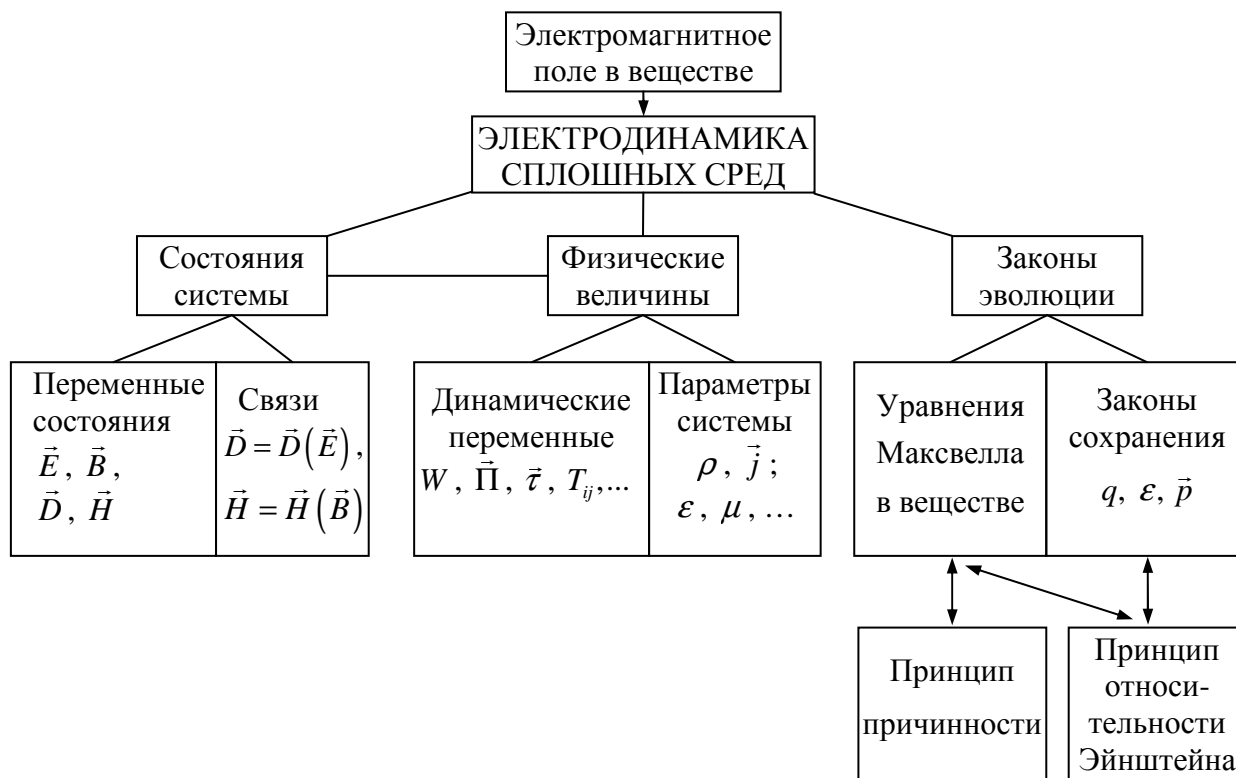


Глава VIII. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

В данной главе обсуждаются элементы общей конструкции электродинамики сплошных сред, представленной в табл. 4 (сравн. с табл.3 на с.8).

Таблица 4



Сразу же подчеркнем, что универсальных уравнений для электромагнитного поля в веществе, подобных аналогичным уравнениям в вакууме (см. гл. II), и даже достаточно универсальных понятий, относящихся к данной области физической науки, не существует.

«Вид уравнений макроскопической электродинамики и смысл входящих в них величин существенно зависят от природы материальной среды, а также от характера изменения поля во времени»¹⁾.

Часто используемые уравнения Максвелла в веществе, анализу которых, в основном, и посвящена данная глава, являются заведомо приближенными. Они носят полуфеноменологический характер и имеют очень узкую область применимости (подробнее см. ниже), а потому не могут быть отнесены к числу фундаментальных физических законов. Тем не менее, при рассмотрении определенного круга явлений эти уравнения весьма полезны.

§47 Феноменологический подход

Вещество представляет собой *макроскопическую* систему огромного числа частиц. Внешнее электромагнитное поле вызывает в нем локальное перераспределение элементарных зарядов и порождаемых ими элементарных токов, что, в свою очередь, приводит к изменению самого исходного поля. В итоге возникает сложнейшая задача

¹⁾ Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, 2-е изд. – М.: Наука, 1982. – с.13.

самосогласованного описания совместного поведения частиц вещества и поля. Как уже отмечалось во введении, при ее полном и последовательном решении необходимо привлекать идеи статистической физики и кинетики. Однако в ряде случаев переменные состояния, связанные с частицами, удается эффективно исключить из рассмотрения. Достигается это путем удвоения числа переменных состояния самого электромагнитного поля – введением наряду с электрическим и магнитным полями \vec{E} и \vec{B} двух вспомогательных векторных полей \vec{D} и \vec{H} . Смысл всех этих величин выяснится в последующих параграфах, в процессе изложения элементов статистического подхода. Здесь же мы ограничимся феноменологическим анализом данного круга явлений, восходящим к Дж. Максвеллу.

I. Поля \vec{D} и \vec{H}

Начнем обсуждение со случая стационарных электромагнитных полей. Пусть электрические заряды распределены с некоторой объемной плотностью $\rho = \rho(\vec{r})$. Если эти заряды находятся в вакууме, то они порождают электростатическое поле $\vec{E}_0 = \vec{E}_0(\vec{r})$, подчиняющееся первому уравнению (19.2):

$$\operatorname{div} \vec{E}_0 = 4\pi\rho. \quad (47.1)$$

Если те же заряды помещены в вещество, то, согласно сказанному выше, создаваемое ими поле $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ будет отличаться от \vec{E}_0 и для него уже $\operatorname{div} \vec{E} \neq 4\pi\rho$. Наоборот, чтобы сохранить равенство $\vec{E} = \vec{E}_0$, в вещество нужно поместить заряды с некоторой плотностью, отличной от ρ . С целью описания этого круга эмпирических фактов вводят вспомогательное векторное поле $\vec{D} = \vec{D}(\vec{r})$, называемое *электрическим смещением* (в более старой терминологии – электрической индукцией), которое мы будем обычно именовать просто полем \vec{D} (сравн. со сказанным на с.21). По определению, данное поле подчиняется уравнению вида (47.1)

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho. \quad (47.2)$$

В этом отношении оно совпадает с электрическим полем \vec{E}_0 , которое создавалось бы в вакууме тем же распределением зарядов ρ . Однако к подобной интерпретации не следует относиться слишком серьезно, ибо одним только уравнением (47.2) поле \vec{D} не определяется полностью¹⁾. В частности, из соотношения $\operatorname{div}(\vec{D} - \vec{E}_0) = 0$, вытекающего из (47.1) и (47.2), вовсе не следует, что $\vec{D} - \vec{E}_0 = 0$, т.е. что $\vec{D} = \vec{E}_0$.

Заметим, что свойство потенциальности электростатического поля никак не связано с характером распределения зарядов, а значит, его не могут изменить их локальные смещения. Поэтому второе уравнение (19.2) должно быть справедливым как в вакууме ($\operatorname{rot} \vec{E}_0 = 0$), так и в веществе:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (47.3)$$

¹⁾ Для однозначного восстановления векторного поля нужно знать не только его дивергенцию, но и ротор (теорема Гельмгольца).

Совершенно аналогичные рассуждения применимы и к стационарному магнитному полю. Электрический ток с плотностью $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ создает в вакууме магнитное поле $\vec{B}_0 = \vec{B}_0(\vec{r})$, подчиняющееся второму уравнению (27.5):

$$\text{rot } \vec{B}_0 = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (47.4)$$

В веществе тот же ток будет порождать магнитное поле $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$, отличное от \vec{B}_0 . Для сохранения равенства $\vec{B} = \vec{B}_0$ нужно, чтобы плотность тока здесь отличалась от \vec{j} . С целью описания этих эмпирических фактов вводят *напряженность* магнитного поля $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r})$. По определению, поле \vec{H} подчиняется уравнению вида (47.4)

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (47.5)$$

Оно совпадает с магнитным полем \vec{B}_0 , которое создавалось бы в вакууме тем же электрическим током \vec{j} [см., однако, замечание после уравнения (47.2)]. Далее, факт отсутствия в природе магнитных зарядов является универсальным, и потому первое уравнение (27.5) справедливо как в вакууме ($\text{div } \vec{B}_0 = 0$), так и в веществе:

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (47.6)$$

Обратимся теперь к общему случаю нестационарных электромагнитных полей. Уравнение (47.6) сохраняет свою силу в любой ситуации. Декларируется, по аналогии с уравнением (47.1) в вакууме, всеобщая справедливость и уравнения (47.2) в веществе (хотя реально оно имеет не столь уж широкую область применимости). Таким образом, модификации подлежат уравнения (47.3) и (47.5). В вакууме первое из них заменялось уравнением

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (47.7)$$

учитывающим явление электромагнитной индукции. Но в (47.7) не входят функции ρ и \vec{j} , и в нем не могут отражаться локальные перераспределения элементарных зарядов и токов. Поэтому данное уравнение должно выполняться не только в вакууме, но и в веществе.

Чтобы обобщить на нестационарный случай уравнение (47.5), продифференцируем обе части (47.2) по времени и учтем закон сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0. \quad (47.8)$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{D}) = \text{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} = -4\pi \text{div } \vec{j},$$

или

$$\operatorname{div} \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

Отсюда следует существование такого векторного поля $\vec{\tilde{H}}$, что

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{\tilde{H}}.$$

В стационарном случае это соотношение должно переходить в (47.5), а потому естественно положить $\vec{\tilde{H}} = \vec{H}$, и в итоге приходим к уравнению

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (47.9)$$

II. Переменные состояния, динамические уравнения, связи

Итак, в качестве *переменных состояния* электромагнитного поля в веществе выступают четыре векторные функции $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}|t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}|t)$, $\vec{D} = \vec{D}(\vec{r}|t)$, $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}|t)$. Как мы вскоре увидим, не все они независимы.

Динамическими уравнениями электродинамики сплошных сред являются *уравнения Максвелла* в веществе [сравн. с (8.1)]:

$$(I) \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho & (a) \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (б) \end{array} \right. \quad (II) \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (в) \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (г) \end{array} \right. \quad (47.10)$$

В международной системе единиц (СИ) они записываются как [сравн. с (8.3)]

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (47.11)$$

Уравнения Максвелла можно переписать также в интегральной форме [см. переход от (8.1) к (8.5)]. Соответствующие уравнения не предполагают гладкость входящих в них функций и выглядят следующим образом [сравн. с (8.5)]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\Sigma} (\vec{D}, d\vec{S}) = 4\pi q_v \\ \oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} J_s + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (\vec{D}, d\vec{S}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint (\vec{B}, d\vec{S}) = 0 \\ \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) \end{array} \right. \quad (47.12)$$

Еще раз подчеркнем, что уравнения Максвелла в веществе, в отличие от (8.1) [или (8.3)] и (8.5), не являются универсальными. Они справедливы лишь для весьма узкого класса веществ и для достаточно слабых и медленно изменяющихся полей. В современной физике эти уравнения подвергаются многочисленным модификациям.

Но даже в пределах области применимости уравнения (47.10) [и (47.12)] сами по себе достаточно бессодержательны, ибо включают слишком много неизвестных ($3 \times 4 = 12$ неизвестных на $3 \times 2 + 1 \times 2 = 8$ уравнений). Чтобы получить замкнутую систему уравнений электродинамики сплошных сред, нужно сделать какие-то дополнительные предположения. А именно, считается, что существуют так называемые *материальные уравнения*, выражающие поля \vec{D} и \vec{H} через \vec{E} и \vec{B} :

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}), \quad \vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}). \quad (47.13)$$

Заметим, что эти соотношения, играющие роль *связей* (см. табл. 4 на с.210), в принципе могут иметь не только алгебраическую, но и гораздо более сложную (скажем, интегральную) структуру.

Материальные уравнения еще менее универсальны, чем сами уравнения Максвелла в веществе. Их вид приходится, как правило, определять путем исследования физических свойств каждой конкретной рассматриваемой среды. В стандартной теории Максвелла очень часто принимается, что

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}, \quad (47.14)$$

или, в СИ,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{B}, \quad (47.15)$$

где ε – (относительная) диэлектрическая постоянная, μ – (относительная) магнитная проницаемость (ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные). Следует иметь в виду, однако, что такие материальные уравнения справедливы только в максимально простых случаях. Условия применимости соотношений (47.13) мы обсудим в последующих параграфах.

Чтобы выделить единственное решение дифференциальных уравнений Максвелла (47.10) (дополненных материальными уравнениями), к ним следует добавить определенные *граничные условия*, которые формулируются на границах раздела различных материальных сред. Эти граничные условия вытекают из уравнений Максвелла в интегральной форме (47.12), справедливых во всем пространстве. Они выводятся точно так же, как в §19 при анализе уравнений электростатики в вакууме. После соответствующих выкладок, которые читателю предлагается провести самостоятельно, получим

$$\boxed{\begin{cases} D_{n2} - D_{n1} = 4\pi\sigma \\ H_{\tau2} = H_{\tau1} \end{cases}} \quad \boxed{\begin{cases} B_{n2} = B_{n1} \\ E_{\tau2} = E_{\tau1} \end{cases}}. \quad (47.16)$$

Здесь принято во внимание, что на границе раздела двух сред могут быть поверхностные заряды с плотностью σ . В принципе, не исключено существование и поверхностных токов, плотность которых должна входить во второе условие (47.16). Но подобные физические задачи в дальнейшем не будут встречаться, и мы считаем, что поверхностные токи отсутствуют. Заметим, что для выделения единственного решения нужно фиксировать также поведение полей на бесконечности и, может быть, в начале координат (сравн. с §19). Конкретный вид этих граничных условий определяется постановкой той или иной физической задачи.

III. Потенциалы

Уравнения (47.10.П) позволяют ввести скалярный и векторный потенциалы φ и \vec{A} электромагнитного поля в веществе. Поля \vec{E} и \vec{B} выражаются через них так же, как в вакууме [см. (10.3)]:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (47.17)$$

Уравнения для потенциалов следуют из первой пары уравнений Максвелла (47.10.И), но обязательно дополненных материальными уравнениями (47.13). Если последние имеют вид (47.14), то из (47.17) и (47.10.И) получим

$$\begin{aligned} \text{div} \left\{ \varepsilon \left(-\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right\} &= 4\pi\rho \\ \text{rot} \left\{ \frac{\text{rot } \vec{A}}{\mu} \right\} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \varepsilon \left(-\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (47.18)$$

Но даже эти уравнения для потенциалов, а также граничные условия к ним, вытекающие из (47.16), (47.14) и (47.17), чрезвычайно сложны.

Существенные упрощения достигаются в случае однородных сред, для которых $\varepsilon, \mu = \text{const}$, так что эти величины можно вынести за знаки производных. Прodelывая выкладки, идентичные проведенным в §10, и накладывая на потенциалы модифицированное условие Лоренца [срав. с (10.7)]

$$\text{div } \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (47.19)$$

придем к уравнениям Даламбера [сравн. с (10.8)]

$$\boxed{\square_{\varepsilon,\mu} \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \square_{\varepsilon,\mu} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}}, \quad (47.20)$$

где

$$\square_{\varepsilon,\mu} = \nabla^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (47.21)$$

IV. Закон сохранения энергии

Рассмотрим уравнение энергетического баланса для электромагнитного поля в веществе (сравн. с §11). Умножим уравнение (47.10,г) скалярно на \vec{H} , уравнение (47.10,б) скалярно на \vec{E} , и результаты вычтем:

$$(\vec{H}, \text{rot } \vec{E}) - (\vec{E}, \text{rot } \vec{H}) = -\frac{4\pi}{c} (\vec{j}, \vec{E}) - \frac{1}{c} \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right),$$

откуда

$$\frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right\} + \frac{c}{4\pi} \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = -(\vec{j}, \vec{E}). \quad (47.22)$$

Это соотношение очень похоже на уравнение (11.5), но в то же время и существенно отличается от него. В произвольной ситуации члены в фигурных скобках не удается представить в виде производной по времени от некоторой величины W , так что, вообще говоря, нельзя привести явное выражение для энергии электромагнитного поля в веществе¹⁾.

Допустим, однако, что имеют место простейшие материальные уравнения (47.14) с ϵ и μ , не зависящими от времени. Тогда будем иметь

$$\left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \epsilon \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) + \mu \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2),$$

и (47.22) переписывается как

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = -(\vec{j}, \vec{E}), \quad (47.23)$$

где²⁾

$$\boxed{W = \frac{\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2}{8\pi} = \frac{(\vec{E}, \vec{D}) + (\vec{B}, \vec{H})}{8\pi},} \quad (47.24)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}].$$

Уравнение (47.23) можно трактовать так же, как и уравнение (11.8).

Оно выражает закон сохранения энергии, причем W есть плотность энергии электромагнитного поля в веществе, а $\vec{\Pi}$ – плотность потока энергии этого поля. Величина (\vec{j}, \vec{E}) равна работе, совершаемой полем над заряженными частицами в единицу времени в единичном объеме. Очень часто (хотя и не всегда) данная работа превращается в Джоулево тепло, которое выделяется в веществе. Интерпретация физических величин W , $\vec{\Pi}$ и (\vec{j}, \vec{E}) будет детализироваться и углубляться по ходу последующего изложения, при обсуждении конкретных физических систем и задач.

Подчеркнем еще раз, что вещество представляет собой статистическую (макроскопическую) систему. Поэтому при полном феноменологическом анализе энергетического баланса в нем необходимо руководствоваться термодинамическими соображениями³⁾. В дальнейшем подобные проблемы, как правило, не затрагиваются⁴⁾.

¹⁾ Мало того, «в общем случае произвольной дисперсии оказывается невозможным какое-либо разумное определение электромагнитной энергии как термодинамической величины» (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, 2-е изд. – М.: Наука, 1982. – с.378).

²⁾ Последнее выражение (47.24) для W справедливо и в случае анизотропных сред (без дисперсии), где материальные уравнения отличны от (47.14).

³⁾ Скажем, величину W , задаваемую формулами (47.24), следует трактовать как обусловленное наличием поля изменение внутренней энергии (при заданных энтропии и плотности) или изменение свободной энергии (при заданных температуре и плотности) единицы объема среды.

⁴⁾ См., например: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, 2-е изд. – М.: Наука, 1982; Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985.

§48. Статистический подход

Феноменологический подход к описанию электромагнитных явлений в веществе, кратко изложенный в предыдущем параграфе, был развит Дж. Максвеллом, который существенно опирался на идеи М. Фарадея. Успехи макроскопической теории Максвелла общеизвестны. Однако постепенно выявлялась некоторая ее ограниченность. Состояние электромагнитного поля в этой теории описывается четырьмя векторными функциями $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$, но физический смысл даже величин \vec{E} и \vec{B} (не говоря уже о \vec{D} и \vec{H}) был не вполне ясен¹⁾. Определенных уточнений требовали и понятия плотности заряда ρ и плотности тока \vec{j} . Свойства вещества в теории Максвелла совокупно характеризуются определяемыми из опыта величинами ϵ и μ (и электропроводностью γ), природа которых тоже не совсем ясна. Наконец, по мере развития теории становилось все понятнее, что сама система уравнений Максвелла не является универсальной, а материальные уравнения (47.14) носят заведомо приближенный характер.

Указанные трудности стимулировали развитие *статистического* подхода к электродинамике сплошных сред, основы которого заложил Г. Лоренц.

Соответствующая теория прояснила смысл величин $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ (а также ρ и \vec{j}) и позволила подойти к принципиальному пониманию электромагнитных свойств вещества с микроскопической точки зрения. К изложению основ статистического подхода к электродинамике сплошных сред и его последующему сравнению с феноменологическим подходом мы и переходим.

Вещество состоит из огромного количества заряженных частиц – электронов и атомных ядер, которые можно считать элементарными²⁾. Назовем порождаемое ими электромагнитное поле *микроскопическим* и обозначим электрическое и магнитное микрополя малыми буквами $\vec{e} = \vec{e}(\vec{r}|t)$ и $\vec{b} = \vec{b}(\vec{r}|t)$. Основная гипотеза Г.Лоренца заключается в том, что эти величины также подчиняются системе уравнений (8.1), которые в данном контексте именуются *уравнениями Максвелла–Лоренца*:

$$(I) \begin{cases} \operatorname{div} \vec{e} = 4\pi\rho_m \\ \operatorname{rot} \vec{b} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \end{cases} \quad (II) \begin{cases} \operatorname{div} \vec{b} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \end{cases} \quad (48.1)$$

Входящие сюда микроскопические плотность заряда ρ_m и плотность тока \vec{j}_m задаются формулами (2.12), где q_a – электрические заряды «элементарных» частиц, составляющих вещество. К (48.1) следует добавить уравнения движения этих частиц, которые символически запишем в виде уравнений второго закона Ньютона³⁾:

¹⁾ Например, электрическое поле \vec{E} в общей ситуации не может быть определено через силу, которая действует на неподвижный пробный заряд, помещенный в вещество (см. ниже).

²⁾ Согласно воззрениям современной физики, электроны – истинно элементарные частицы. Ядра же состоят из протонов и нейтронов, которые, в свою очередь, построены из кварков, но при анализе рассматриваемого круга явлений их вполне можно считать неделимыми объектами.

³⁾ В действительности следовало бы пользоваться их квантовым аналогом, уравнением Шредингера для всей системы частиц. Но для дальнейшего это несущественно, ибо явный вид уравнения движения использоваться не будет.

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = q_a \left\{ \vec{e}(\vec{r}_a) + \frac{1}{c} \left[\dot{\vec{r}}_a, \vec{b}(\vec{r}_a) \right] \right\} + \vec{F}_a^{ext} . \quad (48.2)$$

Здесь \vec{F}_a^{ext} – внешняя сила электромагнитного или неэлектромагнитного происхождения.

Совместное решение системы уравнений поля (48.1) и системы уравнений движения частиц (48.2) в принципе должно полностью определять микроскопическое электромагнитное поле, т.е. величины \vec{e} и \vec{b} . Однако из-за невообразимо большого числа уравнений типа (48.2) столь детальное описание поля в веществе оказывается невозможным. Мало того, оно является излишним и просто ненужным. Ведь все микроскопические величины, в том числе поля \vec{e} и \vec{b} , нерегулярно и чрезвычайно резко изменяются как в пространстве (с характерными расстояниями $\sim 10^{-8}$ см), так и во времени (с характерными промежутками $\sim 10^{-16}$ с).

Разумеется, никакой макроприбор, из-за конечных размеров датчиков и его инерционности, не сможет зафиксировать подобные изменения. В действительности он будет регистрировать некоторые *средние значения* измеряемых величин, которые, тем самым, и представляют основной физический интерес.

Итак, электродинамика сплошных сред, как и всякая статистическая (макроскопическая) теория, оперирует не самими микроскопическими функциями $f(\vec{r}|t)$, а *макроскопическими величинами*

$$F(\vec{r}|t) \equiv \langle f \rangle(\vec{r}|t), \quad (48.3)$$

где угловыми скобками обозначена надлежащая процедура усреднения. Для наглядности будем говорить только об усреднении по пространству и времени¹⁾, которое вводится определением

$$\langle f \rangle(\vec{r}|t) = \frac{1}{\Delta V} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} dV_{\vec{\rho}} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} d\tau f(\vec{r} + \vec{\rho}|t + \tau). \quad (48.4)$$

Здесь ΔV – *макроскопически малый* («физически бесконечно малый») объем, окружающий точку с радиусом-вектором $\vec{r} = \{x, y, z\}$, а Δt – макроскопически малый промежуток времени, включающий момент t . Эти термины расшифровываются следующим образом. Считается, что объем ΔV достаточно велик (по сравнению с характерными микроскопическими расстояниями), чтобы включать большое число частиц, когда только и имеет смысл говорить об усреднении. Вместе с тем, данный объем настолько мал, что средние, вычисленные по двум его половинам, практически совпадают. Сказанное относится и к промежутку времени Δt , который, с одной стороны, должен быть большим (по сравнению с характерными микроскопическими временами), а с другой стороны, он должен быть достаточно малым (в разъясненном выше смысле).

Операция усреднения (48.4) является линейной:

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \rangle = \alpha_1 \langle f_1 \rangle + \alpha_2 \langle f_2 \rangle \quad (48.5)$$

¹⁾ Реально может возникать необходимость еще в усреднении по статистическому ансамблю, в квантовомеханическом усреднении и т.п.

(α_1 и α_2 – произвольные постоянные), что сразу следует из основных свойств интеграла. Кроме того, она перестановочна с операциями дифференцирования по координатам и времени:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x_i}, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t}, \quad (48.6)$$

где

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \equiv z.$$

Эти соотношения получаются дифференцированием обеих частей определения (48.4) по соответствующим переменным с последующей перестановкой символов производных и интегралов. Из (48.6) явствует, в частности, что

$$\langle \operatorname{div} \vec{f} \rangle = \operatorname{div} \langle \vec{f} \rangle, \quad \langle \operatorname{rot} \vec{f} \rangle = \operatorname{rot} \langle \vec{f} \rangle. \quad (48.7)$$

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла–Лоренца (48.1) и усредним их указанным способом. Учитывая формулы (48.5) – (48.7), получим

$$\begin{cases} \operatorname{div} \langle \vec{e} \rangle = 4\pi \langle \rho_m \rangle \\ \operatorname{rot} \langle \vec{b} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_m \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \langle \vec{b} \rangle = 0 \\ \operatorname{rot} \langle \vec{e} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial \langle \vec{b} \rangle}{\partial t} \end{cases}. \quad (48.8)$$

Если ввести обозначения

$$\langle \vec{e} \rangle \equiv \vec{E}, \quad \langle \vec{b} \rangle \equiv \vec{B}, \quad (48.9)$$

то из (48.8) будем иметь

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(I)} \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \langle \rho_m \rangle & (a) \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_m \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (b) \end{cases} \quad \text{(II)} \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (e) \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (z) \end{cases} \end{array}}. \quad (48.10)$$

Обращает на себя внимание полное совпадение по форме уравнений (48.10.И) и (47.10.И). Если же отождествить векторы (48.9) с электрическим и магнитным полями \vec{E} и \vec{B} в теории Максвелла, то эти уравнения будут совпадать не только по форме, но и по содержанию. Тем самым полностью выясняется физический смысл величин \vec{E} и \vec{B} , введенных в §47 более или менее феноменологически (см. первую сноску на с.217). Вектор \vec{E} есть *средняя* напряженность микроскопического электрического поля \vec{e} , а вектор \vec{B} – *средняя* индукция микроскопического магнитного поля \vec{b} . Иными словами, \vec{E} и \vec{B} являются *макроскопическими* величинами в смысле определения (48.3). Как уже отмечалось на с.23, некоторый разнобой в терминологии (напряженность электрического поля, но магнитная индукция) обусловлен причинами чисто исторического характера. Этот разнобой будет проявляться и дальше.

Мы видим, что с интерпретацией второй пары уравнений Максвелла никаких проблем не возникает, и это вовсе не случайно. В данные уравнения никак не входят характеристики вещества, ибо они не содержат материальных источников поля, т.е. функций ρ и \vec{j} .

Совершенно иначе обстоят дела с первой парой уравнений Максвелла. Теперь наша основная задача сводится к приданию ясного физического смысла уравнениям (48.10.1), для чего необходимо как-то раскрыть входящие в них выражения $\langle \rho_m \rangle$ и $\langle \vec{j}_m \rangle$, установив их связи с экспериментально измеряемыми величинами. Сразу укажем, что в общем виде эта задача не решается, так как структура средних значений $\langle \rho_m \rangle$ и $\langle \vec{j}_m \rangle$ существенно зависит от свойств рассматриваемых материальной среды и электромагнитного поля.

Имеется два способа исследования данной проблемы для конкретных систем. Первый основывается на детальном статистическом анализе уравнений движения типа (48.2) с привлечением тех или иных микроскопических моделей строения вещества¹⁾. Такой путь является наиболее последовательным, но он чрезвычайно сложен²⁾ и до сих пор не привел к сколько-нибудь существенным количественным результатам.

Второй способ опирается на феноменологическую теорию Максвелла и на некоторые общие предположения о свойствах вещества и макроскопического электромагнитного поля. Хотя данный путь и не вполне последователен, но зато он относительно прост и плодотворен. Именно его мы в дальнейшем и будем придерживаться, лишь эпизодически обращаясь к микроскопическим моделям строения вещества.

§49. Сравнение статистического и феноменологического подходов

Пусть материальные среды и макроскопические поля таковы, что для них справедливы уравнения Максвелла (47.10). Далее будет анализироваться только первая пара этих уравнений

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (49.1)$$

Здесь и сосредоточены основные проблемы, ибо именно в эти уравнения входят источники поля ρ и \vec{j} , а значит, характеристики вещества.

Как явствует из самого способа введения понятия электрического смещения (см. начало §47), электрические свойства вещества в определенной степени характеризует разность между полями \vec{D} и \vec{E} . Она обозначается как $4\pi\vec{P}$, и вектор \vec{P} называется *поляризованностью* вещества. Итак, записываем

$$\vec{D} - \vec{E} = 4\pi\vec{P}, \quad (49.2)$$

откуда

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}. \quad (49.3)$$

Аналогично, магнитные свойства вещества характеризуются разностью между полями \vec{H} и \vec{B} , обозначаемой как $-4\pi\vec{M}$ (обращаем внимание на знак минус), где \vec{M} – *намагниченность*:

$$\vec{H} - \vec{B} = -4\pi\vec{M}, \quad (49.4)$$

или

¹⁾ Здесь используются статистические функции распределения частиц в исследуемом поле и разного вида кинетические уравнения, которым они подчиняются. При этом зачастую приходится обращаться к аппарату квантовой теории, в которой роль функций распределения играет так называемая матрица плотности.

²⁾ О чем читатель может судить хотя бы по содержанию монографии: Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. – М.: Наука, 1977.

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}. \quad (49.5)$$

При использовании СИ столь непосредственный «смысл» величин \vec{P} и \vec{M} теряется, так как в этой системе единиц, по определению,

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}. \quad (49.6)$$

Перепишем теперь уравнения Максвелла (49.1), подставляя в них выражения (49.3) и (49.5) для \vec{D} и \vec{H} и производя перегруппировку членов:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \vec{P}), \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j} + c \operatorname{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (49.7)$$

На первый взгляд подобная процедура бессодержательна, ибо сводится к введению вместо двух неизвестных полей \vec{D} и \vec{H} двух неизвестных же векторных полей \vec{P} и \vec{M} . Но дело в том, что, как мы увидим ниже, векторы \vec{P} и \vec{M} , в отличие \vec{D} и \vec{H} , имеют достаточно прозрачный физический смысл. Кроме того, именно через них прямо выражаются интересующие нас средние значения $\langle \rho_m \rangle$ и $\langle \vec{j}_m \rangle$.

Чтобы убедиться в этом, сопоставим (49.7) с уравнениями (48.10.I),

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \langle \rho_m \rangle, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_m \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (49.8)$$

полученными в §48 усреднением микроскопических уравнений Максвелла–Лоренца. Из сравнения (49.8) с (49.7) явствует, что

$$\langle \rho_m \rangle = \rho - \operatorname{div} \vec{P} \equiv \rho_{\text{стор}} + \rho_{\text{связ}} \quad (49.9)$$

и

$$\langle \vec{j}_m \rangle = \vec{j} + \left\{ c \operatorname{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right\} \equiv \vec{j}_{\text{пров}} + \vec{j}_{\text{связ}} = \vec{j}_{\text{пров}} + \{ \vec{j}_{\text{нам}} + \vec{j}_{\text{пол}} \}. \quad (49.10)$$

В электродинамике используется следующая терминология. Величина

$$\rho \equiv \rho_{\text{стор}} \quad (49.11)$$

называется плотностью *сторонних* зарядов. Последние отождествляются с зарядами, которые внесены в вещество извне или возникли в нем за счет каких-то внешних воздействий (примеры: заряды, сообщенные металлическому шару; заряды, возникшие при трении различных диэлектриков друг о друга). Этим проясняется и смысл плотности ρ , фигурирующей в феноменологической теории Максвелла. Величина

$$\rho_{\text{связ}} \equiv -\operatorname{div} \vec{P} \quad (49.12)$$

в формуле (49.9) именуется плотностью *связанных* зарядов. Она возникает благодаря локальным смещениям частиц, входящих в состав молекул, или самих молекул в целом

(элементарных диполей). Обычно это понятие, как и понятие поляризованности \vec{P} , а значит, поля \vec{D} , используется только применительно к диэлектрикам или очень плохим проводникам. В общей ситуации разбиение зарядов на сторонние и связанные не является однозначным.

Это относится и к разбиению (49.10) среднего тока $\langle \vec{j}_m \rangle$, который распадается на ток *проводимости* (иногда не совсем удачно именуемый сторонним током)

$$\vec{j} \equiv \vec{j}_{\text{пров}} \quad (49.13)$$

и ток $\vec{j}_{\text{связ}}$ связанных (молекулярных) зарядов. Первый обусловлен наличием свободных (не путать со сторонними) зарядов в веществе, например электронов в металле или ионов в электролите, совершающих макроскопические перемещения. Ток же $\vec{j}_{\text{связ}}$ возникает благодаря коллективным локальным смещениям «элементарных зарядов». Он, в свою очередь, состоит из тока *намагниченности*

$$\vec{j}_{\text{нам}} \equiv c \operatorname{rot} \vec{M} \quad (49.14)$$

(порождается замкнутыми элементарными токами) и тока *поляризации*

$$\vec{j}_{\text{пол}} \equiv \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (49.15)$$

(связан с локальными смещениями элементарных диполей).

§50. Поляризованность

Теперь нужно обосновать введенную терминологию. Для этого прежде всего следует выяснить физический смысл и обсудить основные свойства поляризованности \vec{P} и намагниченности \vec{M} .

Пусть имеется диэлектрический образец конечных размеров. Напомним, что *диэлектрик* – это вещество, в котором отсутствуют свободные заряды. Сейчас нас будет интересовать в основном только электростатическое поле в нем. Согласно результатам предшествующих параграфов, в этом случае имеют место следующие соотношения и уравнения:

$$\vec{D} - \vec{E} = 4\pi\vec{P} \Leftrightarrow \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (50.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \vec{P}), \quad (50.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\langle \rho_m \rangle, \quad (50.3)$$

$$\langle \rho_m \rangle = \rho + \rho_{\text{связ}}, \quad \rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad (50.4)$$

причем нужно считать, что *вне* диэлектрического образца вектор поляризованности обращается в нуль:

$$\vec{P}|_{\text{вне}} = 0. \quad (50.5)$$

Это следует из (50.1) и очевидного совпадения полей \vec{D}_0 и \vec{E}_0 в вакууме. Условие (50.5) гарантирует, в частности, естественное равенство нулю *полного* связанного заряда:

$$q_{\text{связ}} = 0. \quad (50.6)$$

Действительно, проводя в последнем соотношении (50.4) интегрирование по объему образца V и используя теорему Гаусса–Остроградского, найдем

$$q_{\text{связ}} = \int_V \rho_{\text{связ}} dV = - \int_V \text{div } \vec{P} dV = - \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}).$$

Но, не изменяя значений объемных интегралов, V можно расширить до объема V' с поверхностью S' , лежащей целиком в вакууме, так что

$$q_{\text{связ}} = - \oint_{S'} (\vec{P}, d\vec{S}).$$

Учитывая теперь условие (50.5), мы и приходим к равенству (50.6).

Подчеркнем, что функция $\rho_{\text{связ}}(\vec{r})$ может обладать особенностями, которые отвечают поверхностному распределению связанных зарядов. Мало того, данные особенности являются как раз ее характерной чертой. Чтобы убедиться в этом, вспомним вывод граничного условия (19.5) и проведем аналогичные рассуждения, считая S на рисунке на с.93 границей раздела диэлектрик–вакуум. Проинтегрировав последнее соотношение (50.4) по объему ΔV и воспользовавшись затем теоремой Гаусса–Остроградского, получим

$$\int_{\Delta V} \tilde{\rho}_{\text{связ}} dV + \int_{\Delta S} \sigma_{\text{связ}} dS = - \oint (\vec{P}, d\vec{S}) = - \int_{\Delta S_2} \mathcal{P}_n dS + \int_{\Delta S_1} \mathcal{P}_n dS - \int_{\Delta \Sigma} \mathcal{P}_\tau dS$$

(обозначения практически идентичны применявшимся на с. 93). Принимая во внимание малость рассматриваемого цилиндра и условие (50.5), будем иметь

$$\rho_{\text{связ}} \Delta S \Delta h + \sigma_{\text{связ}} \Delta S = -0 \cdot \Delta S + \mathcal{P}_n \Delta S - \mathcal{P}_\tau \Delta l \Delta h.$$

Поделив обе части на ΔS и устремив Δh к нулю, найдем, что

$$\sigma_{\text{связ}} = \mathcal{P}_n. \quad (50.7)$$

Таким образом, при наличии электрического поля по поверхности диэлектрика действительно распределены связанные заряды. Их поверхностная плотность равна нормальному компоненту вектора поляризованности. К данному результату мы еще вернемся с тем, чтобы установить его связь с содержанием школьного курса физики.

Выясним теперь физический смысл поляризованности. Найдем с этой целью полный дипольный момент \vec{d} диэлектрического образца, предполагая, что сторонние заряды отсутствуют, т.е. что $\rho = 0$. Тем самым речь идет о дипольном моменте только системы связанных зарядов. Вспоминая определение (23.14) и учитывая соотношения (50.4) при $\rho = 0$, запишем

$$\vec{d} = \int_V \vec{r} \langle \rho_m \rangle dV = \int_V \vec{r} \rho_{связ} dV = - \int_V \vec{r} \operatorname{div} \vec{P} dV = - \int_{V'} \vec{r} \operatorname{div} \vec{P} dV,$$

где смысл объемов V и V' тот же, что и выше. Применив формулу векторного анализа

$$(\vec{\nabla}, \vec{P}) \vec{r} = \vec{r} \operatorname{div} \vec{P} + (\vec{P}, \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{r} \operatorname{div} \vec{P} + \vec{P} \Rightarrow \vec{r} \operatorname{div} \vec{P} = (\vec{\nabla}, \vec{P}) \vec{r} - \vec{P},$$

будем иметь

$$\vec{d} = - \int_{V'} (\vec{\nabla}, \vec{P}) \vec{r} dV + \int_{V'} \vec{P} dV.$$

Первый интеграл преобразуем по обобщенной теореме Гаусса–Остроградского [см. формулу (7.46)] и учитываем условие (50.5):

$$\int_{V'} (\vec{\nabla}, \vec{P}) \vec{r} dV = \oint_{S'} (d\vec{S}, \vec{P}) \vec{r} = 0.$$

В итоге получаем, вновь заменяя V' на V ,

$$\vec{d} = \int_V \vec{P} dV. \quad (50.8)$$

Отсюда видно, что поляризованность можно интерпретировать как дипольный момент единицы объема диэлектрика¹⁾.

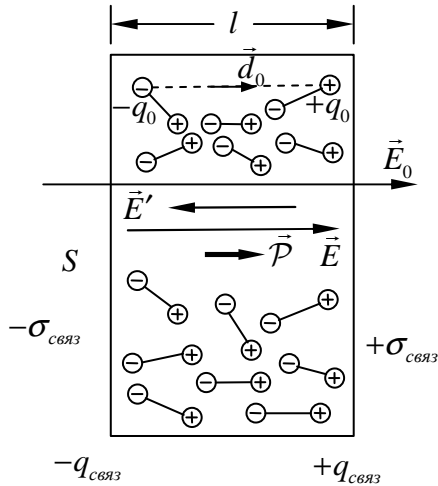
Возникает естественный вопрос, откуда берется этот дипольный момент. Ответ на него фактически содержится уже в школьном учебнике²⁾. Рассмотрим сначала *полярный* диэлектрик, каждая молекула которого обладает собственным дипольным моментом. При $\vec{E} = 0$ элементарные диполи за счет теплового движения ориентированы хаотически, и в этом случае $\vec{d} = 0$, $\vec{P} = 0$, $\sigma_{связ} = 0$. При наличии электрического поля на элементарный диполь будет действовать момент силы (26.12), стремящийся повернуть его так, чтобы он был направлен вдоль силовой линии.

В результате этого эффекта возникает преимущественная ориентация элементарных диполей, неполная в силу противоборствующего ему теплового движения молекул, но тем бо́льшая, чем сильнее поле. За счет нее на противоположных гранях образца появятся поверхностные связанные заряды с разными знаками и плотностью $\sigma_{связ} \neq 0$, а значит, дипольный момент $\vec{d} \neq 0$ и поляризованность $\vec{P} \neq 0$. Диэлектрик, как говорят, *поляризуется*, откуда и название основной его характеристики – вектора \vec{P} .

Ситуация представлена на рисунке, фактически совпадающем с рис. 117 из школьного учебника, но только дополненном рядом деталей и обозначений, необходимых для лучшего понимания сути дела. Для максимальной наглядности здесь выбран простейший случай: однородный по свойствам диэлектрический образец в форме прямоугольного

¹⁾ На самом деле, подобная интерпретация не вполне адекватна. Автор благодарен доц. Н.А. Попову, указавшему ему на данное обстоятельство. Однако мы не останавливаемся на этой достаточно тонкой проблеме (см., например: Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1985).

²⁾ Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение. 1986. – §46-47.

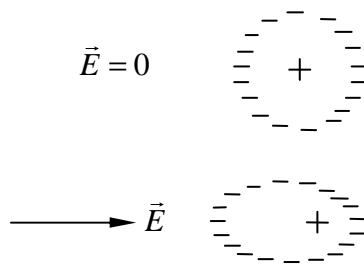


параллелепипеда и однородное поле с напряженностью \vec{E}_0 в вакууме. В результате появления на противоположных гранях связанных поверхностных зарядов $-q_{связ}$ и $+q_{связ}$ возникнет дополнительное по отношению к \vec{E}_0 поле \vec{E}' , направленное против \vec{E}_0 , так что поле \vec{E} внутри образца *ослабится*. Заметим, что внутри однородного диэлектрика

$$\rho_{связ} = 0, \tag{50.9}$$

ибо при макроскопическом усреднении величины ρ_m чрезвычайно близко расположенные положительные и отрицательные молекулярные заряды взаимно скомпенсируются.

Мы рассмотрели полярный диэлектрик. Конечные результаты идентичны и для *неполярного* диэлектрика, молекулы которого в отсутствие поля не имеют собственных дипольных моментов: центры распределения положительных и отрицательных зарядов в них совпадают.



Но под действием электрического поля каждая такая молекула сама поляризуется.(см. рисунок): ее заряды с разными знаками смещаются в противоположные стороны, и молекула превращается в элементарный диполь, направленный вдоль поля. Результирующим эффектом вновь оказывается поляризация всего диэлектрического образца в целом.

Выполним в ситуации, которая представлена на первом рисунке, несложные расчеты, проясняющие смысл приведенных выше общих соотношений. Примем во

внимание, что все векторы направлены вдоль одной прямой, т.е. являются одномерными, и потому фактически совпадают со своими проекциями на данную прямую. Это позволяет не ставить стрелки над векторами, учитывая их направление надлежащими знаками.

Прежде всего, для полного дипольного момента образца имеем

$$d = Nd_0 = Nq_0l = q_{связ}l = \sigma_{связ}Sl = \sigma_{связ}V,$$

где N – число диполей с моментами $d_0 = q_0l$, а остальные обозначения очевидны из рисунка. После деления на объем образца V получим

$$\frac{d}{V} = \sigma_{связ}. \tag{50.10}$$

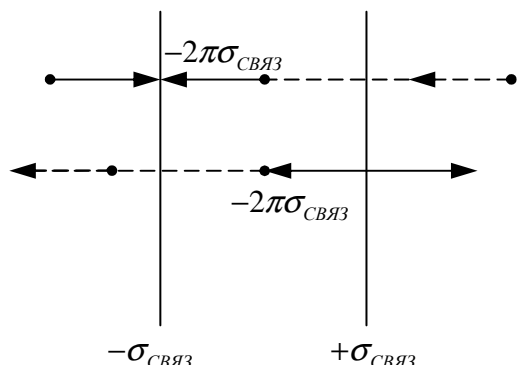
Слева стоит дипольный момент единицы объема, т.е. поляризованность \mathcal{P} , и мы имеем

$$\sigma_{связ} = \mathcal{P}. \tag{50.11}$$

Если учесть, что в рассматриваемом случае $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}$, то отсюда придем к равенству (50.7).

Противоположные грани образца представляют собой плоскости, равномерно заряженные с поверхностными плотностями $-\sigma_{связ}$ и $+\sigma_{связ}$.

Вспоминая, что каждая такая плоскость создает поле $|\vec{E}| = 2\pi|\theta|$ ¹⁾, получим для дополнительного поля \vec{E}' внутри диэлектрика (см. рисунок)



$$E' = 4\pi\sigma_{\text{связ}} \quad (50.12)$$

(вне образца это поле равно нулю). Полное поле \vec{E} внутри диэлектрика складывается из исходного поля \vec{E}_0 , которое было в вакууме, и поля \vec{E}' , возникшего за счет поляризации: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$, или

$$E = E_0 - E' \quad (50.13)$$

Учитывая (50.12) и (50.11), будем иметь

$$E = E_0 - 4\pi\mathcal{P}, \quad (50.14)$$

так что поле в диэлектрике ослабляется по сравнению с вакуумом на $4\pi\mathcal{P}$.

Общее граничное условие (47.16) при $\sigma = 0$, где σ – поверхностная плотность сторонних зарядов, записывается на границе раздела вакуум–диэлектрик как $D_{0n} = D_n$. В рассматриваемом случае это равенство дает $D_0 = D$. Учитывая, что в вакууме всегда $\vec{D}_0 = \vec{E}_0$ (просто по определению), получим отсюда

$$E_0 = D. \quad (50.15)$$

Подстановка этого результата в (50.14) дает соотношение (50.1):

$$D = E + 4\pi\mathcal{P}. \quad (50.16)$$

Кстати, теперь ясно видно, что вектор \vec{D} является *смешанной* характеристикой. Он описывает состояние не только электромагнитного поля (вектор \vec{E}), но и вещества (вектор $\vec{\mathcal{P}}$). Наличие такой характеристики вполне естественно, ибо этим подчеркивается, что систему поле + вещество следует рассматривать, строго говоря, как некое единое целое.

Обсудим теперь материальное уравнение для поля \vec{D} и те предположения, которые приводят к соотношению $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$. Поляризация диэлектрика возникает за счет электромагнитного поля, и в общей ситуации (например, в движущихся средах) поляризованность $\vec{\mathcal{P}}$ может зависеть как от \vec{E} , так и от \vec{V} . Но мы такую возможность не учитываем, считая, что

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{E}). \quad (50.17)$$

В этом состоит первое наше предположение.

¹⁾ См. формулу (3.1) в кн. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т.Ш. Электричество. – М.: Наука, 1979.

Если поле нестационарное и очень быстро меняется во времени, то поляризованность не успевает «следить» за его изменениями. Ее значение $\vec{P}(t)$ определяется не только значением поля $\vec{E}(t)$ в тот же момент времени, но и его значениями $\vec{E}(t')$ во все предшествующие моменты $t' < t$. С такой ситуацией, приводящей к *временной дисперсии*, мы встретимся в конце данной главы. Сейчас же будем считать поле \vec{E} достаточно медленно меняющимся во времени, что позволяет пренебречь в (50.17) указанным запаздыванием. Это есть второе предположение.

Электрическое поле может быть очень неоднородным, т.е. резко меняющимся в пространстве¹⁾. Тогда значение поляризованности $\vec{P}(\vec{r})$ будет определяться не только значением поля $\vec{E}(\vec{r})$ в той же точке, но и его значениями $\vec{E}(\vec{r}')$ во всех других точках, что приводит к *пространственной дисперсии*. Физическая причина в том, что из-за теплового движения в точку \vec{r} приходят частицы из соседних областей, где поле отлично от $\vec{E}(\vec{r})$. Мы пренебрегаем подобными эффектами нелокальности, и это есть третье предположение. В итоге связь (50.17) между функциями \vec{P} и \vec{E} оказывается не интегральной, а алгебраической.

Если электромагнитное поле является очень сильным, то данная связь будет заведомо нелинейной, что существенно учитывается в современной физике (нелинейная оптика и т.п.), особенно в связи с развитием лазерной техники.

В дальнейшем рассматриваются только относительно слабые (по сравнению с внутриатомным) поля, что составляет четвертое предположение.

Как явствует из опыта и подтверждается простыми статистическими расчетами²⁾, при не слишком сильных и не очень неоднородных полях поляризованность для большинства веществ является линейной функцией поля. Несколько формально этот результат можно получить, разлагая функцию $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка малости по \vec{E} :

$$\mathcal{P}_i(\vec{E}) \equiv \mathcal{P}_i(0) + \left. \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial E_j} \right|_{\vec{E}=0} \cdot E_j,$$

где индексы $i, j = 1, 2, 3$ нумеруют координаты $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, причем по j подразумевается суммирование. Вводя обозначения

$$\mathcal{P}_i(0) \equiv \mathcal{P}_{0i}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial E_j} \right|_{\vec{E}=0} \equiv \chi_e^{ij},$$

будем иметь

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{0i} + \chi_e^{ij} E_j. \quad (50.18)$$

Постоянный вектор \vec{P}_0 может быть отличным от нуля даже в отсутствие поля и имеет смысл остаточной поляризованности (подобной остаточной намагниченности в постоянных магнитах). Она свойственна некоторым ионным кристаллам, так называемым электретами и

¹⁾ Таковым, в частности, является быстропеременное поле, ибо $\lambda = vT$.

²⁾ См., например: Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.Ш. Электричество. – М.: Наука, 1977. – §35, 36.

сегнетоэлектрикам. Но мы подобные вещества не рассматриваем, что составляет суть пятого предположения. Если оно справедливо, то

$$\mathcal{P}_i = \chi_e^{ij} E_j, \quad (50.19)$$

где 9 величин χ_e^{ij} образуют тензор диэлектрической восприимчивости.

Сделаем теперь шестое предположение, ограничиваясь случаем изотропных диэлектриков, свойства которых одинаковы по всем направлениям. Тогда тензорная поверхность для χ_e^{ij} будет сферой, а потому

$$\chi_e^{ij} = \chi_e \delta_{ij}.$$

Подставляя это выражение в формулу (50.19), будем иметь:

$$\mathcal{P}_i = \chi_e \delta_{ij} E_j = \chi_e E_i,$$

или, в векторной форме записи,

$$\vec{\mathcal{P}} = \chi_e \vec{E}. \quad (50.20)$$

Мы видим, что при сделанных предположениях поляризационные свойства вещества характеризуются одной величиной – *диэлектрической восприимчивостью* χ_e , которая, вообще говоря, является функцией координат: $\chi_e = \chi_e(\vec{r})$.

Подставляя выражение (50.20) в (50.1), получим

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{\mathcal{P}} = (1 + 4\pi\chi_e) \vec{E}.$$

В итоге наконец-то приходим к материальному уравнению

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (50.21)$$

где величина

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e \quad (50.22)$$

называется *диэлектрической постоянной* (в более старой терминологии – диэлектрической проницаемостью), хотя на самом деле она может быть вовсе не «постоянной», а функцией: $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$. Но при элементарном изложении электродинамики обычно рассматриваются только однородные (один или несколько) диэлектрики, для которых действительно $\varepsilon = const$.

Из проведенного выше микроскопического обсуждения механизма поляризации диэлектриков ясно, что элементарные диполи (собственные или индуцированные) ориентируются преимущественно по полю \vec{E} . Это приводит к тому, что при сделанных выше предположениях векторы $\vec{\mathcal{P}}$ и \vec{E} сонаправлены, т.е. диэлектрическая восприимчивость в формуле (50.20) неотрицательна: $\chi_e \geq 0$. Отсюда и из соотношения (50.22) вытекает неравенство

$$\varepsilon \geq 1. \quad (50.23)$$

Его можно доказать и абсолютно строго, основываясь только на термодинамических соображениях¹⁾.

Как говорилось в связи с формулой (50.7), появление поверхностных связанных зарядов есть неотъемлемое свойство поляризованного диэлектрика. Напротив, объемная плотность связанных зарядов внутри *однородного* диэлектрика всегда равна нулю. К этому результату [формула (50.9)] мы пришли при качественном обсуждении рисунка на с.224. Теперь его можно обосновать математически, используя соотношения (50.4), (50.1), (50.21) при $\varepsilon = const$ и (50.2) при $\rho = 0$:

$$\rho_{связ} = -div \vec{P} = -div \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} = -div \frac{\vec{D} - \vec{D}/\varepsilon}{4\pi} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} div \vec{D} = 0.$$

Читателю предлагается самостоятельно убедиться, что в неоднородном диэлектрике объемная плотность связанных зарядов равна

$$\rho_{связ} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} (\vec{E}, grad \varepsilon) \quad (50.24)$$

и может быть отлична от нуля. [Указание: в предшествующей выкладке считать, что $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$].

§51. Намагниченность

Анализ понятия намагниченности в основных своих чертах сходен с анализом понятия поляризованности. Сейчас нас интересует только постоянное (стационарное) магнитное поле, для которого, согласно результатам § 47 – 49, справедливы следующие соотношения и уравнения:

$$\vec{H} - \vec{B} = -4\pi\vec{M} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}, \quad (51.1)$$

$$rot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \Leftrightarrow \quad rot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + c rot \vec{M}), \quad (51.2)$$

$$rot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_m \rangle, \quad (51.3)$$

$$\langle \vec{j}_m \rangle = \vec{j} + \vec{j}_{нам}, \quad \vec{j}_{нам} = c rot \vec{M}, \quad (51.4)$$

причем вне образца

$$\vec{M} \Big|_{вне} = 0 \quad (51.5)$$

[сравн. с (50.1) – (50.5)]. Всюду ниже считается, что $\vec{j} = 0$. Тем самым рассматриваются лишь диэлектрики или же проводники, в которых отсутствует ток проводимости. Все такие вещества именуется в данном контексте *магнетиками*.

¹⁾ Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. 2-е изд. – М.: Наука, 1982. – §14.

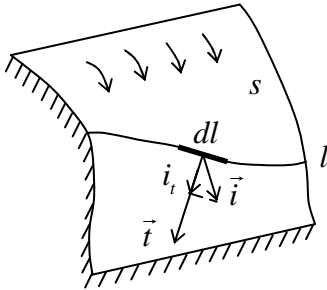
Условие (51.5) гарантирует равенство нулю полного тока намагниченности [сравн. с (50.6)]:

$$J_{нам} = 0. \quad (51.6)$$

Действительно, проводя в последнем соотношении (51.4) интегрирование по любому полному сечению Σ магнитного образца, расширяя Σ до поверхности Σ' с контуром L' , который целиком лежит в вакууме, применяя теорему Стокса и учитывая (51.5), найдем

$$J_{нам} = \int_{\Sigma} (\vec{j}_{нам}, d\vec{S}) = c \int_{\Sigma} (\text{rot } \vec{M}, d\vec{S}) = c \int_{\Sigma'} (\text{rot } \vec{M}, d\vec{S}) = c \oint_{L'} (\vec{M}, d\vec{l}) = 0.$$

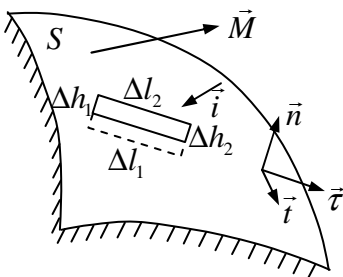
Дальше нам потребуется еще не встречавшееся понятие *поверхностного тока*, протекающего в чрезвычайно тонком, в пределе бесконечно тонком приповерхностном слое образца. Разумеется, это понятие является модальным (идеализацией), но зачастую оно хорошо отражает действительность и весьма полезно. Введенный ток характеризуется его



поверхностной плотностью \vec{i} . Направление этого вектора совпадает с направлением движения зарядов в данной точке поверхности, а его модуль равен количеству электричества, протекающего в единицу времени через единицу длины кривой, проведенной на поверхности перпендикулярно \vec{i} в рассматриваемой точке [сравн. с определением (2.4) объемной плотности тока \vec{j}]. Сила поверхностного тока $J_{нов}$ есть суммарный заряд частиц, проходящих в единицу времени через линейное сечение l поверхности. Она вычисляется по формуле

$$J_{нов} = \int_l i_t dl. \quad (51.7)$$

Здесь i_t – компонент плотности тока \vec{i} вдоль направления единичного вектора \vec{t} , касательного к поверхности и перпендикулярного в данной точке к кривой l (см. рисунок).



В магнетике при наличии поля \vec{B} возникает, как правило, поверхностный ток намагниченности. Чтобы найти компонент i_t его плотности, вспомним вывод граничного условия (19.6) и проведем аналогичные рассуждения, воспользовавшись рисунком, сходным с рисунком на с.94, и считая S границей раздела магнетик–вакуум. Проинтегрируем последнее соотношение (51.4) по поверхности изображенного прямоугольника и применим затем теорему Стокса:

$$\int_{\Delta S} (\vec{j}_{нам}, d\vec{S}) + \int_{\Delta l} i_t^{нам} dl = c \int_{\Delta S} (\text{rot } \vec{M}, d\vec{S}) = c \oint (\vec{M}, d\vec{l}) = -c \int_{\Delta l_2} M_\tau dl - c \int_{\Delta l_2} M_n dl + c \int_{\Delta l_1} M_\tau dl + c \int_{\Delta l_1} M_n dl$$

($\vec{j}_{нам}$ – регулярная часть плотности тока намагниченности). Принимая во внимание малость рассматриваемого прямоугольника и условие (51.5), будем иметь

$$j_t^{нам} \Delta l \Delta h + i_t^{нам} \Delta l = 0 \cdot \Delta l - c M_n \Delta h + c M_\tau \Delta l + c M_n \Delta h.$$

Поделив обе части на Δl и устремив Δh к нулю, найдем

$$\dot{i}_t^{нам} = cM_\tau \quad (51.8)$$

[сравн. с (50.7)].

Выясним теперь физический смысл намагниченности \vec{M} . Вычислим с этой целью полный магнитный момент образца \vec{m} , точнее магнитный момент, порожденный токами намагниченности (так как считается, что $\vec{j} = 0$). Вспоминая определение (29.9) и учитывая соотношения (51.4) при $\vec{j} = 0$, запишем

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}, \langle \vec{j}_m \rangle] dV = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}, \vec{j}_{нам}] dV = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}, c \text{rot } \vec{M}] dV = \frac{1}{2} \int_{V'} [\vec{r}, \text{rot } \vec{M}] dV,$$

где смысл объемов V и V' тот же, что при доказательстве равенств (50.6) и (50.8). С помощью формулы векторного анализа

$$[[\vec{\nabla}, \vec{M}], \vec{r}] = -[\vec{r}, [\vec{\nabla}, \vec{M}]] - [[\vec{M}, \vec{\nabla}], \vec{r}] \Rightarrow [\vec{r}, \text{rot } \vec{M}] = -[[\vec{\nabla}, \vec{M}], \vec{r}] - [[\vec{M}, \vec{\nabla}], \vec{r}]$$

имеем

$$\vec{m} = -\frac{1}{2} \int_{V'} [[\vec{\nabla}, \vec{M}], \vec{r}] dV - \frac{1}{2} \int_{V'} [[\vec{M}, \vec{\nabla}], \vec{r}] dV.$$

К первому интегралу применяем обобщенную теорему Гаусса–Остроградского (7.46) и затем учитываем условие (51.5):

$$\int_{V'} [[\vec{\nabla}, \vec{M}], \vec{r}] dV = \oint_{S'} [[d\vec{S}, \vec{M}], \vec{r}] = 0.$$

Приняв во внимание, что во втором интеграле

$$-[[\vec{M}, \vec{\nabla}], \vec{r}] = \left[\vec{r}, [\vec{M}, \vec{\nabla}] \right] = \vec{M} \left(\vec{r}, \vec{\nabla} \right) - \vec{\nabla} \left(\vec{M}, \vec{r} \right) = \vec{M} \text{div } \vec{r} - (\vec{M}, \vec{\nabla}) \vec{r} = 3\vec{M} - \vec{M} = 2\vec{M},$$

и вновь заменив V' на V , окончательно получим

$$\vec{m} = \int_V \vec{M} dV. \quad (51.9)$$

Отсюда видно, что намагниченность \vec{M} можно интерпретировать как магнитный момент единицы объема образца¹⁾.

Заметим, что в общей ситуации, при наличии нестационарного электрического поля, приводящего к переменной поляризации диэлектрика, вектор \vec{M} теряет смысл плотности

¹⁾ Здесь справедливо замечание, аналогичное первой сноске на с.225.

магнитного момента. Здесь средний ток $\langle \vec{j}_m \rangle$ содержит как ток намагниченности $c \operatorname{rot} \vec{M}$, так и ток поляризации $\partial \vec{P} / \partial t$ [формула (49.10) при $\vec{j} = 0$], и мы вместо (51.9) будем иметь

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}, \langle \vec{j}_m \rangle] dV = \int_V \vec{M} dV + \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_V [\vec{r}, \vec{P}] dV. \quad (51.10)$$

Причина возникновения магнитного момента в магнетике при наличии только постоянного поля \vec{B} в самых общих чертах фактически указана уже в школьном учебнике¹⁾. Обсудим данный круг вопросов подробнее. Рассмотрим сначала аналог полярного диэлектрика – *парамагнетик*, молекулы которого обладают собственными магнитными моментами $\vec{\mu}$. Последние могут быть обусловлены орбитальным движением электронов (см. конец §29), их спиновыми магнитными моментами $\mu_e \cong \mu_B$, магнитными моментами $\sim \mu_N$ атомных ядер. Основной вклад дают электроны, так как магнетон Бора μ_B на три порядка превышает ядерный магнетон μ_N [формулы (29.4) и (29.5)].

В отсутствие внешнего поля элементарные магнитные моменты за счет теплового движения ориентированы хаотически, и в этом случае $\vec{m} = 0$, $\vec{M} = 0$, $\vec{i}_{\text{нам}} = 0$. При $\vec{B} \neq 0$ магнитные моменты отдельных молекул ориентируются преимущественно по полю, причем тем в большей степени, чем сильнее это поле²⁾. В итоге возникают отличные от нуля магнитный момент \vec{m} и намагниченность \vec{M} , направленные вдоль \vec{B} . Ориентация элементарных магнитных моментов равнозначна ориентации молекулярных токов (для простоты считаем, что существование первых связано с орбитальным движением электронов). Внутри однородного магнетика эти токи взаимно компенсируются, и их объемная плотность при усреднении обращается в нуль:

$$\vec{j}_{\text{нам}} = 0. \quad (51.11)$$

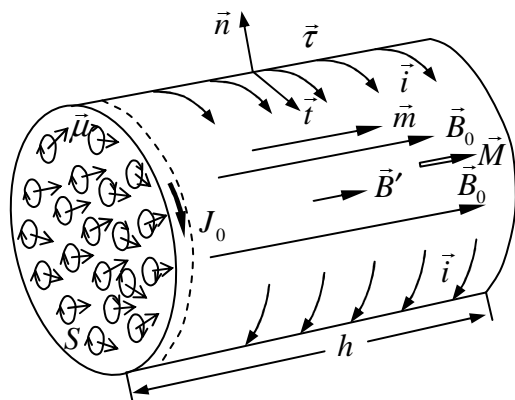
Но элементарные токи молекул, непосредственно примыкающих к поверхности, суммируются, и возникает поверхностный ток намагниченности с плотностью $\vec{i}_{\text{нам}} \neq 0$.

Ситуация представлена на рисунке, имитирующем рис. 225,б из школьного учебника. Для наглядности выбран простейший случай: однородный образец в форме длинного цилиндра и однородное поле с индукцией \vec{B}_0 в вакууме, направленное вдоль оси цилиндра. Чтобы не перегружать рисунок, мы изобразили лишь один молекулярный слой, отмеченный сплошной и штриховой линиями.

В результате возникновения макроскопического магнитного момента \vec{m} появляется дополнительное по отношению к \vec{B}_0 поле \vec{B}' , направленное вдоль векторов \vec{m} и \vec{M} . В этом отношении магнетики отличаются от диэлектриков, внутри которых дополнительное поле \vec{E}' противоположно дипольному моменту \vec{d} и поляризованности \vec{P} (см. §50). Отсюда,

¹⁾ Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, 1986. – §80.

²⁾ Механизм ориентации элементарных магнитных моментов более сложен, чем механизм ориентации элементарных электрических диполей. Здесь соударения молекул не только препятствуют этому процессу (что естественно), но и способствуют ему. Мало того, если бы отдельные молекулы не взаимодействовали друг с другом, то образец вообще не смог бы намагнититься. По этому поводу см., например: Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.Ш. Электричество. – М.: Наука, 1977. – §77.



кстати, и ведет свое происхождение различие знаков в определениях (49.2) и (49.4). Так как в парамагнетике векторы \vec{m} и \vec{B}_0 сонаправлены, то сонаправленными будут также векторы \vec{B}' и \vec{B}_0 . Поэтому внутри парамагнитного образца магнитное поле $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ усиливается (как мы видели в §50, электрическое поле \vec{E} внутри диэлектрика всегда ослабляется).

Мы рассмотрели аналог полярного диэлектрика – парамагнетик. Аналогом

неполярных диэлектриков являются *диамагнетики*, молекулы (атомы) которых в отсутствие внешнего поля не имеют магнитных моментов: орбитальные и спиновые магнитные моменты электронов скомпенсированы. Но под действием магнитного поля у каждой такой молекулы возникает индуцированный магнитный момент, направленный *против* этого поля¹⁾. В итоге у образца появляется макроскопический магнитный момент \vec{m} (а значит, намагниченность \vec{M} и поверхностный ток $\vec{i}_{\text{нам}}$), противоположный вектору \vec{B}_0 . Он создает дополнительное поле \vec{B}' , которое *ослабляет* исходное магнитное поле \vec{B}_0 . В этом отношении диамагнетики сходны с диэлектриками.

Заметим, что в металлах (и полупроводниках) индуцированные магнитные моменты возникают не только у связанных, но и у свободных электронов (и дырок), обуславливающих ток проводимости. Этот эффект приводит к явлению, которое называется диамагнетизмом Ландау²⁾. Вообще, диамагнетизм свойственен всем веществам, в том числе плазме. Но во многих случаях, например в парамагнетиках, он практически незаметен, так как индуцированные магнитные моменты обычно на несколько порядков меньше собственных магнитных моментов (если они существуют).

Проведем в ситуации, которая представлена на рисунке на с.232, несложные расчеты, поясняющие смысл общих соотношений. При этом по причинам, указанным на с.225, стрелки над векторами ставиться не будут. Для полного магнитного момента образца имеем

$$m = Nm_0 = N \frac{J_0 S}{c} = \frac{JS}{c} = \frac{ihS}{c} = \frac{i}{c} V,$$

где N – число молекулярных слоев с кольцевыми токами J_0 и магнитными моментами $m_0 = J_0 S / c$ [формула (29.16)], $NJ_0 = J = ih$ – полная сила поверхностного тока намагниченности [формула (51.7) при $i_t = i = \text{const}$]. После деления на объем образца $V = sh$ получим

$$\frac{m}{V} = \frac{i}{c}. \quad (51.12)$$

¹⁾ Данный эффект последовательно может быть объяснен только в рамках квантовой механики. Различные его классические «объяснения» можно найти, например, в книгах: Свирский М.С. Электронная теория вещества. – М.: Просвещение, 1980. – §28; Астахов А.В., Широков Ю.М. Курс физики, т.П. Электромагнитное поле. – М.: Наука, 1980. – §20.8.

²⁾ Лев Давыдович Ландау (1908 – 1968) – выдающийся советский физик-теоретик. В 1930 г. построил теорию диамагнетизма свободных электронов, впервые объяснив природу диамагнетизма металлов.

Слева стоит магнитный момент единицы объема, т.е. намагниченность M , и потому

$$i = cM . \quad (51.13)$$

Учитывая, что в обсуждаемом случае $M = M_\tau$ и $i = i_\tau^{нам}$ (см. рисунок), приходим к равенству (51.8).

Рассматриваемый цилиндрический образец есть соленоид с плотностью поверхностного тока i . Такой ток создает внутри образца поле¹⁾

$$B' = \frac{4\pi}{c} i . \quad (51.14)$$

Полное поле \vec{B} в магнетике складывается из исходного поля \vec{B}_0 , которое было в вакууме, и поля \vec{B}' , возникающего за счет намагничения. Так как в рассматриваемом парамагнитном образце все эти векторы сонаправлены (см. выше), то $B = B_0 + B'$. Принимая во внимание (51.14) и (51.13), получим усиление поля по сравнению с вакуумом на $4\pi M$:

$$B = B_0 + 4\pi M . \quad (51.15)$$

Данная формула справедлива и для диамагнитного образца, если считать, что $M < 0$. В нем поле ослабляется.

Второе граничное условие (47.16) записывается на боковой поверхности цилиндра, разделяющей вакуум и магнетик, как $H_{0\tau} = H_\tau$. Вдали от торцов, где можно пренебречь краевыми эффектами, это равенство дает $H_0 = H$. Учитывая, что в вакууме $\vec{H}_0 = \vec{B}_0$ (по определению), получим отсюда

$$B_0 = H . \quad (51.16)$$

Подстановка этого результата в (51.15) дает соотношение (51.1):

$$H = B - 4\pi M . \quad (51.17)$$

Оно справедливо как для парамагнетика ($M > 0$) так и для диамагнетика ($M < 0$). О смысле вектора \vec{H} теперь можно сказать то же самое, что говорилось о смысле вектора \vec{D} после формулы (50.16).

При обсуждении материального уравнения для магнитного поля естественно было бы анализировать общую исходную зависимость $\vec{M} = \vec{M}(\vec{B}, \vec{E})$. Тогда при предположениях, полностью аналогичных тем, которые были сделаны в §50, мы пришли бы к соотношениям

$$\vec{M} = \eta_m \vec{B} \quad (51.18)$$

и

$$\vec{H} = (1 - 4\pi\eta_m) \vec{B} \equiv \nu \vec{B} \quad (51.19)$$

¹⁾ См. формулу (51.8) в кн.: Сивухин Д.В. Общий курс физики, т. III. Электричество. – М.: Наука, 1977.

[сравн. с формулами (50.20) – (50.22)]. Однако в силу исторических причин принято рассматривать зависимость намагниченности \vec{M} не от поля \vec{B} , а от поля \vec{H} . Принципиальной разницы здесь нет, поскольку связь (51.1) между векторами \vec{H} , \vec{B} , \vec{M} является линейной. Мало того, при таком подходе физическая картина оказывается даже несколько более ясной, ибо в ряде случаев поле \vec{H} имеет смысл магнитного поля \vec{B}_0 в вакууме [см. начало §47 и, например, равенство (51.16)].

Итак, при тех же предположениях, что в §50, имеем

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (51.20)$$

Величина χ_m , являющаяся, вообще говоря, функцией координат (неоднородный магнетик), характеризует магнитные свойства данного вещества и называется его *магнитной восприимчивостью*, [хотя так следовало бы именовать величину η_m в формуле (51.18)]. Подставляя выражение (51.20) в (51.1), получим

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = (1 + 4\pi\chi_m) \vec{H}.$$

В итоге приходим к материальному уравнению

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (51.21)$$

где величина

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_m, \quad (51.22)$$

равная $1/\nu$ [формула (51.19)], называется *магнитной проницаемостью* (напомним, что в современной терминологии ϵ – это диэлектрическая постоянная). Для однородных магнетиков $\mu = const$, для неоднородных $\mu = \mu(\vec{r})$.

В диэлектриках векторы \vec{P} и \vec{E} всегда сонаправлены, откуда следует неотрицательность диэлектрической восприимчивости χ_e и равнозначное ей неравенство (50.23) $\epsilon \geq 1$. В магнетиках вектор \vec{M} может быть направлен как по полю \vec{H} , так и против него (см. выше). Первый случай соответствует парамагнетикам, для которых, согласно (51.20) и (51.22), $\chi_m > 0$ и $\mu > 1$. Второй случай отвечает диамагнетикам, для которых $\chi_m < 0$ и $\mu < 1$. Таким образом, условие $\mu \geq 1$, аналогичное (50.23), здесь уже не выполняется. На основе общих термодинамических соображений можно доказать лишь неравенство¹⁾

$$\mu \geq 0, \quad (51.23)$$

которое в стационарном случае должно быть справедливым для всех веществ.

Из сказанного ясно, что значения магнитных постоянных в принципе могут изменяться в следующих пределах: для парамагнетиков

$$1 \leq \mu < +\infty, \quad 0 \leq \chi_m < +\infty, \quad (51.24)$$

¹⁾ Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, 2-е изд. – М.: Наука, 1982. – §31–32.

для диамагнетиков

$$0 \leq \mu \leq 1, \quad -\frac{1}{4\pi} \leq \chi_m \leq 0. \quad (51.25)$$

Равенства $\mu = 1$, $\chi_m = 0$ отвечают вакууму. У большинства веществ значения μ и χ_m очень мало отличаются от 1 и 0 соответственно: у типичных парамагнетиков $\chi_m = 10^{-5} - 10^{-2}$, диамагнетиков $\chi_m = 10^{-6} - 10^{-5}$.

Однако существует ряд веществ с резко выраженными и весьма необычными магнитными свойствами. Среди них по своей практической значимости выделяются *ферромагнетики*¹⁾, которые формально можно отнести к парамагнетикам, но с огромной магнитной проницаемостью, достигающей значений $10^4 - 10^5$. Ферромагнетики характеризуются наличием остаточной намагниченности [сравн. с обсуждением формулы (50.18)], петли гистерезиса и точки Кюри – температуры, выше которой вещество превращается в обычный парамагнетик. Зависимость $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ в ферромагнетиках нелинейна, и соотношение (51.21) можно применять к ним, только считая, что $\mu = \mu(\vec{H})$ ²⁾.

Что касается неравенств (51.25), то здесь следует выделить крайний случай

$$\mu = 0, \quad \chi_m = -\frac{1}{4\pi}. \quad (51.26)$$

В толще соответствующего образца магнитное поле отсутствует:

$$\vec{B} = 0, \quad (51.27)$$

а вне его в силу третьего граничного условия (47.16) $B_{n1} = B_{n2}$ магнитные силовые линии всюду касательны к поверхности. Именно такая ситуация характерна для *сверхпроводников*, о которых, имея в виду равенства (51.26), говорят иногда как об идеальных диамагнетиках³⁾. Полное выталкивание магнитного поля из сверхпроводника составляет суть *эффекта Мейсснера*, составляющего столь же неотъемлемое и важнейшее его свойство, как и отсутствие электрического сопротивления. Эффект Мейсснера обусловлен возникновением макроскопических поверхностных токов.

¹⁾ Существуют также ферромагнетики, антиферромагнетики, метамгнетики.

²⁾ О свойствах и природе ферромагнетизма см., например: Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. – М.: Просвещение. 1980. – §8.5.

³⁾ Хотя этот термин носит достаточно формальный характер, ибо в сверхпроводнике не имеет особого физического смысла вводить в рассмотрение намагниченность \vec{M} , а вместе с ней и поле \vec{H} . Здесь невозможно также разделение усредненного тока на ток проводимости и ток намагниченности.