнитной силой по сравнению с электрической, поскольку в плоской волне  $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ , и отношение модулей этих сил равно  $v/c$ .

В итоге для второй производной по времени от вектора дипольного момента  $\vec{d} = -e\vec{r}$  ( $-e$  – заряд электрона) имеем

$$\ddot{\vec{d}} = -e\ddot{\vec{r}} = -e\frac{\vec{F}}{m} = \frac{e^2}{m}\vec{E} = \frac{e^2}{m}\vec{E}_0 \cos(\omega t + \beta). \quad (44.5)$$

Отсюда и из содержания §43, п.1 заключаем, прежде всего, что частота рассеянного света  $\omega'$  совпадает с частотой падающего света  $\omega$ :

$$\omega' = \omega. \quad (44.6)$$

С другой стороны, опыты А.Комптона (1922 г.) по рассеянию рентгеновского излучения свободными электронами показали, что всегда  $\omega' < \omega$ . Общеизвестно, сколь важную роль сыграли эти результаты в становлении квантовой теории света.

Для дифференциальной интенсивности излучения электрона из формул (42.5) и (44.5) получаем

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} E^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (44.7)$$

где  $\theta$  – угол между вектором  $\vec{E}$  и направлением рассеяния. Далее, согласно (12.10), модуль вектора Пойнтинга для плоской электромагнитной волны равен

$$\Pi = \frac{c}{4\pi} E^2. \quad (44.8)$$

Подставляя эти выражения в формулу (44.1), будем иметь для дифференциального сечения рассеяния

$$d\sigma = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (44.9)$$

Проводя здесь интегрирование по всем направлениям [см. переход от (42.5) к (42.7)], придем к формуле Томсона для полного сечения рассеяния:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (44.10)$$

Ее можно записать также в виде

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (44.11)$$

Здесь  $r_e$  – так называемый классический радиус электрона (25.13), который был введен в §25 в связи с обсуждением проблемы собственной энергии частиц. В этой связи полезно вспомнить формулу для полного сечения рассеяния частиц на твердом шарике радиуса  $R$ , которое, как показывается в классической механике<sup>1)</sup>, совпадает с геометрическим сечением шарика:

$$\sigma = \pi R^2. \quad (44.12)$$

Как явствует из сравнения (44.11) с (44.12), в таком (и только таком!) контексте электрон можно считать твердым шариком радиуса  $R \sim r_e$ , на котором происходит упругое рассеяние электромагнитной волны. На самом же деле, как мы знаем из §1, размеры электрона не превышают  $10^{-18}$  м, что значительно меньше значения (25.13)  $r_e \sim 10^{-15}$  м.

#### §45\*. Сила радиационного трения

Описание движения заряженной частицы, сопровождающегося излучением электромагнитных волн, при строгом подходе к этой проблеме не вызывает каких-либо принципиальных (но не технических) затруднений. Для этого нужно рассматривать единую систему частица+поле и использовать уравнение движения частицы совместно с уравнениями Максвелла для поля (третья группа задач из §5). Возникает вопрос, а нельзя ли описывать указанное движение частицы в рамках только *механики*, исключая из рассмотрения электромагнитное поле. Ясно, что в строгой постановке ответ на этот вопрос оказывается отрицательным. Но вовсе не исключено, что он станет вполне разрешимым, если принять какие-то разумные приближения.

Ясно, что более или менее корректная механическая постановка задачи о движении заряженной частицы требует включения во второй закон Ньютона наряду с обычными силами какой-то дополнительной эффективной силы, через посредство которой должны учитываться энергетические потери на излучение. По понятным причинам она называется *силой радиационного трения* (или силой торможения излучением), и наша ближайшая цель состоит в том, чтобы найти ее явное выражение. Чисто внешним аналогом здесь может служить описание движения частицы в неинерциальной системе отсчета, которое также требует модификации второго закона Ньютона путем включения в него дополнительных сил – сил инерции.

Излучение появляется только тогда, когда частица движется ускоренно. Но ускорение не может возникнуть само по себе, и на излучающую частицу должны обязательно действовать «обычные» внешние силы. Сама постановка соответствующей механической задачи будет осмысленной, очевидно, только в том случае, когда энергетические потери гораздо меньше работы внешних сил. Это и есть главнейшее предположение при введении силы радиационного трения, и о нем нужно постоянно помнить при физической интерпретации результатов, которые будут получены ниже. В дальнейшей мы сформулируем количественный критерий применимости данного предположения.

Существует несколько выводов выражения для силы радиационного трения (по Г.Лоренцу, по П.Дираку и т.д.). Но почти все они оказываются очень сложными, а при

<sup>1)</sup> См., например: Жирнов Н.И. Классическая механика. – М.: Просвещение, 1980, § 22.

ближайшем рассмотрении – не столь уж строгими. Для нас же главной является физическая суть дела. Учитывая к тому же, что математическая строгость здесь во многом иллюзорна, мы ограничимся эвристическими рассуждениями, принадлежащими М.Планку.

Итак, для учета излучения вводим во второй закон Ньютона некую эффективную силу  $\vec{F}_R$  – силу радиационного трения:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R. \quad (45.1)$$

Подберем  $\vec{F}_R$  так, чтобы работа этой силы равнялась энергетическим потерям:

$$A_R \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{F}_R, d\vec{r}) \equiv \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_R, \vec{v}) dt = \Delta\mathcal{E} = -\int_{t_1}^{t_2} I(t) dt = -\frac{2q^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}}^2(t) dt.$$

Здесь использована формула (42.7) и учтено, что для частицы  $\ddot{\vec{d}} = q\dot{\vec{v}}$ . Выполняя в последнем выражении интегрирование по частям, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_R, \vec{v}) dt = -\frac{2q^2}{3c^3} (\dot{\vec{v}}, \vec{v}) \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2q^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{\vec{v}}, \vec{v}) dt. \quad (45.2)$$

В подавляющем большинстве физически интересных случаев внеинтегральный член справа исчезает: при периодическом движении, если  $t_2 - t_1 = T$ ; при движении частицы в магнитном поле, где  $(\dot{\vec{v}}, \vec{v}) = 0$ ; при конечном времени действия внешней силы, когда  $\dot{\vec{v}}(t_1) = \dot{\vec{v}}(t_2) = 0$ . Он исчезает и при финитном движении частицы, когда рассматриваются средние значения переменных ее состояния, ибо

$$(\dot{\vec{v}}, \vec{v}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right),$$

а усреднение полной производной по времени дает нуль. Считая данное условие выполненным, приходим к заключению, что уравнение энергетического баланса (45.2) будет справедливо, если положить

$$\vec{F}_R = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}}. \quad (45.3)$$

Таким образом, мы установили, что во всех указанных случаях выражение (45.3) для силы радиационного трения оказывается *достаточным* для того, чтобы удовлетворить сформулированным выше требованиям. «Строгие» же его выводы претендуют на доказательство того, что это выражение является единственно возможным, а к тому же универсальным.

Так или иначе, уравнение движения заряженной частицы с учетом ее электромагнитного излучения принимает следующий вид:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}}, \quad (45.4)$$

где  $\vec{F}$  – обычная сила (чаще всего сила Лоренца), зависящая от  $\vec{r}$ ,  $\dot{\vec{r}}$  и, может быть, явно от времени  $t$ . Естественно задать вопрос, в полной ли мере достигнута цель, поставленная в начале параграфа. Мы стремились описать поведение излучающей частицы на чисто механическом языке. Но на самом деле, как видно из (45.4), эффективный учет потерь на излучение приводит к выходу за рамки классической механики. Ведь основой последней служит то, что состояние частицы задается ее координатами и скоростью, или, эквивалентно, что ускорение частицы есть функция ее координат и скорости:  $\ddot{\vec{r}} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}|t)$ . Это и есть уравнение движения, т.е. фактически второй закон Ньютона<sup>1)1)</sup>.

Уравнение же (45.4) содержит член с *третьей* производной координат по времени, существование которого противоречит самому духу механики. Поэтому к нему нужно относиться с должной осторожностью, и выражение (45.3) для силы радиационного трения, приближенное по своей сути, не следует фетишизировать. Напомним, что мы с самого начала исходили из предположения

$$|\vec{F}_R| \ll |\vec{F}|. \quad (45.5)$$

В такой ситуации наиболее последовательным представляется не точный учет силы радиационного трения в уравнении движения (45.4) (все равно ее включение не вполне адекватно), а учет ее через посредство метода итераций. Соответствующий пример будет рассмотрен ниже.

Если не принимать во внимание всего сказанного, то можно сразу же прийти к физически нелепым результатам. Пусть внешние силы отсутствуют, т.е.  $\vec{F} = 0$ . Тогда уравнение (45.4) запишется как

$$m\vec{a} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{a}}. \quad (45.6)$$

У него есть «тривиальное» решение  $\vec{a} = 0$ , имеющее очевидный и непосредственный физический смысл: отсутствует сила, отсутствует и ускорение. Но наряду с этим существует и нетривиальное решение уравнения (45.6):

$$\vec{a} = \vec{a}_0 \exp\left(\frac{3mc^3}{2e^2} t\right). \quad (45.7)$$

Оно отвечает, например, тому, что электрон, вылетевший из конденсатора, где он обрел начальное ускорение, дальше будет двигаться с экспоненциально возрастающим ускорением (и, конечно, с возрастающей скоростью). При этом ускорение увеличивается только благодаря энергетическим потерям (1) на излучение.

Обычно решение (45.7) объявляется нефизическим и потому отбрасывается. Соответствующая аргументация зачастую не обладает четкостью. В большинстве случаев она сводится к тому, что в данной задаче мы выходим за пределы области применимости

<sup>1)</sup> По поводу содержания законов Ньютона см.: Наумов А.И. Методические разработки к курсу теоретической физики (Введение. Классическая механика). – М.: МГПИ, 1986, §9.

классической электродинамики, ибо для характерного времени роста ускорения в (45.7) получается предельно малое значение

$$\tau = \frac{2e^2}{3mc^3} \sim 10^{-23} c. \quad (45.8)$$

В действительности же ситуация оказывается менее драматической, хотя и не лишенной тонкостей<sup>1)</sup>. Дело просто в том; что при  $\vec{F} = 0$  заведомо нарушено основное неравенство.(45.5), и потому само понятие силы радиационного трения здесь неправомерно.

Обсудим теперь условие его применимости на примере задачи, которая рассматривалась в §44. Пусть на электрон падает электромагнитная волна (44.2). Тогда на него будет действовать внешняя сила, которая, согласно (44.4), равна в хорошем приближении

$$\vec{F} = -e\vec{E}_0 \cos \omega t \quad (45.9)$$

(полагаем  $\beta = 0$ ). Отсюда в пренебрежении радиационным трением получаем

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 \cos \omega t \Rightarrow \ddot{\vec{v}} = \frac{e\omega}{m} \vec{E}_0 \sin \omega t.$$

Подставляя последнее выражение в (45.3), будем иметь

$$\vec{F}_R = \frac{2e^3}{3mc^3} \omega \vec{E}_0 \sin \omega t. \quad (45.10)$$

Из (45.9) и (45.10) заключаем, что неравенство (45.5) выполняется во все моменты времени при условии

$$\frac{2e^3}{3mc^3} \omega \ll e \Rightarrow \frac{c}{\omega} \sim \lambda \gg \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2} \sim r_e,$$

т.е. при

$$\lambda \gg r_e, \quad (45.11)$$

где  $r_e \sim 10^{-15} m$  – классический радиус электрона (25.13).

Если учесть, что длины  $\lambda \sim r_e$  отвечают самому жесткому ядерному излучению, то мы увидим, что исходное предположение (45.5) для электрона, на который падает электромагнитная волна, оказывается справедливым в большинстве реальных физических задач. Разумеется, исключаются случаи, когда он взаимодействует с фотонами, генерируемыми современными мощными ускорителями. Однако соответствующий анализ требует привлечения методов квантовой, а не классической электродинамики. Заметим, что

<sup>1)</sup> Проблематика, связанная с радиационным трением, довольно подробно обсуждается в кн.: Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика (дополнительные главы), 2е изд. – М.: Наука, 1961. В этой книге содержится интересный анализ и многих других важных вопросов классической электродинамики, в том числе свойств синхротронного излучения, о котором кратко говорилось в §43, п.3,б.

критерий (45.11) является достаточно универсальным<sup>1)</sup>. В частности, он должен выполняться для электронного осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$ , излучающего электромагнитные волны с  $\lambda \sim c/\omega_0$  (см. §43, п.1). Рассмотрим эту важную задачу подробнее.

Пусть на электрон действует квазиупругая сила  $\vec{F} = -k\vec{r}$ , а других внешних сил нет. Тогда уравнение движения (45.4) запишется как

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{2e^2}{3mc^3} \dddot{\vec{r}}, \quad (45.12)$$

где  $\omega_0^2 = k/m$ . Пренебрегая излучением, получим  $\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \alpha)$ , и исходное предположение (45.5) сведется в данном случае к неравенству

$$\frac{2e^2}{3mc^3} \omega_0^3 \ll \omega_0^2. \quad (45.13)$$

Отсюда вновь приходим к условию (45.11), которое, как мы видели, даже в рентгеновском диапазоне выполняется с огромным запасом.

Преобразуем уравнение (45.12) с помощью упоминавшегося выше метода итераций. Полагая в нулевом приближении  $\vec{F}_R = 0$ , будем иметь

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r} \Rightarrow \dddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \dot{\vec{r}}.$$

Подстановка этого выражения для  $\ddot{\vec{r}}$  в (45.12) дает в первом приближении

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = 0}, \quad (45.14)$$

где введено обозначение

$$\gamma = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3} = \frac{2\omega_0^2}{3c} r_e \sim \omega_0 \frac{r_e}{\lambda}. \quad (45.15)$$

Уравнения (45.14) и (45.12) фактически эквивалентны. Но метод итераций позволил нам заменить немеханическую силу  $\vec{F}_R$ , включающую третью производную по времени, привычной диссипативной «механической» силой  $-m\gamma \dot{\vec{r}}$ , подобной стоковой силе вязкого трения. Заметим, что применительно к собственному излучению квазиупругого связанного электрона критерий (45.11), неравенство (45.5) можно переписать как

$$\gamma \ll \omega_0. \quad (45.16)$$

Этот результат сразу следует из определения  $\gamma$  и неравенства (45.13).

<sup>1)</sup> Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973, §75.

### §46\*. Осцилляторная модель атома

Реально свое главное применение понятие силы радиационного трения находит в задачах о взаимодействии внешнего излучения с веществом. Зачастую основную роль здесь играет электронный механизм поляризации, и для многих целей вполне адекватной оказывается осцилляторная модель атома типа старой модели Томсона («пудинг с изюмом»). В ней считается, что на атомный электрон действует некая эффективная квазиупругая сила. Именно такая модель будет использована в последней главе при построении классической теории дисперсии. Для получения физически осмысленных результатов здесь необходимо учитывать небольшие энергетические потери атомов на собственное излучение. Поэтому в теории дисперсии поведение атомного электрона описывается уравнением (45.14) с дополнительным членом, отвечающим действию падающей электромагнитной волны (сравн. с §44).

Вообще, осцилляторная модель полезна во всех случаях, когда атомные системы рассматриваются с точки зрения классической физики, в которой планетарная модель принципиально непригодна (см. §43, п.3,в). С одной стороны, она позволяет довольно просто описать на качественном, а иногда и полуколичественном уровне некоторые интересные физические явления. С другой стороны, модель хорошо демонстрирует ограниченность классических представлений применительно к атомным системам и необходимость замены их квантовыми представлениями. Ниже обсуждаются три задачи такого рода.

1. Если полностью пренебречь энергетическими потерями на излучение, то в принятой нами модели поведение возбужденного атома будет идентично поведению гармонического осциллятора, колеблющегося с собственной частотой  $\omega_0$  (см. §43, п.1). Такой атом излучает строго монохроматическую электромагнитную волну, и в спектре его испускания присутствует одна абсолютно резкая линия, отвечающая частоте  $\omega_0$ .

Учтем теперь силу радиационного трения, считая, как и всегда, справедливым неравенство (45.16). Пусть при  $t < 0$  электрон покоился в положении равновесия, с которым совместим начало координат, и пусть в начальный момент времени  $t = 0$  атом каким-то образом возбудился так, что электрон оказался в точке с радиус-вектором  $\vec{r}_0$ , вдоль которого направим ось  $x$ . Движение электрона при  $t \geq 0$  будет описываться уравнением вида (45.14)

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (46.1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (46.2)$$

( $y = z = 0$  при всех  $t$ ). Решение данной задачи хорошо известно из курса общей физики. Оно отвечает затухающим колебаниям

$$x = \begin{cases} x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (46.3)$$

где учтено, что  $\gamma \ll \omega_0$  (в точном решении  $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$ ). Вводя ступенчатую функцию Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (46.4)$$

перепишем (46.3) как

$$x = x_0 \theta(t) \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos \omega_0 t . \quad (46.5)$$

Неравенство  $\gamma \ll \omega_0$  позволяет при вычислении производных функции  $x = x(t)$  по времени дифференцировать только последний множитель  $\cos \omega_0 t$ , считая «амплитуду»  $x_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)$  постоянной (убедитесь в этом самостоятельно). Поэтому для ускорения электрона из (46.5) имеем

$$a \equiv \ddot{x} = -x_0 \omega_0^2 \theta(t) \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos \omega_0 t . \quad (46.6)$$

Подстановка соответствующего выражения для  $\ddot{a} = -e\ddot{a}$  в формулу (41.5), определяющую магнитное поле излучения, дает

$$\vec{B}(\vec{r}|t) = \frac{\vec{B}_0}{r} \theta\left(t - \frac{r}{c}\right) \exp\left[-\frac{\gamma}{2}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]. \quad (46.7)$$

Аналогичный результат получается из (41.6) для электрического поля  $\vec{E}$  [сравн. с формулами (43.2) и (43.3)].

Как мы видим, поле излучения теперь уже не является строго монохроматическим, а представляет собой волновой пакет типа изображенного на с.175. Его длительность определяется экспоненциальным множителем в (46.7) и равна, очевидно,

$$\Delta t \equiv \tau = \frac{2}{\gamma} . \quad (46.8)$$

Здесь, как и всегда, принято соглашение, согласно которому считается, что экспоненциально затухающий процесс прекращается в тот момент времени, когда начальная амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Подстановка (46.8) в соотношение (38.15) показывает, что при учете энергетических потерь атома на излучение линия в спектре его испускания уже не будет абсолютна резкой. Она несколько размывается и обладает *естественной шириной*

$$\Delta\omega \equiv \Gamma \sim \gamma . \quad (46.9)$$

Из неравенства  $\gamma \ll \omega_0$  явствует, что относительное уширение спектральных линий является очень малым. В дополнении к данному параграфу проводится строгий количественный анализ этого явления, рассмотренного здесь на качественном уровне.

2. Следуя Г. Лоренцу, применим осцилляторную модель атома для классического объяснения *эффекта Зеемана*. Как известно, суть последнего состоит в том, что под действием внешнего магнитного поля  $\vec{B}$  (стационарного и однородного:  $\vec{B} = const$ ) линии в спектре испускания атомов расщепляются на несколько компонентов. В данной задаче нет необходимости в учете радиационного трения, и уравнение движения электрона записывается как



$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}, \vec{B}] . \quad (46.9)$$

Направляем ось  $z$  вдоль вектора  $\vec{B}$  и расписываем (46.9) по компонентам:

$$\ddot{x} + 2\omega_L\dot{y} + \omega_0^2x = 0, \quad \ddot{y} - 2\omega_L\dot{x} + \omega_0^2y = 0, \quad \ddot{z} + \omega_0^2z = 0 . \quad (46.10)$$

Здесь  $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$  – частота колебаний в отсутствие магнитного поля, а

$$\omega_L \equiv \frac{eB}{2mc} . \quad (46.11)$$

есть так называемая ларморова частота. Эффект Зеемана по самому его определению наблюдается в достаточно слабых магнитных полях. Это означает, что должно выполняться неравенство

$$\omega_L \ll \omega_0 . \quad (46.12)$$

Из последнего уравнения (46.10) явствует, что вдоль оси  $z$  электрон колеблется с частотой  $\omega_0$ . Исследование его движения в плоскости  $xu$ , описываемого первыми двумя уравнениями, можно провести с помощью стандартной процедуры. Однако здесь мы воспользуемся случаем, чтобы продемонстрировать один эффективный прием, часто применяемый для анализа поведения заряженных частиц при наличии магнитного поля (или во вращающейся системе отсчета).

Умножая второе уравнение (46.10) на мнимую единицу  $i$  и складывая результат с первым уравнением, будем иметь

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) - 2i\omega_L(\dot{x} + i\dot{y}) + \omega_0^2(x + iy) = 0 . \quad (46.13)$$

Если теперь вместо двух неизвестных вещественных функций  $x(t)$  и  $y(t)$  ввести одну комплексную функцию  $\eta(t) = x(t) + iy(t)$ , то для нее из (46.13) получим

$$\ddot{\eta} - 2i\omega_L\dot{\eta} + \omega_0^2\eta = 0 . \quad (46.14)$$

Как и всегда, решения этого уравнения ищем в виде

$$\eta(t) = A_{\pm} e^{i\omega_{\pm}t} \quad (46.15)$$

с  $\omega > 0$ . Подстановка (46.15) в (46.14) приводит, после сокращения на общие экспоненциальные множители, к характеристическим уравнениям

$$\omega^2 \mp 2\omega_L\omega - \omega_0^2 = 0 . \quad (46.16)$$

Они имеют два положительных решения

$$\omega_{\pm} = \pm\omega_L + \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2} , \quad (46.17)$$

или, с учетом неравенства (46.12),

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \omega_L . \quad (46.18)$$

Таким образом, движение электрона в плоскости  $xu$  представляет собой суперпозицию колебаний с частотами, задаваемыми формулами (46.18).

Вспоминая последнее уравнение (46.10), придем к выводу, что полное движение электрона есть суперпозиция трех гармонических колебаний с частотами

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_+ = \omega_0 + \frac{eB}{2mc}, \quad \omega_- = \omega_0 - \frac{eB}{2mc} . \quad (46.19)$$

Поэтому при наличии магнитного поля в спектре испускания атома будут присутствовать не одна, а три спектральные линии, разделенные интервалами

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2mc} . \quad (46.20)$$

Но это и есть эффект Зеемана! Данное явление объяснено здесь с позиций классической физики. Однако очень скоро выяснилась ограниченность подобного объяснения. Описанная картина («нормальный» эффект Зеемана) является скорее исключением, чем правилом. В большинстве случаев спектральные линии расщепляются не на три, а на большее число компонентов, причем расстояния между ними не равны ларморовой частоте («аномальный» эффект Зеемана). Полное объяснение эффект Зеемана получил только в рамках квантовой механики. Заметим, что его детальное исследование резко стимулировало в свое время введение понятия спина.

3. Попробуем теперь хотя бы качественно объяснить с подобных же позиций *эффект Штарка* – расщепление линий в спектре испускания атомов под действием внешнего электрического поля  $\vec{E} = const$ . В этом случае уравнение движения электрона записывается как

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - e\vec{E} , \quad (46.21)$$

или

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E} . \quad (46.22)$$

Если вместо  $\vec{r}$  ввести новую неизвестную функцию

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{e}{m\omega_0^2} \vec{E} , \quad (46.23)$$

то для нее из (46.22) будем иметь

$$\ddot{\vec{\rho}} + \omega_0^2 \vec{\rho} = 0 . \quad (46.24)$$

Но это есть уравнение движения гармонического осциллятора с прежней собственной частотой  $\omega_0$  и лишь со смещенным на вектор  $-e\vec{E}/m\omega_0^2$  положением равновесия. Следовательно, наличие внешнего электрического поля никак не должно сказываться на характере спектров испускания атомов. Мы видим, что классическая физика оказалась вообще не способной объяснить эффект Штарка. Правда, при учете энгармонизма и в ее

рамках удается получить некоторое расщепление спектральных линий, но соответствующие результаты совершенно не согласуются с опытными данными.

Дополнение к §46\*

Обсудим проблему естественного уширения спектральных линий, кратко затронутую в п.1, с количественной точки зрения. Подстановка выражения (46.6) в формулу (43.11) дает для интенсивности излучения

$$I = \frac{2e^2 x_0^2 \omega_0^4}{3c^3} \theta(t) e^{-\gamma t} \cos^2 \omega_0 t . \quad (46.25)$$

В среднем эта величина убывает во времени по экспоненциальному закону  $\exp(-\gamma t)$ . Для полной энергии, излучаемой электроном в осцилляторной модели атома, из (46.25) имеем

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I dt = \frac{2e^2 x_0^2 \omega_0^4}{3c^3} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{e^2 x_0^2 \omega_0^4}{3c^3} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (1 + \cos 2\omega_0 t) dt . \quad (46.26)$$

Используя формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx = \frac{a}{a^2 + b^2} , \quad (46.27)$$

которая получается двойным интегрированием по частям, находим

$$\mathcal{E} = \frac{e^2 x_0^2 \omega_0^4}{3c^3} \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma^2 + 4\omega_0^2} \right) ,$$

или, с учетом того, что  $\gamma \ll \omega_0$ ,

$$\mathcal{E} = \frac{e^2 x_0^2 \omega_0^4}{3c^3} \frac{1}{\gamma} . \quad (46.28)$$

Данный результат имеет очень простой физический смысл. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в (46.28) выражение (45.15) для  $\gamma$ :

$$\mathcal{E} = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2} . \quad (46.29)$$

Справа стоит энергия гармонического осциллятора, колеблющегося с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $x_0$ . А это означает, что полная энергия, излучаемая электроном в виде электромагнитных волн, равна полной механической энергии его колебаний, вычисленной в начальный момент времени [при малых значениях  $t$  в (46.5) можно положить  $\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) = 1$ ].

Теперь нас будет интересовать *спектральное распределение* излучения. Оно характеризуется функцией  $\varphi(\omega)$ , вводимой определением

$$d\mathcal{E}_\omega = \varphi(\omega) d\omega, \quad (46.30)$$

где  $d\mathcal{E}_\omega$  есть полная энергия, которая излучается в виде электромагнитных волн с частотами, лежащими в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Из этого определения очевидно, что

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \int_0^{\infty} \varphi(\omega) d\omega. \quad (46.31)$$

Чтобы найти функцию  $\varphi(\omega)$ , сделаем небольшое математическое отступление. Пусть имеется вещественная функция  $f(t)$ , стремящаяся к нулю при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Попытаемся представить интеграл по времени от ее квадрата в виде интеграла по частотам от некоторой функции  $F(\omega)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (46.32)$$

Для этого разложим  $f(t)$  в интеграл Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (46.33)$$

где фурье-образ  $\tilde{f}(\omega)$  задается формулой

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (46.34)$$

и обладает, в силу вещественности функции  $f(t)$ , свойством

$$\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega). \quad (46.35)$$

Подстановка разложения (46.33) в левую часть (46.32) с последующим использованием формулы (46.34) дает

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right\} d\omega = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \tilde{f}(-\omega) d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} \tilde{f}(\omega) f(-\omega) d\omega, \end{aligned}$$

где на последнем этапе учтено очевидное свойство четности подынтегрального выражения. Принимая теперь во внимание соотношение (46.35), получим

$$F(\omega) = 4\pi \tilde{f}(\omega) \tilde{f}^*(\omega) \equiv 4\pi |\tilde{f}(\omega)|^2. \quad (46.36)$$

Возвращаясь к обсуждаемой физической задаче, заметим, что в соответствии с (43.11), в формуле (46.31)

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} a^2(t) dt . \quad (46.37)$$

Поэтому, согласно только что установленному результату (46.36),

$$\varphi(\omega) = \frac{8\pi e^2}{3c^3} |\tilde{a}(\omega)|^2 . \quad (46.38)$$

Таким образом, для определения спектрального распределения излучения нам осталось найти функцию  $\tilde{a}(\omega)$ , затем вычислить квадрат ее модуля.

Для фурье-образа ускорения (46.6) с помощью формул (46.34) и (46.27) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-i\omega t} dt = -\frac{x_0 \omega_0^2}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega\right)t} \cos \omega_0 t dt = \\ &= -\frac{x_0 \omega_0^2}{2\pi} \frac{\frac{\gamma}{2} + i\omega}{\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega\right)^2 + \omega_0^2} , \end{aligned}$$

т.е.

$$\tilde{a}(\omega) = -\frac{x_0 \omega_0^2}{2\pi} \frac{\frac{\gamma}{2} + i\omega}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\gamma^2}{4} \right] + i\gamma\omega} . \quad (46.39)$$

Используя равенство

$$\left| \frac{a+ib}{c+ia} \right|^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+a^2} ,$$

из (46.39) будем иметь

$$|\tilde{a}(\omega)|^2 = \frac{x_0^2 \omega_0^4}{4\pi^2} \frac{\omega^2 + \frac{\gamma^2}{4}}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\gamma^2}{4} \right]^2 + \gamma^2 \omega^2} . \quad (46.40)$$

Данная функция имеет резкий максимум в точке  $\omega = \omega_0$ , очень быстро убывая при удалении  $\omega$  от этой точки. Воспользуемся отмеченным обстоятельством для преобразования выражения (46.40), полагая, где возможно,  $\omega = \omega_0$  и учитывая неравенство  $\gamma \ll \omega_0$ :

$$|\tilde{a}(\omega)|^2 \cong \frac{x_0^2 \omega_0^4}{4\pi^2} \frac{\omega_0^2}{\left[ 2\omega_0(\omega_0 - \omega) + \frac{\gamma^2}{4} \right]^2 + \gamma^2 \omega_0^2} = \frac{x_0^2 \omega_0^4}{16\pi^2} \frac{1}{\left[ (\omega_0 - \omega) + \frac{\gamma^2}{8\omega_0} \right]^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \cong \frac{x_0^2 \omega_0^4}{16\pi^2} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} .$$

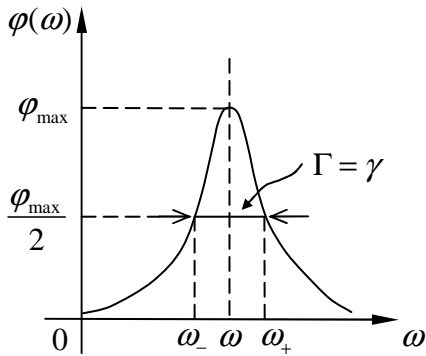
Подстановка этого выражения в (46.38) дает

$$\varphi(\omega) = \frac{8\pi e^2}{3c^3} \frac{x_0^2 \omega_0^4}{16\pi^2} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{e^2 x_0^2 \omega_0^4}{3c^3} \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}},$$

или, если вспомнить формулу (46.28),

$$\boxed{\varphi(\omega) = \frac{\delta}{2\pi} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}}. \quad (46.41)$$

График функции  $\varphi(\omega)$ , идентичный по форме контуру соответствующей линии в спектре испускания возбужденных атомов (в рамках рассматриваемой модели!) представлен на рисунке. Максимальное значение, достигаемое в точке  $\omega = \omega_0$ , равно



$$\varphi_{\max} = \frac{2\mathcal{E}}{\pi\gamma}. \quad (46.42)$$

Как легко увидеть из (46.41), значения половинного максимума  $\mathcal{E}/\pi\gamma$  функции  $\varphi(\omega)$  достигаются в точках

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}. \quad (46.43)$$

Поэтому величина

$$\Gamma_{1/2} = \frac{\gamma}{2} \quad (46.44)$$

называется *полушириной* спектральной линии, а величина

$$\Gamma = \gamma \quad (46.45)$$

– ее *шириной*. Эти результаты полностью согласуются с оценкой (46.9), полученной на основе качественных соображений.