

Глава IX. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ВЕЩЕСТВЕ

В предыдущей главе построена общая конструкция электродинамики сплошных сред, представленная в табл. 4 на с.210. Перейдем теперь к исследованию наиболее важных частных случаев электромагнитных полей в веществе. Рассмотрение естественно начинать с самого простого из них, когда поле создается системой неподвижных заряженных частиц.

§52. Электростатика диэлектриков

Уравнения электростатики диэлектриков получим из общей системы уравнений Максвелла (47.10), полагая производные по времени и токи равными нулю:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (52.1)$$

Здесь ρ – объемная плотность сторонних зарядов, \vec{E} – макроскопическое электрическое поле, а \vec{D} вводится определением

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (52.2)$$

где \vec{P} – поляризованность, смысл и свойства которой подробно обсуждались в §50. К уравнениям (52.1) нужно добавить материальное уравнение $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$, которое в простейшем случае записывается как

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}. \quad (52.3)$$

Кроме того, их следует дополнить граничными условиями (47.16)

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad E_{\tau1} = E_{\tau2}, \quad (52.4)$$

которые с учетом (52.3) принимают вид

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}, \quad E_{\tau1} = E_{\tau2} \quad (52.5)$$

(поверхностную плотность сторонних зарядов считаем равной нулю: $\sigma = 0$). Из последних формул видно, что на границе раздела двух сред величины D_τ и E_n терпят разрыв, и силовые линии полей \vec{E} и \vec{D} преломляются. Если распределение сторонних зарядов финитное, то к (52.5) добавляется также естественное граничное условие [а при необходимости и граничные условия типа (19.7) и (19.8)].

Из второго уравнения (52.1) следует, что электростатическое поле в диэлектрике является потенциальным, т.е.

$$\exists\varphi: \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \quad (52.6)$$

Отсюда и из (52.3) имеем

$$\vec{D} = -\varepsilon \operatorname{grad} \varphi. \quad (52.7)$$

Подставляя последнее выражение в первое уравнение (52.1), получим дифференциальное уравнение для электростатического потенциала

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -4\pi\rho. \quad (52.8)$$

Если диэлектрик кусочно-однородный, то в каждой пространственной области, где $\varepsilon_i = \text{const}$ (i – номер области), (52.8) превращается в уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_i = -4\pi \frac{\rho_i}{\varepsilon_i}. \quad (52.9)$$

Граничные условия для потенциала на поверхностях Σ_{ij} , разделяющих области с номерами i и j , вытекают из (52.5) и (52.6):

$$\varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \Big|_{\Sigma_{ij}} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \Big|_{\Sigma_{ij}}, \quad \varphi_i \Big|_{\Sigma_{ij}} = \varphi_j \Big|_{\Sigma_{ij}}. \quad (52.10)$$

При финитном распределении зарядов обычно добавляется естественное граничное условие (19.14)

$$\varphi(\infty) = 0, \quad (52.11)$$

а иногда еще и дополнительное условие (19.18)

$$|\varphi(0)| < \infty. \quad (52.12)$$

Методы решения задач электростатики диэлектриков в общих своих чертах совпадают с методами, описанными в §22. Читателю предлагается самостоятельно проанализировать задачу о поле шара с радиусом R и диэлектрической проницаемостью ε , который находится в вакууме и по объему которого равномерно распределен заряд q . Напряженность поля \vec{E} рекомендуется находить с помощью теоремы Гаусса, а потенциал φ – путем решения соответствующей граничной задачи. При этом должны получиться следующие результаты:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon R^2} \frac{\vec{r}}{R}, & r < R \\ \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, & r > R \end{cases} \quad (52.13)$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon R} \left[\left(\varepsilon + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right], & r < R \\ \frac{q}{r}, & r > R \end{cases}, \quad (52.14)$$

которые при $\varepsilon = 1$ совпадают с (22.12) и (22.37) соответственно.

Заметим, что общей формулы для потенциала, подобной (22.24), в электростатике диэлектриков не существует. Рассмотрим, однако, *однородный* диэлектрик ($\varepsilon = \text{const}$),

который заполняет *все* пространство и в котором находятся сторонние заряды с объемной плотностью $\rho = \rho(\vec{r})$. Как явствует из (52.8) или (52.9), потенциал поля, создаваемого этими зарядами, подчиняется единому уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (52.15)$$

к которому нужно добавить лишь естественное граничное условие (52.11).

От соответствующей «вакуумной» задачи данная задача отличается только наличием постоянного множителя $1/\varepsilon$ в правой части (52.15). Поэтому ее решение получается из (22.24) простой заменой $\rho \mapsto \rho/\varepsilon$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{1}{\varepsilon} \varphi_{\text{вак}}(\vec{r}), \quad (52.16)$$

где $\varphi_{\text{вак}}$ – потенциал поля, создаваемого в вакууме тем же распределением зарядов $\rho = \rho(\vec{r})$. Таким образом, потенциал φ , а значит, и электрическое поле \vec{E} в диэлектрике

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{1}{\varepsilon} \vec{E}_{\text{вак}}(\vec{r}). \quad (52.17)$$

ослабляются по сравнению с вакуумом в ε раз. Для электрического смещения \vec{D} из (52.17) и (52.3) в рассматриваемом случае имеем

$$\vec{D} = \vec{E}_{\text{вак}}. \quad (52.18)$$

В частности, для поля одного точечного заряда q_0 , находящегося в начале координат, из (52.16) – (52.18) получаем

$$\varphi_0 = \frac{q_0}{\varepsilon r}, \quad \vec{E}_0 = \frac{q_0}{\varepsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{D}_0 = \frac{q_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (52.19)$$

Казалось бы, в такой ситуации естественно считать, что и сила \vec{F}_q , действующая в диэлектрике на пробную заряженную частицу, уменьшается в ε раз, ибо мы привыкли, что она связана с полем \vec{E} соотношением

$$\vec{F}_q = q\vec{E}. \quad (52.20)$$

И не даром в школьном курсе физики¹⁾ и в курсе общей физики²⁾ диэлектрическую постоянную ε вводят иногда, исходя из записи закона Кулона в форме

¹⁾ Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, 1986. – с.138.

²⁾ См., например: Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. – М.: Просвещение, 1980 - §1.2.

$$\vec{F}_q = \frac{qq_0}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (52.21)$$

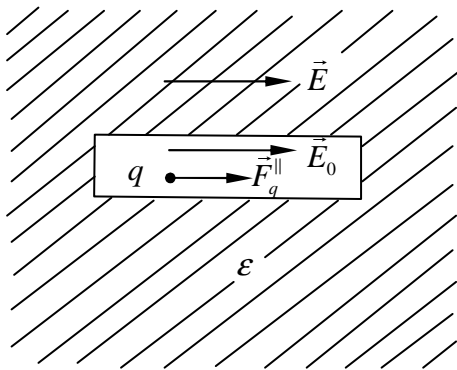
Однако здесь необходимы существенные оговорки.

Во-первых, при таком подходе априори предполагается справедливым материальное уравнение (52.3), которое, как мы видели в §50, имеет место далеко не всегда. Во-вторых, считается, что диэлектрик является однородным и заполняет все пространство, так как только в этом случае формулы (52.19) оказываются правильными. В образце конечных размеров поле точечной частицы искажают поверхностные поляризационные заряды. В-третьих, принимается соотношение (50.20) между напряженностью электрического поля и силой, действующей на пробную частицу, которое и позволяет перейти от формул (52.19) к закону Кулона (52.21). Данное предположение является наиболее тонким. И примечательно, что в школьном учебнике оно фактически отражено (см. первую сноску на с.239):

«Пусть заряженные частицы помещены в однородный... диэлектрик. При этом диэлектрик должен быть жидким (керосин, масло и т.д.), так как измерить силу взаимодействия заряженных тел внутри твердого диэлектрика невозможно из-за возникающих в нем упругих напряжений».

Для измерения силы, действующей на пробную частицу в твердом диэлектрике, в нем нужно сделать некоторую полость, куда и помещается данная частица. Тонкость состоит в том, что значение этой силы существенно зависит от формы полости, и потому результат ее измерения оказывается неоднозначным. Для пояснения ситуации рассмотрим однородную безграничную среду с диэлектрической проницаемостью ϵ , в которой имеется однородное электрическое поле $\vec{E} = const$.

Пусть сначала упомянутая полость представляет собой узкий и длинный цилиндр с осью, параллельной полю (см. рисунок). В его центральной части можно пренебречь



краевыми эффектами от торцов, считая, что поле \vec{E} вне полости не изменилось, а поле \vec{E}_0 внутри нее однородно и параллельно \vec{E} . Тогда из второго граничного условия $E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$ будем иметь

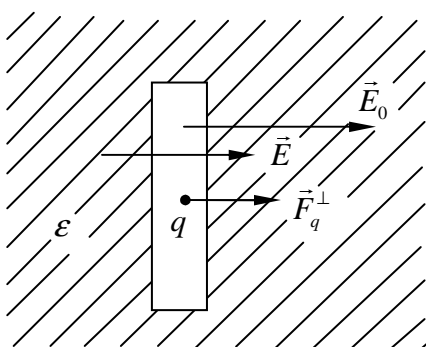
$$E_0 = E. \quad (52.22)$$

В итоге для силы, которая действует на пробную частицу, находящуюся внутри полости, т.е. в вакууме (1), получим

$$\vec{F}_q^{\parallel} = q\vec{E}_0 = q\vec{E}. \quad (52.23)$$

Этот результат полностью согласуется с формулой (52.20).

Но пусть теперь полость представляет собой широкий и низкий цилиндр (см. рисунок).



Тогда, применяя к его центральной части первое граничное условие (52.5) $\epsilon_1 E_{n_1} = \epsilon_2 E_{n_2}$, найдем

$$1 \cdot E_0 = \epsilon E,$$

откуда

$$E_0 = \epsilon E = D, \quad (52.24)$$

и

$$\vec{F}_q^{\perp} = q\vec{E}_0 = q\vec{D} = \epsilon q\vec{E}. \quad (52.25)$$

В данном случае сила увеличивается в ε раз по сравнению с силой, вычисленной по формуле $\vec{F}_q = q\vec{E}$, т.е. (52.20).

Если полость является сферической, то можно показать (см. дополнение к данному параграфу), что поле внутри нее является однородным, причем

$$\vec{E}_0 = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} \vec{E}, \quad (52.26)$$

а значит,

$$\vec{F}_q = q\vec{E}_0 = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} q\vec{E}. \quad (52.27)$$

Как нетрудно видеть, при $\varepsilon \geq 1$ [условие (50.23)]

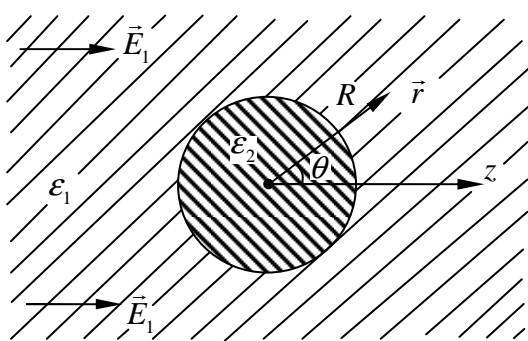
$$|\vec{F}_q^{\parallel}| \leq |\vec{F}_q| \leq |\vec{F}_q^{\perp}|. \quad (52.28)$$

Интересно, что эти неравенства справедливы не только для сферической, но и для произвольной полости¹⁾.

Дополнение к §52

Формулу (52.26) можно получить множеством различных способов. Мы выбрали далеко не самый простой из них, так как основная наша цель даже не столько в выводе данной формулы, сколько в демонстрации одного из мощнейших методов математической физики – метода разделения переменных. Рассматриваем задачу, чуть более общую, чем та, которая указана выше. Пусть все пространство заполняет однородная среда с диэлектрической постоянной ε_1 , в которой имеется однородное поле \vec{E}_1 . В эту среду помещается однородный шар с радиусом R и диэлектрической постоянной ε_2 . Требуется найти поле внутри и вне шара.

Анализ проводим в сферических координатах (см. рисунок), в которых в силу аксиальной симметрии системы потенциал φ не зависит от азимутального угла:



$$\varphi = \varphi(r, \theta). \quad (52.29)$$

Поскольку $\rho = 0$, потенциал подчиняется уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$. При учете (52.29) оно записывается в сферических координатах как

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \varphi + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \varphi = 0. \quad (52.30)$$

¹⁾ При этом накладывается естественное требование, чтобы при $\vec{E} = const$ поле \vec{E}_0 было тоже однородным. Ему удовлетворяет полость в форме эллипсоида с произвольным соотношением между полуосями (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, 2-е изд. - М.: Наука, 1982. - §8)

Вдали от шара поле не искажается и остается равным $\vec{E}_1 = \text{const}$, а потому естественное граничное условие (52.11) заменяется в данном случае требованием

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} = -(\vec{E}_1, \vec{r}) = -\vec{E}_1 z = -E_1 r \cos \theta \quad (52.31)$$

[формула (20.13) при $c = 0$]. Кроме того, необходимо, чтобы решение уравнения (52.30) удовлетворяло граничным условиям (52.12):

$$\varphi_1|_{r=R} = \varphi_2|_{r=R}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (52.32)$$

и дополнительному ограничению (52.12):

$$|\varphi(0)| < +\infty. \quad (52.33)$$

Применяем метод разделения переменных и ищем частное решение уравнения (52.30) в виде

$$\varphi(r, \theta) = f(r) \chi(\theta). \quad (52.34)$$

Подстановка (52.34) в (52.30) с последующим делением на $f \chi$ дает

$$\frac{1}{f} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = -\frac{1}{\chi \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\chi}{d\theta} \right). \quad (52.35)$$

Левая часть зависит только от r , а правая – только от θ . Это возможно лишь в том случае, когда оба выражения равны некоторой постоянной λ . Поэтому из (52.35) получаем два дифференциальных уравнения

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\chi}{d\theta} \right) + \lambda \chi = 0 \quad (52.36)$$

и

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) - \lambda f = 0. \quad (52.37)$$

В уравнении (52.36) делаем замену независимой переменной

$$x = \cos \theta, \quad \chi(\theta) \equiv \tilde{\chi}(\cos \theta) = \tilde{\chi}(x).$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} \frac{d}{d(\cos \theta)} = -\sin \theta \frac{d}{dx}, \quad \sin^2 \theta = 1 - x^2,$$

получим уравнение Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d\tilde{\chi}(x)}{dx} \right] + \lambda \tilde{\chi}(x) = 0, \quad (52.38)$$

заданное на отрезке $-1 \leq x \leq +1$. Из курса математики известно, что оно имеет ограниченные решения не при всех λ , а лишь при

$$\lambda = n(n+1), \quad (52.39)$$

где n – любое неотрицательное целое число. Решение, соответствующее заданному n , есть полином Лежандра n -го порядка, и мы имеем

$$\tilde{\chi}_n(x) = P_n(x) \equiv \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]. \quad (52.40)$$

В явном виде первые три полинома Лежандра записываются следующим образом:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \quad (52.41)$$

Итак, мы получаем счетное множество функций χ , входящих в (52.34):

$$\chi_n(\theta) = P_n(\cos \theta). \quad (52.42)$$

Каждому значению λ (52.39) отвечает свое дифференциальное уравнение (52.37):

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df_n}{dr} \right) - n(n+1) f_n = 0. \quad (52.43)$$

Каждое из них есть уравнение Эйлера, и оно имеет степенные решения $f_n = r^{\alpha_n}$. Подстановка этого выражения для f_n в (52.43) приводит к алгебраическим уравнениям $\alpha_n(\alpha_n + 1) = n(n+1)$, имеющим по два корня: $\alpha_n^{(1)} = n$ и $\alpha_n^{(2)} = -(n+1)$. В итоге получаем два множества функций f , входящих в (52.34)

$$f_n^{(1)} = r^n, \quad f_n^{(2)} = \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (52.44)$$

и, как следствие (52.42) и (52.44), два набора частных решений уравнения Лапласа (52.30):

$$\varphi_n^{(1)} = r^n P_n(\cos \theta), \quad \varphi_n^{(2)} = \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (52.45)$$

Его общее решение в каждой пространственной области представляет собой произвольную линейную комбинацию частных решений (52.45), что в рассматриваемой задаче дает

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), & r < R \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), & r > R \end{cases}. \quad (52.46)$$

Из ограничения (52.12) следует, что все $b_n = 0$. Учитывая равенство $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$ [вторая формула (52.41)], из «естественного» граничного условия (52.31) получим $c_1 = -E_1$, $c_{n \neq 1} = 0$. В результате (52.46) превратится в

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta), & r < R \\ -E_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), & r > R \end{cases}. \quad (52.47)$$

Два оставшихся граничных условия (52.32) приводят к системам алгебраических уравнений

$$n=1: \begin{cases} a_1 R = -E_1 R + \frac{d_1}{R^2} \\ \varepsilon_2 a_1 = -\varepsilon_1 E - \frac{2\varepsilon_1 d_1}{R^3} \end{cases}; \quad n \neq 1: \begin{cases} a_n R^n = \frac{d_n}{R^{n+1}} \\ \varepsilon_2 n R^{n-1} a_n = -(n+1) \frac{\varepsilon_1 d_n}{R^{n+2}} \end{cases}. \quad (52.48)$$

Как показывает элементарная выкладка, при любом $n \neq 1$ определитель каждой системы из двух однородных уравнений, выписанных справа, равен нулю, а потому они имеют только тривиальные решения:

$$a_n = d_n = 0 \quad (n \neq 1). \quad (52.49)$$

Решением же системы уравнений (52.48) при $n=1$ являются числа

$$a_1 = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_1, \quad d_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_1 R^3. \quad (52.50)$$

Подставляя коэффициенты (52.49) и (52.50) в (52.47), окончательно найдем

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_1 z, & r < R \\ -E_1 z + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_1 R^3 \frac{\cos \theta}{r^2}, & r > R \end{cases}, \quad (52.51)$$

где учтено, что $P_1(x) = x$ и $r \cos \theta = z$. Электрическое поле внутри шара является однородным:

$$\vec{E}|_{r < R} = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \vec{E}_1. \quad (52.52)$$

Полагая здесь $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 1$, $\vec{E}_1 \equiv \vec{E}$ и $\vec{E}|_{r < R} \equiv \vec{E}_0$, придем к формуле (52.26) для поля в сферической полости.

Рассмотрим подробнее противоположный случай, когда во внешнее однородное электрическое поле в вакууме помещается диэлектрический шар. Полагая $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon$, $\vec{E}_1 \equiv \vec{E}_0$, из (52.51) получим

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{3}{\varepsilon + 2} E_0 z, & r < R \\ -E_0 z + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 R^3 \frac{\cos \theta}{r^2}, & r > R \end{cases}. \quad (52.53)$$

Для потенциала вне шара можно записать

$$\varphi|_{r>R} = -(\vec{E}_0, \vec{r}) + \frac{(\vec{d}, \vec{r})}{r^3}, \quad (52.54)$$

где

$$\vec{d} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 \vec{E}_0. \quad (52.55)$$

Отсюда видно, что поле во внешней области представляет собой суперпозицию исходного поля $\vec{E}_0 = const$ и поля диполя с моментом \vec{d} [вспомним формулу (23.13)], который возникает за счет поляризации диэлектрика.

Внутри шара поле однородно:

$$\vec{E}|_{r<R} \equiv \vec{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0. \quad (52.56)$$

Для поляризованности в этой области из (52.20), (52.22) и (52.56) имеем

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0 = const. \quad (52.57)$$

Этот результат можно получить также, поделив полный дипольный момент (52.55) на объем шара. Для поверхностной плотности связанных зарядов, распределенных по сфере, из (50.7) и (52.57) находим

$$\sigma_{связ} = P_n|_{r=R} = P \cos \theta = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 \cos \theta. \quad (52.58)$$

Если проинтегрировать эту величину по поверхности сферы, то для полного связанного заряда получим $q_{связ} = 0$, в полном соответствии с общей формулой (50.6).

§53. Электростатика проводников

Проводники характеризуются наличием в них свободных зарядов, которые способны перемещаться под действием сколь угодно слабого электрического поля. Для этих сред понятия поляризованности \vec{P} и электрического смещения \vec{D} не имеют особого физического смысла. Поэтому при анализе электромагнитных явлений в них естественно исходить не из феноменологических уравнений Максвелла (47.10), а непосредственно из усредненных уравнений (48.10). Сейчас нас интересует электростатическое поле системы проводников. Уравнения для него получим из (48.10), полагая все производные по времени и токи равными нулю:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \langle \rho_m \rangle, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (53.1)$$

или, в интегральной форме записи,

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi q_V, \quad \oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = 0. \quad (53.2)$$

I. Электростатическое поле внутри проводников

Из самого определения проводников явствует, что макроскопическое электростатическое поле внутри каждого из них отсутствует¹⁾:

$$\vec{E} \Big|_{\text{внутр}} = 0. \quad (53.3)$$

В противном случае возникло бы упорядоченное макроскопическое движение свободных зарядов, т.е. электрический ток. Из (53.3) и первого уравнения (53.1) следует, что средняя плотность заряда внутри проводника тоже равна нулю:

$$\langle \rho_m \rangle \Big|_{\text{внутр}} = 0. \quad (53.4)$$

Иными словами, все заряды, сообщенные проводнику или индуцированные внешним полем, располагаются на его поверхности. Их распределение характеризует поверхностная плотность $\sigma = \sigma(\vec{r})$.

В школьном учебнике физики по этому поводу говорится следующее²⁾:

«Весь статический заряд проводника сосредоточен на его поверхности. В самом деле, если бы заряд располагался где-либо внутри проводника, то вблизи заряда имелось бы и поле. Но электростатического поля внутри проводника нет. Следовательно, заряды в проводнике могут располагаться только на его поверхности».

Нужно иметь в виду, однако, что это рассуждение является не вполне строгим, ибо опирается только на равенство (53.3). На самом же деле, для справедливости (53.4) необходимо еще, чтобы выполнялось первое уравнение (53.1), т.е. в конечном итоге – закон Кулона (см. §7, п.1). Если бы последний нарушался, то, несмотря на (53.3), равенство (53.4) не имело бы места.

Это обстоятельство четко осознавал уже Г.Кавендиш. Опираясь именно на него, он в 1773г. и установил закон $1/r^2$ для силы электростатического взаимодействия. Опыты Кавендиша были проделаны за 12 лет до Ш. Кулона, использовавшего крутильные весы, и отличались большей точностью. Однако его работы оставались неизвестными до 1879г., когда их опубликовал Дж. Максвелл, повторивший соответствующие измерения с несколько измененной методикой. Если считать³⁾ $|\vec{F}| \sim 1/r^{2+\alpha}$, то из опытов Кавендиша следовало, что

¹⁾ Здесь не рассматриваются контактные явления, возникающие на границе раздела проводников различной природы.

²⁾ Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, 1986. – с.131.

³⁾ Раньше исходили именно из степенной модификации закона Кулона, которая, однако, с точки зрения современной физики особого смысла не имеет. Сейчас основной интерес

$|\alpha| < 0,02$, из опытов Кулона – $|\alpha| < 0,1$, из опытов Максвелла – $|\alpha| < 0,00005$. В 1936г. С.Плимpton и В.Лоутон установили, что $|\alpha| < 10^{-9}$.

В экспериментах Кавендиша и Максвелла брались две проводящие сферы с разными радиусами, которые помещались одна в другую, соединялись проводником и подключались к лейденской банке. Затем сферы отсоединялись, внешняя снималась и внутренняя исследовалась на остаточный заряд с целью проверки формулы (53.4), а значит, и закона Кулона. Эксперимент Плимптона и Лоутона проводился почти так же, но сферы не соединялись между собой и заряжалась лишь внешняя из них. Такая постановка опыта требует дополнительного анализа, который представляет и самостоятельный интерес.

Дело в том, что до сих пор проводники считались односвязными, т.е. сплошными. Допустим теперь, что внутри какого-то из них имеется пустая ($\rho = 0$) полость. Утверждается, что поле в полости отсутствует:

$$\vec{E}_{пол} = 0, \quad (53.5)$$

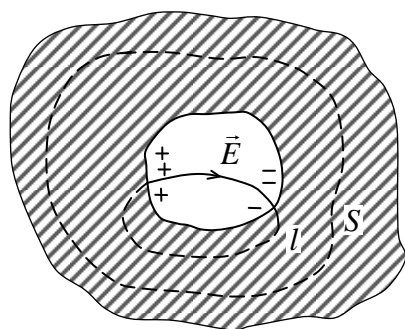
и что зарядов на внутренней поверхности проводника не существует:

$$\sigma_{внутр} = 0. \quad (53.6)$$

На равенстве (53.5) основывается электростатическая защита. Оно же используется и при анализе результатов измерений Плимптона и Лоутона. Сформулированные положения можно сразу же доказать с помощью некоторых общих теорем математической физики (см. ниже). Но мы их установим более просто, опираясь на уравнения (53.2) и равенства (53.3) и (53.4), т.е. фактически только на закон Кулона и определение проводника.

1)

Покажем сначала, что равен нулю полный заряд на внутренней поверхности проводника. Для этого воспользуемся теоремой Гаусса (53.2), выбрав в качестве S поверхность в толще проводника, окружающую полость (см. рисунок). В силу (53.3) поток электрического поля через S равен нулю, а потому $q_V = 0$. Так как в самом проводнике $\langle \rho_m \rangle = 0$ и в пустой полости $\rho = 0$, то отсюда следует, что и заряд на внутренней поверхности проводника равен нулю.



Но еще не исключена возможность, что в одном ее месте имеется положительный заряд, а в другом – равный ему по модулю отрицательный заряд. Допустим, что это так. Тогда в полости будет существовать поле \vec{E} , одна из силовых линий которого

изображена на рисунке. Выбрав в качестве l контур, пересекающий полость вдоль силовой линии, а в остальном проходящий в толще проводника, найдем, что циркуляция \vec{E} отлична от нуля. Полученное противоречие со вторым уравнением (53.2) и доказывает равенства (53.5) и (53.6). Если бы нарушался закон Кулона, они не выполнялись бы, на чем и основывается идея опыта Плимптона и Лоутона.

представляет его экспоненциальная модификация (замена кулоновского потенциала юкавским), связанная с возможным наличием массы у фотона. Доступный анализ данной проблематики можно найти в увлекательно написанной кн.: Смондырев М.А. Квантовая электродинамика и опыт. – М.: Знание, 1984.

II. Проводники в вакууме

Итак, в толще и в полостях проводников, т. е. всюду внутри них, электростатическое поле отсутствует. Поэтому основной здесь является так называемая *внешняя* задача, состоящая в данном случае в определении поля вне проводников и распределения зарядов на их поверхностях. Считаем пока, что проводники находятся в вакууме, т.е. что между ними нет диэлектрической среды. Тогда электростатическое поле во внешней области будет подчиняться уравнениям (19.2)

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (53.7)$$

К ним нужно добавить граничные условия на поверхностях проводников. Из (19.5) и (19.6) при учете (53.3) следует, что

$$E_n|_{\Sigma_i} = 4\pi\sigma_i \quad (53.8)$$

и

$$E_\tau|_{\Sigma_i} = 0, \quad (53.9)$$

где i – номер проводника. Если проводники имеют конечные размеры, а распределение зарядов между ними финитное, то поле \vec{E} должно подчиняться также естественному граничному условию (19.4). Из равенств (53.9) явствует, что силовые линии поля вблизи данного проводника перпендикулярны его поверхности. Смысл равенств (53.8) мы обсудим чуть позже.

Как и обычно, проще иметь дело не с самим полем \vec{E} , а с электростатическим потенциалом φ , через который \vec{E} выражается стандартным образом:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (53.10)$$

Потенциал подчиняется уравнению Пуассона (19.11)

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad (53.11)$$

а в отсутствие зарядов между проводниками ($\rho = 0$) – уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (53.12)$$

Из (53.8) и (53.9) при учете (53.10) следует, что на поверхностях проводников

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\Sigma_i} = 4\pi\sigma_i \quad (53.13)$$

и

$$\varphi|_{\Sigma_i} = \operatorname{const}. \quad (53.14)$$

Если проводники конечные, а распределение зарядов финитное, то на потенциал накладывается еще естественное граничное условие (19.14)

$$\varphi(\infty) = 0. \quad (53.15)$$

Равенства (53.14) означают, что поверхность каждого проводника является эквипотенциальной. Принимая к тому же во внимание соотношения (53.3) и (53.5), найдем, что потенциал одинаков не только во всех точках поверхности данного проводника, но и во всех его внутренних точках – в толще и пустых полостях.

Что касается равенств (53.13) [и эквивалентных им равенств (53.8)], то сами по себе они не могут рассматриваться как граничные условия. Распределение зарядов на поверхностях проводников заранее неизвестно, и не φ (или \vec{E}) находится по заданным σ_i , а наоборот, функции $\sigma_i = \sigma_i(\vec{r})$ определяются по так или иначе найденному потенциалу $\varphi = \varphi(\vec{r})$ [или полю $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$]:

$$\sigma_i = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i}. \quad (53.16)$$

Каждое из таких равенств обретает истинный смысл граничного условия лишь после его интегрирования по поверхности соответствующего проводника

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = q_i. \quad (53.17)$$

Это связано с тем, что полные заряды проводников q_i часто считаются известными.

В электростатике проводников возможны две различные постановки основной задачи, состоящей в определении поля вне проводников и распределения зарядов на их поверхностях.

1. В задачах первого типа заданы потенциалы всех проводников (они заземлены или подключены к источникам постоянного напряжения). В этом случае решается уравнение Пуассона (53.11) или уравнение Лапласа (53.12) с граничными условиями вида (53.14):

$$\varphi|_{\Sigma_i} = \varphi_i \quad (53.18)$$

(φ_i – известные постоянные), при необходимости дополненными естественным граничным условием (53.15).

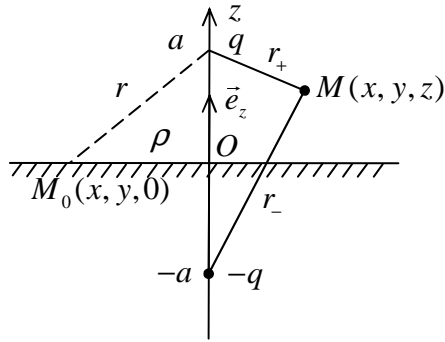
2. В задачах второго типа заданы заряды всех проводников (они изолированы от внешних тел). Здесь ищется решение уравнения (53.11) или (53.12) с граничными условиями (53.17) (q_i известны) и (53.15).

Для задач указанных типов (а также для задач смешанного типа) справедливы соответствующие *теоремы единственности* (см. дополнение к данному параграфу). Заметим, что теорема единственности имеет место и для *внутренней* задачи первого типа. В общем виде она формулируется следующим образом: если функция φ удовлетворяет в конечной области V_0 уравнению Лапласа (53.12), непрерывна в замкнутой области \bar{V}_0 , включающей границу Σ_0 , и принимает на Σ_0 заданные значения, то эта функция единственна. Читателю предлагается самостоятельно воспользоваться этой теоремой для установления равенств (53.5) и (53.6).

Существует множество методов решения задач электростатики проводников. Некоторые из них фактически упоминались или даже рассматривались в §22 и §52. Остановимся на *методе изображений*, который ранее не встречался. Его идея состоит в

такой замене реальных проводников фиктивными зарядами («изображениями»), при которой уравнение Пуассона в области между проводниками и граничные условия на их поверхностях не изменяются. В силу теоремы единственности в указанной области решение исходной задачи совпадает с решением новой задачи – без проводников, но с дополнительными зарядами.

В качестве простого примера рассмотрим задачу о точечном заряде q , находящемся на



расстоянии a от бесконечной заземленной проводящей плоскости (или от границы полупространства, заполненного проводником). Задача ставится в области $z \geq 0$ и состоит в отыскании потенциала ϕ , подчиняющегося уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho = -4\pi q \delta(x) \delta(y) \delta(z-a) \quad (53.19)$$

и граничным условиям вида (53.18) и (53.15):

$$\phi|_{z=0} = 0, \quad \phi|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (53.20)$$

Заменяя проводник точечным зарядом $-q$ в точке $(0, 0, -a)$, мы не изменим ни уравнение (53.19) при $z > 0$, ни граничные условия (53.20). Поэтому в верхнем полупространстве поле системы, заряд q и проводящая плоскость будет таким же, как поле системы зарядов q и $-q$:

$$\phi = \frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}}. \quad (53.21)$$

Для поверхностной плотности зарядов, индуцированных на плоскости, из (53.16) и (53.21) имеем

$$\sigma_{\text{инд}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{qa}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}},$$

или

$$\sigma_{\text{инд}} = -\frac{qa}{2\pi r^3} = -\frac{qa}{2\pi(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \quad (53.22)$$

(обозначения пояснены на рисунке). Проводя интегрирование по плоскости с использованием полярных координат ρ , α , получим для полного индуцированного заряда

$$q_{\text{инд}} = \int \sigma dS = -\frac{qa}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha,$$

откуда

$$q_{\text{инд}} = -q. \quad (53.23)$$

Сила \vec{F}_q , действующая на заряд q , равна $q\vec{E}_{nl}$, где \vec{E}_{nl} – поле, которое создается зарядами плоскости в точке $(0,0,a)$. Но это поле совпадает с полем заряда $-q$, а потому $F_q = q(-q)/(2a)^2$, т.е.

$$\vec{F}_q = -\frac{q^2}{4a^2}\vec{e}_z. \quad (53.24)$$

Казалось бы, энергия взаимодействия заряда q с проводящей плоскостью должна равняться

$$u = q\varphi_{nl} = q\varphi_{-q} = q(-q)/2a = -\frac{q^2}{2a},$$

но на самом деле она вдвое меньше:

$$u = -\frac{q^2}{4a}. \quad (53.25)$$

Причина в том, что плотность энергии поля $E^2/8\pi$ реально отлична от нуля лишь при $z > 0$, и при вычислении полной энергии эту величину следует интегрировать только по верхнему полупространству. Выражение (53.25) можно обосновать и несколько иначе, учитывая, что потенциальная энергия есть работа по перемещению заряда q из исходной точки в бесконечность:

$$u = A_{a,+\infty} = \int_a^{+\infty} F_q dz = \int_a^{+\infty} q \frac{-q}{(2z)^2} dz = -\frac{q^2}{4a}.$$

Появление дополнительного множителя $1/2$ связывается здесь с тем, что при вычислении указанной работы нужно удалять от плоскости $z = 0$ не только реальный заряд q , но и его «изображение» $-q$, эффективно заменяющее действие индуцированных зарядов.

Вернемся к общей системе проводников с зарядами q_i и потенциалами φ_i . Найдем энергию этой системы, применяя прием, описанный в §25, и считая, что вне проводников заряды отсутствуют ($\rho = 0$):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{8\pi} \int_{V_\infty} \vec{E}^2 dV = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_\infty} (\vec{E}, \text{grad } \varphi) dV = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_\infty} \text{div}(\varphi \vec{E}) dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_\infty} \varphi \text{div} \vec{E} dV = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_\infty} \varphi(\vec{E}, d\vec{S}) + \frac{1}{8\pi} \sum_i \oint_{S_i} \varphi(\vec{E}, d\vec{S}) + \frac{1}{8\pi} \int_{V_\infty} \varphi \cdot 4\pi\rho dV = \\ &= 0 + \frac{1}{8\pi} \sum_i \oint_{S_i} \varphi E_n dS + 0 = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma dS. \end{aligned}$$

Здесь последовательно использованы: выражение (25.2) для полной энергии электрического поля; соотношение (53.10); формула векторного анализа

$$\text{div}(\varphi \vec{E}) = \varphi \text{div} \vec{E} + (\vec{E}, \text{grad } \varphi);$$

теорема Гаусса–Остроградского для многосвязной области V_∞ , ограниченной бесконечно удаленной поверхностью S_∞ и поверхностями проводников S_i , внешние нормали к которым являются внутренними по отношению к V_∞ , откуда и соответствующее изменение знака; естественные граничные условия для \vec{E} и φ , а также равенство $\rho=0$; постоянство потенциала на поверхностях проводников и условия (53.8). Учитывая к тому же, что каждый из последних интегралов равен заряду q_i проводника i , окончательно будем иметь

$$u = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i \quad (53.26)$$

[сравн. с (25.4)].

Сюда входят как заряды q_i , так и потенциалы φ_i проводников, но обычно задаются лишь либо те, либо другие. Поэтому полезно переписать выражение (53.26) для энергии так, чтобы в него входили только заряды или только потенциалы. Для этого учтем, что при $\rho=0$ все уравнения и граничные условия электростатики проводников линейны и однородны по потенциалам и зарядам: они сохраняют свой вид при умножении этих величин на любое постоянное число k . Но это может быть лишь в том случае, когда заряды (потенциалы) проводников являются линейными функциями их потенциалов (зарядов).

Обсудим эту проблему подробнее на примере уединенного проводника, для которого, согласно (53.26),

$$u_0 = \frac{1}{2} q_0 \varphi_0. \quad (53.27)$$

Докажем, что величины q_0 и φ_0 пропорциональны друг другу. Поместим на проводник сначала заряд q_0 , а затем заменим его зарядом $q'_0 = kq_0$. Тогда для определения потенциалов будем иметь следующие две задачи второго из указанных выше типов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = 0 \\ -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = q_0 \\ \varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi' = 0 \\ -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS = q'_0 \equiv kq_0 \\ \varphi'|_{r \rightarrow \infty} = 0 \end{array} \right.$$

Умножив обе части левых соотношений на k , мы увидим, что функции $\varphi'(\vec{r})$ и $k\varphi(\vec{r})$ подчиняются одинаковым уравнениям и граничным условиям. Поэтому, в силу теоремы единственности, $\varphi' = k\varphi$, откуда $\varphi'/\varphi = k = q'_0/q_0$. Таким образом, отношение заряда q_0 данного проводника к его потенциалу φ_0 есть некоторая константа:

$$\frac{q_0}{\varphi_0} = \text{const} \equiv C_0. \quad (53.28)$$

Она определяется геометрией проводника и называется его *емкостью* C_0 . По порядку величины емкость равна характерному линейному размеру проводника. В частности, как

нетрудно видеть, для проводящего шара $C_0 = R$. Итак, мы доказали, что заряд q_0 и потенциал φ_0 действительно пропорциональны друг другу:

$$q_0 = C_0 \varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{1}{C_0} q_0. \quad (53.29)$$

Подставляя эти выражения в формулу (53.27), будем иметь

$$u_0 = \frac{1}{2} q_0 \varphi_0 = \frac{1}{2} C_0 \varphi_0^2 = \frac{1}{2C_0} q_0^2. \quad (53.30)$$

Обобщением соотношений пропорциональности (53.29) на случай нескольких проводников служат линейные связи между их зарядами и потенциалами:

$$q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j \quad (53.31)$$

или

$$\varphi_i = \sum_j (C^{-1})_{ij} q_j, \quad (53.32)$$

Где C^{-1} – матрица, обратная к C . Величины C_{ij} , имеющие размерность длины, зависят лишь от размеров и конфигурации проводников. Диагональные элементы C_{ii} матрицы C называются коэффициентами емкости, ее элементы C_{ij} с $i \neq j$ – коэффициентами электростатической индукции. Можно показать, что матрица C симметрична¹⁾:

$$C_{ij} = C_{ji}. \quad (53.33)$$

С помощью (53.31) и (53.32) выражение (53.26) для энергии системы проводников представляется в виде квадратичной формы от их потенциалов или зарядов:

$$u = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} \varphi_i \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (C^{-1})_{ij} q_i q_j \quad (53.34)$$

[сравн. с (53.30)], чем и решается поставленная выше задача.

С практической точки зрения особенно важны *конденсаторы* – системы из двух проводников, в которых все силовые линии начинаются на одном из них, а кончаются на другом. Так как полные потоки электрического поля через поверхности этих проводников различаются только знаками, то их заряды равны по модулю и противоположны по знаку. Считая для определенности, что $q_1 > 0$ запишем

$$q_1 = -q_2 \equiv q, \quad q > 0. \quad (53.35)$$

Основной характеристикой конденсатора является его *емкость*

¹⁾ Подробное обсуждение свойств и смысла величин C_{ij} можно найти в кн.: Измайлов С.В. Курс электродинамики. - М.: Учпедгиз, 1962. – § 88-90.

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (53.36)$$

[сравн. с (53.28)]. Для энергии заряженного конденсатора из (53.26) и (53.35) имеем

$$u = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{1}{2}[q\varphi_1 + (-q)\varphi_2] = \frac{1}{2}q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

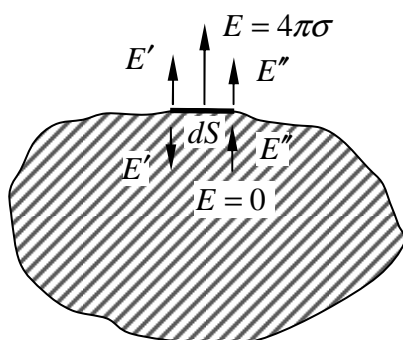
или, с учетом определения емкости (53.36),

$$u = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}C(\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (53.37)$$

В итоге мы приходим к формуле (8.34) из школьного учебника физики¹⁾.

Вернемся к уединенному заряженному проводнику. На его поверхность действуют *силы растяжения*, ибо одноименные заряды отталкиваются друг от друга. Поверхностные силы действуют и на нейтральный в целом проводник, находящийся в электростатическом поле – внешнем или создаваемом другими заряженными проводниками. Найдем их плотность, т.е. силу \vec{f} , приходящуюся на единицу площади поверхности проводника.

Для этого учтем, что на выделенный элемент поверхности dS действуют силы со стороны поля, создаваемого всеми зарядами, кроме тех, которые расположены на этом элементе поверхности.



Обозначим через \vec{E}' поле выделенных зарядов, через \vec{E}'' – поле всех остальных зарядов, а через \vec{E} – суммарное поле, которое вне проводника вблизи его поверхности равно $4\pi\sigma$, а внутри проводника равно нулю. Тогда, обращаясь к рисунку и опуская стрелки над векторами (все они коллинеарны друг другу), будем иметь

$$E' + E'' = E_{\text{вне}} = 4\pi\sigma, \quad E' - E'' = E_{\text{внутри}} = 0,$$

откуда

$$E'' = 2\pi\sigma = \frac{1}{2}E_{\text{вне}} = \frac{1}{2}E.$$

Поэтому элемент поверхностной силы оказывается равным

$$dF = dq E'' = \sigma dS 2\pi\sigma = 2\pi\sigma^2 dS,$$

и в итоге для плотности силы получаем

$$f = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma E = \frac{E^2}{8\pi},$$

или

$$\vec{f} = W \vec{n}. \quad (53.38)$$

¹⁾ Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. - М. Просвещение, 1986.

Здесь W – плотность энергии электростатического поля вблизи проводника, а \vec{n} – единичный вектор нормали к его поверхности. Другой вывод формулы (53.38) приводится в дополнении к данному параграфу.

III. Проводники в диэлектрике

Пусть теперь все пространство между проводниками заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической постоянной ε . Тогда электростатическое поле во внешней области будет подчиняться уравнениям (52.1), или

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (53.39)$$

и граничным условиям, которые получаются комбинированием (52.5) и (53.8)–(53.9):

$$D_n|_{\Sigma_i} = 4\pi\sigma_i, \quad E_\tau|_{\Sigma_i} = 0. \quad (53.40)$$

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона (52.15)

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (53.41)$$

которое следует дополнить одним из наборов граничных условий

$$\varphi|_{\Sigma_i} = \varphi_i; \quad -\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint_{\Sigma_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = q_i \quad (53.42)$$

и, может быть, естественным граничным условием (52.11).

Согласно (47.24), плотность энергии электростатического поля в диэлектрике задается формулой

$$W = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{8\pi}. \quad (53.43)$$

При вычислении полной энергии системы проводников с зарядами q_i и потенциалами φ_i , погруженных в диэлектрик, достаточно воспроизвести выкладки из п. II, заменив величину \vec{E} на \vec{D} и соотношение $E_n = 4\pi\sigma$ на $D_n = 4\pi\sigma$. В итоге получим выражение, по форме идентичное (53.26):

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i. \quad (53.44)$$

Возникает естественный вопрос, изменяется ли энергия системы проводников при заполнении пространства между ними диэлектриком, и если изменяется, то как – увеличивается или уменьшается. Ответ зависит от дополнительных условий, наложенных на проводники. Здесь возможны два крайних случая (а также смешанные), отвечающих двум разным постановкам граничной задачи: (а) все проводники изолированы, и потому их заряды

q_i фиксированы; (б) проводники заземлены или подключены к источникам постоянного напряжения, так что фиксированы их потенциалы φ_i .

Как мы видели в §52, при заданных зарядах $q_i = q_i^{вак}$ поле в однородном диэлектрике ослабляется в ε раз, т.е. $\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \varphi_i^{вак}$, а значит, $\varphi_i = \frac{1}{\varepsilon} \varphi_i^{вак}$. Наоборот, чтобы поле в диэлектрике оставалось неизменным, т.е. $\varphi_i = \varphi_i^{вак}$, нужно все заряды увеличить в ε раз: $q_i = \varepsilon q_i^{вак}$. Подставляя соответствующие значения q_i и φ_i в формулу (53.44), получим, что в первом случае

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \sum_i q_i^{вак} \varphi_i^{вак} = \frac{1}{\varepsilon} U^{вак}, \quad (53.45)$$

а во втором случае

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \varepsilon \frac{1}{2} \sum_i q_i^{вак} \varphi_i^{вак} = \varepsilon U^{вак}. \quad (53.46)$$

Таким образом, при фиксированных зарядах системы проводников ее энергия *уменьшается* в ε раз в диэлектрике по сравнению с вакуумом. Это связано с тем, что часть исходной энергии поля затрачивается на поляризацию диэлектрика. При фиксированных же потенциалах энергия *увеличивается* в ε раз. Ее прирост происходит за счет работы источников постоянного напряжения, которые для поддержания потенциалов проводников постоянными сообщают им дополнительные заряды $(\varepsilon - 1)q_i^{вак}$.

Дополнения к §53*

1. Выше неоднократно использовались теоремы единственности, упомянутые на с.249. Они формулируются следующим образом. Если функция $\varphi(\vec{r})$ подчиняется уравнению Пуассона (53.11) и граничным условиям (53.18) или (53.17), а также естественному граничному условию (53.15), то эта функция единственна.

Допустим, что имеются две разные функции φ' и φ'' такого типа. Их разность $\tilde{\varphi} = \varphi' - \varphi''$ будет удовлетворять уравнению Лапласа (53.12) с нулевыми граничными условиями

$$\tilde{\varphi}|_{S_i} = \tilde{\varphi}_i = 0, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} dS = \tilde{q}_i = 0 \quad (53.47)$$

и естественному граничному условию (53.15). Энергия поля с потенциалом $\tilde{\varphi}$, вычисляемая по формуле (53.26), равна нулю в силу или первого набора условий (53.47), или их второго набора. С другой стороны, эта же энергия может быть выражена в виде интеграла от неотрицательной величины $\tilde{E}^2/8\pi$. Поскольку данный интеграл равен нулю, то $\tilde{E} = 0$, а значит, $\tilde{\varphi} = const$. Из естественного граничного условия для $\tilde{\varphi}$ следует, что эта константа равна нулю, чем и доказываются теоремы единственности.

2. Решим задачу, аналогичную той, которая рассматривалась в дополнении к §52. Пусть в вакууме имеется однородное поле \vec{E}_0 , и в него помещается нейтральный проводящий шар радиуса R . Требуется найти поле внутри и вне шара. Внутри шара, как мы знаем, $\vec{E} = 0$, а значит,

$$\varphi|_{r \leq R} = \text{const} \equiv C, \quad (53.48)$$

где C – неизвестная пока постоянная. Вне шара, т.е. при $r > R$, задача для определения потенциала φ ставится в сферических координатах следующим образом: нужно найти решение уравнения Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$, удовлетворяющее граничным условиям

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta, \quad \varphi|_{r=R} = C, \quad \oint_{S_R} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = 0. \quad (53.49)$$

Общее решение уравнения Лапласа при наличии аксиальной симметрии задается формулой вида (52.46):

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (53.50)$$

Из первого граничного условия (53.49) следует, что $a_1 = -E_0$, $a_n = 0$ при $n \neq 1$; второе граничное условие дает $b_1 = E_0 R^3$, $b_0 = CR$, $b_n = 0$ при $n \neq 0, 1$; из последнего граничного условия получаем $b_0 = 0$, а значит, и $C = 0$. Подставляя найденные значения коэффициентов в формулы (53.48) и (53.49), будем иметь

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ -(\vec{E}_0, \vec{r}) + \frac{(\vec{d}, \vec{r})}{r^3}, & r > R \end{cases}, \quad (53.51)$$

где

$$\vec{d} = R^3 \vec{E}_0. \quad (53.52)$$

Для поверхностной плотности индуцированных зарядов находим

$$\sigma(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{3E_0}{4\pi} \cos \theta. \quad (53.53)$$

Проинтегрировав эту величину по поверхности сферы, для полного заряда получим $q = 0$, в полном соответствии с условием нейтральности шара.

Интересно отметить, что к формулам (53.50)–(53.53) можно прийти, совершая в формулах (52.53)–(52.56) и (52.58) предельный переход $\varepsilon \rightarrow \infty$. Это говорит о том, что в целом ряде случаев проводник формально может рассматриваться как диэлектрик с бесконечным значением диэлектрической постоянной. К данной проблеме мы вернемся в конце главы.

3. Выше получена формула (53.37) для энергии конденсатора:

$$u = \frac{q^2}{2C}. \quad (53.54)$$

Эту энергию можно записать и по-другому, если воспользоваться последним выражением (53.34) и учесть соотношения (53.35):

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 (C^{-1})_{ij} q_i q_j = \frac{q^2}{2} [(C^{-1})_{11} - 2(C^{-1})_{12} + (C^{-1})_{22}]. \quad (53.55)$$

Здесь принято во внимание, что матрица C симметрична, а значит, симметрична и обратная ей матрица C^{-1} . Сравнивая (53.54) с (53.55), найдем

$$\frac{1}{C} = (C^{-1})_{11} - 2(C^{-1})_{12} + (C^{-1})_{22}. \quad (53.56)$$

Числа $(C^{-1})_{ij}$ можно выразить через C_{ij} с помощью общих формул линейной алгебры. Но в рассматриваемом «двумерном» случае более простым оказывается следующий способ. Распишем соотношения (53.31) при $i, j = 1, 2$ и разрешим их относительно φ_i . Тогда коэффициенты у φ_i при q_j и будут искомыми числами $(C^{-1})_{ij}$. Прodelывая соответствующие выкладки и подставляя найденные элементы матрицы C^{-1} в (53.56), мы выразим емкость конденсатора C через емкостные коэффициенты C_{ij} составляющих его проводников:

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}. \quad (53.57)$$

Своеобразная ситуация возникает в случае, например, плоского конденсатора. Емкости самих его пластин (числа C_{ij}) здесь не определены, но, тем не менее, их взаимная емкость (емкость конденсатора C) все же имеет смысл.

4. Получим формулу (53.38) для плотности поверхностной силы, используя понятие максвеллова тензора натяжений T_{ij} , который вводится определением (12.21). Направляя ось z вдоль внешней нормали к поверхности проводника и учитывая, что вблизи нее $\vec{E} \{0, 0, E\}$ (а также $\vec{B} = 0$), найдем из (12.25) отличные от нуля компоненты тензора T_{ij} :

$$T_{xx} = W, \quad T_{yy} = W, \quad T_{zz} = -W. \quad (53.58)$$

Согласно (12.27), компоненты f_i плотности поверхностной силы вычисляются как

$$f_i = T_{ij} \tilde{n}_j, \quad (53.59)$$

где \tilde{n} – единичный вектор *внутренней* нормали: $\tilde{n} = \{0, 0, -1\}$. Из (53.59) и (53.58) имеем

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_z = W. \quad (53.60)$$

В итоге вновь приходим к формуле (53.38) $\vec{f} = W \vec{n}$, где \vec{n} – единичный вектор *внешней* нормали к поверхности проводника в рассматриваемой точке.

§54. Постоянный ток в металлах

Перейдем к рассмотрению *стационарного* движения свободных зарядов в проводниках, не интересуясь пока порождаемым им магнитным полем. При этом будет подразумеваться, что проводники являются металлическими (носители тока – электроны), хотя многие из формулируемых ниже результатов справедливы и для проводников иной природы.

Полагая в уравнениях Максвелла (47.10) или (48.10) производные по времени равными нулю, увидим, прежде всего, что в стационарном случае

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (54.1)$$

т.е. электрическое поле потенциально:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (54.2)$$

Уравнение же $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$, как уже подчеркивалось, для проводников не имеет особого физического смысла. Не приносит пользы и усредненное уравнение $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\langle\rho\rangle$, которое применялось в электростатике проводников. В рассматриваемом случае не известны ни \vec{E} , ни $\langle\rho\rangle$, причем между этими величинами не существует соотношения типа материальных уравнений.

Вспомним, однако, закон сохранения электрического заряда – уравнение непрерывности (2.19), которое для стационарных процессов имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (54.3)$$

Соотношения (54.1) и (54.3) и есть те основные уравнения, которые используются при анализе протекания стационарного тока в проводниках.

К ним нужно добавить граничные условия на поверхностях, разделяющих проводники разной природы. Чтобы получить их, достаточно представить исходные уравнения в интегральной форме

$$\oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = 0, \quad \oint_s (\vec{j}, d\vec{S}) = 0 \quad (54.4)$$

и применить к (54.4) стандартную процедуру, описанную в §19. В результате придем к следующим граничным условиям:

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}, \quad j_{n_1} = j_{n_2}. \quad (54.5)$$

На границе раздела проводник–вакуум (или диэлектрик) имеем, очевидно,

$$j_n = 0. \quad (54.6)$$

Иными словами, проводник в вакууме выступает в качестве одной из трубок тока (это понятие введено в §2).

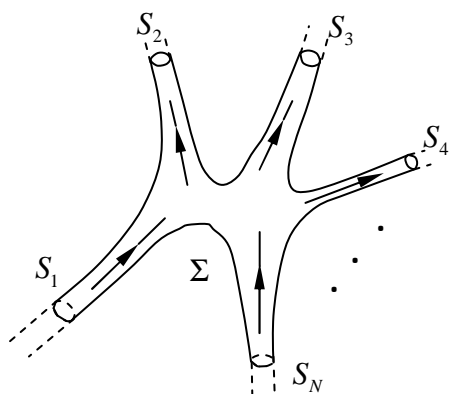
Как было показано в §2, из уравнения (54.3) и условия (54.6) следует, что сила тока J , протекающего через любое *полное* сечение проводника, всюду одинакова:

$$J = const. \quad (54.7)$$

Применительно к узлам, в которых проводник разветвляется, данное соотношение приводит к известному из общей физики *первому правилу Кирхгофа*

$$\sum_a J_a = 0 \quad (54.8)$$

с соответствующим соглашением о знаках токов. Более непосредственно оно получается из второго уравнения (54.4) при выборе в качестве S полной поверхности интегрирования, указанной на рисунке:



$$0 = \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \sum_a \int_{S_a} (\vec{j}, d\vec{S}) + \int_{\Sigma} j_n dS = \sum_a J_a + 0.$$

На последнем этапе здесь учтены определение силы тока (2.7) и граничное условие (54.6).

Заметим теперь, что сами по себе исходные уравнения (54.1) и (54.3) для постоянного тока еще не образуют замкнутую систему, ибо этих уравнений

всего четыре, а неизвестных шесть. Необходимо добавить какое-то материальное уравнение, устанавливающее связь между плотностью тока \vec{j} и полем \vec{E} . Электрический ток обусловлен движением заряженных частиц, которое в принципе должно определяться путем совместного решения уравнений (48.1) и (48.2). В них входят как электрическое поле, так и магнитное [наличие \vec{F}_a^{ext} в уравнениях движения (48.2) пока (!) не учитываем], и в общей ситуации

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{B}). \quad (54.9)$$

При этом данная связь может быть не только алгебраической, но и интегральной [сравн. с обсуждением формулы (50.17)]. Мы не рассматриваем возможную зависимость \vec{j} от \vec{B} , считая тем самым проводящую среду неподвижной и пренебрегая так называемым эффектом Холла¹⁾, и записываем $\vec{j} = \vec{j}(\vec{E})$. Дальнейшие предположения аналогичны тем, которые делались в §50 и §51 при обсуждении материальных уравнений $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ и $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$: поле не слишком сильное и изменяется не очень резко, а проводник является изотропным²⁾. Принимая их, придем к *закону Ома* в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (54.10)$$

¹⁾ См., например: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, 2-е изд. - М.: Наука, 1982. - §22.

²⁾ Равенство нулю остаточного тока (сверхпроводники не рассматриваем) в формуле, подобной (50.18), специально оговаривать не надо, ибо оно может быть доказано на основе термодинамических соображений (см. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, 2-е изд. - М.: Наука, 1982. - §21).

Коэффициент γ , вообще говоря, зависящий от \vec{r} (неоднородные проводники), называется удельной проводимостью, в теоретической физике – обычно просто *проводимостью*. Закон Ома не относится к числу фундаментальных физических законов, хотя и обладает весьма широкой областью применимости.

Из граничных условий (54.5) находим с учетом закона Ома (54.10) для плотности тока

$$\frac{1}{\gamma_1} j_{\tau_1} = \frac{1}{\gamma_2} j_{\tau_2}, \quad j_{n_1} = j_{n_2} \quad (54.11)$$

и для электрического поля

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}, \quad \gamma_1 E_{n_1} = \gamma_2 E_{n_2}. \quad (54.12)$$

Таким образом, линии тока и силовые линии электрического поля на границе раздела разных проводников претерпевают преломление.

Если проводник однородный, то внутри него объемный заряд отсутствует. Действительно, при $\gamma = const$ из $div \vec{j} = 0$ и $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ вытекает $div \vec{E} = 0$, а значит, согласно уравнению $div \vec{E} = 4\pi \langle \rho \rangle$,

$$\langle \rho \rangle_{пров} = 0 \quad (54.13)$$

[сравн. с (53.4)]. Далее, при подходе к границе раздела проводник–вакуум со стороны проводника, где $\gamma \neq 0$, из (54.6) и (54.10) будем иметь

$$E_n^{пров} = 0. \quad (54.14)$$

Отсюда видно, что силовые линии электрического поля внутри проводника всюду касательны к его поверхности.

Рассмотрим теперь электрическое поле вне проводника, т.е. в вакууме (или диэлектрике). Если даже проводник в целом электрически нейтрален, в одних местах его поверхности могут накапливаться положительные заряды, в других – отрицательные. Их поверхностная плотность $\sigma(\vec{r})$ будет отличаться от нуля, причем такая ситуация является как раз самой типичной. При подходе к границе раздела проводник–вакуум со стороны вакуума, где выполняется уравнение $div \vec{E} = 4\pi \rho$, будет иметь место такое же равенство, как в электростатике [формула (53.8)]:

$$E_n^{вак} = 4\pi\sigma \quad (54.15)$$

(условие $j_n = 0$ выполняется за счет того, что для вакуума $\gamma = 0$). В электростатике силовые линии электрического поля всегда перпендикулярны поверхности проводника, так как там $E_\tau = 0$ [формула (53.9)]. При наличии же постоянного тока вектор \vec{E} вблизи поверхности проводника имеет не только нормальный компонент (54.15), но и тангенциальный компонент. Согласно первому условию (54.5), закону Ома (54.10) и условию (54.6), он равен

$$E_\tau^{вак} = E_\tau^{пров} = \frac{j_\tau}{\gamma} = \frac{j}{\gamma} \Big|_\Sigma. \quad (54.16)$$

Таким образом, силовые линии электрического поля вне проводника составляют с его поверхностью некоторый угол α , отличный от $\pi/2$, причем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\gamma 4\pi\sigma}{j|_{\Sigma}}. \quad (54.17)$$

Обсудим теперь энергетический баланс в проводнике, по которому протекает постоянный ток. Работа, производимая электрическим полем над зарядами в единицу времени в единичном объеме, задается формулой (4.11)

$$p = (\vec{j}, \vec{E}), \quad (54.18)$$

которую с учетом закона Ома (54.10) можно переписать как

$$p = \gamma \vec{E}^2 = \frac{1}{\gamma} \vec{j}^2. \quad (54.19)$$

Данная величина всегда неотрицательна и отличается от нуля при наличии тока. Поскольку ток считается постоянным, рассматриваемая работа может превратиться только в теплоту, которая выделяется в проводнике. В итоге приходим к закону *Джоуля–Ленца* в дифференциальной форме

$$q = (\vec{j}, \vec{E}) = \gamma \vec{E}^2 = \frac{1}{\gamma} \vec{j}^2, \quad (54.20)$$

где q – удельное тепловыделение в единицу времени.

Полную тепловую мощность Q получим, интегрируя q по всему объему проводника:

$$Q = \int_V (\vec{j}, \vec{E}) dV = \int_V \gamma \vec{E}^2 dV = \int_V \frac{1}{\gamma} \vec{j}^2 dV. \quad (54.21)$$

Преобразуем первое выражение, используя потенциальность поля ($\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$), соленоидальность тока ($\operatorname{div} \vec{j} = 0$) и формулы векторного анализа:

$$Q = \int_V (\vec{j}, \vec{E}) dV = - \int_V (\vec{j}, \operatorname{grad} \varphi) dV = - \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{j}) dV + \int_V \varphi \operatorname{div} \vec{j} dV = - \oint_S \varphi (\vec{j}, d\vec{S}) + 0 = - \oint_S \varphi j_n dS.$$

Но на поверхности проводника всюду $j_n = 0$ [формула (54.6)]. Поэтому $Q = 0$, а значит,

соответственно второму и третьему выражениям (54.21) для Q , внутри проводника $\vec{E} = 0$ и

$\vec{j} = 0$. В итоге «доказано», что ни в каком проводнике стационарных токов существовать не

может.

С формальной точки зрения этот парадоксальный результат не является столь уж неожиданным. Он полностью согласуется с уравнением (54.1), свидетельствующим о потенциальности стационарного электрического поля. Работа такого поля по перемещению заряда вдоль замкнутого контура, которая, как считалось выше, только и может превращаться в теплоту, всегда равна нулю (сравн. с §6, п.3). Таким образом, исходные уравнения (54.1), (54.3) и (54.10) для постоянного тока неприменимы к проводнику *в целом*, а могут выполняться только на отдельных его участках.

В сказанном можно убедиться и следующим образом. Из физических соображений и из уравнения (54.3) $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ ясно, что линии тока \vec{j} должны быть в конечном проводнике замкнутыми. Но тогда, согласно закону Ома (54.10), замкнутыми будут и силовые линии электрического поля $\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j}$. Циркуляция вектора \vec{E} по контуру, совпадающему с одной из таких силовых линий, отлична от нуля, что противоречит первому уравнению (54.4), эквивалентному (54.1). Допустима лишь тривиальная ситуация, когда $\vec{j} = 0$ и $\vec{E} = 0$.

Аналогичные рассуждения проводятся на качественном уровне и в школьном учебнике физики¹⁾. Они завершаются таким выводом:

«Следовательно, в любой цепи должен быть какой-то источник энергии, поставляющий ее в цепь. В этом источнике, помимо кулоновских сил, обязательно должны действовать другие, не потенциальные силы. Работа этих сил вдоль замкнутого контура должна быть отлична от нуля.»

Такие дополнительные источники энергии называются *источниками тока*. Ими могут служить разнообразные генераторы, гальванические элементы, аккумуляторы, термопары и т.п. В тех участках проводника, где действуют подобные источники, некоторые из сформулированных выше уравнений для постоянного тока перестают быть справедливыми и требуют определенной модификации. Рассмотрение механизмов действия источников тока (кроме явления электромагнитной индукции) выходит за рамки самой электродинамики. Эффективно их наличие в системе проводников можно учесть, вводя наряду с \vec{E} еще и *стороннее поле* $\vec{E}_{\text{стор}} = \vec{F}_{\text{стор}} / q$, отвечающее всем силам $\vec{F}_{\text{стор}}$, которые перемещают заряды вне зависимости от непосредственного действия электрического поля.

Стороннее поле может быть связано с силами \vec{F}_a^{ext} , фигурирующими в уравнениях движения частиц (48.2), и оно считается заданным. По этим причинам $\vec{E}_{\text{стор}}$ не включается в уравнения Максвелла, а значит, уравнения (54.1) и (54.3) сохраняются и в присутствии источников тока. Модификации подлежит лишь материальное уравнение (54.10), ведущее свое происхождение от уравнений движения частиц. Теперь оно заменяется на *обобщенный закон Ома* в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (54.22)$$

На тех участках проводника, где источники тока не действуют ($\vec{E}_{\text{стор}} = 0$), остается справедливым обычный закон Ома (54.10).

Соответствующей модификации подвергается и закон Джоуля–Ленца:

$$q = (\vec{j}, \vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})^2 = \frac{1}{\gamma} \vec{j}^2. \quad (54.23)$$

¹⁾ Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, 1986. – § 64.

Полная тепловая мощность Q находится интегрированием q по всему объему проводника. Учитывая, что интеграл от (\vec{j}, \vec{E}) равен нулю (см. выше), получим

$$Q = \int_V (\vec{j}, \vec{E}_{\text{стор}}) dV. \quad (54.24)$$

Таким образом, теплота в замкнутой цепи проводников с постоянным током выделяется только за счет работы источников тока.

Обсудим чуть подробнее обобщенный закон Ома (54.22). Сторонние силы действуют обычно лишь в местах контакта проводников различной природы (металл–металл или металл–электролит), т.е. на очень малых, в пределе бесконечно малых участках цепи толщиной в несколько межатомных расстояний. Поэтому, чтобы интегралы типа (54.24) отличались от нуля, стороннее поле должно быть очень большим, в пределе бесконечно большим. Кроме того, поскольку $Q > 0$, вектор $\vec{E}_{\text{стор}}$ должен иметь то же направление, что и вектор \vec{j} .

Если бы на рассматриваемом участке цепи действовало только стороннее поле, то оно порождало бы в нем очень сильный ток $\vec{j} = \gamma \vec{E}_{\text{стор}}$, резко отличающийся от тока $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ на соседних участках, что противоречит закону сохранения электрического заряда – уравнению непрерывности (54.3). Поэтому в тех местах, где существует $\vec{E}_{\text{стор}}$, должно существовать и очень большое, но направленное в противоположную сторону «обычное» электрическое поле \vec{E} :

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j} - \vec{E}_{\text{стор}}. \quad (54.25)$$

Оно направлено против тока \vec{j} (!) и против электрического поля \vec{E} на соседних участках проводника, где $\vec{E}_{\text{стор}} = 0$. Отсюда видно, в частности, что замкнутых силовых линий электрического поля существовать не может, и противоречий типа описанного на с.263 в действительности никогда не возникает.

С практической точки зрения особый интерес представляют *линейные* проводники, поперечные размеры которых гораздо меньше продольных. Это понятие было введено в §2, и оно широко использовалось в гл.V. Напомним, что переход от объемного распределения токов к линейным проводникам осуществляется путем подстановки

$$\vec{j}dV \rightarrow Jd\vec{l} \quad (54.26)$$

с последующим вынесением постоянной силы тока J за знак интеграла. Заметим, кроме того, что так как на поверхности любого проводника $j_n = 0$, то вектор тока \vec{j} можно считать коллинеарным элементу длины $d\vec{l}$ линейного проводника и вектору $d\vec{S}$ элемента площади поперечного сечения этого проводника:

$$(\vec{j}, d\vec{l}) = jdl, \quad (\vec{j}, d\vec{S}) = jdS. \quad (54.27)$$

Учитывая, наконец, что во всех точках данного поперечного сечения линейного проводника плотность тока практически одинакова, найдем для силы тока

$$J = \int_{\Delta S} (\vec{j}, d\vec{S}) = \int_{\Delta S} j dS = j \Delta S, \quad (54.28)$$

где ΔS – площадь поперечного сечения.

После этих подготовительных замечаний мы без труда получим все основные соотношения для постоянного тока, известные из школьного и общего курсов физики. Поделим обе части обобщенного закона Ома (54.22) на γ и выполним интегрирование по участку 1–2 линейного проводника:

$$\int_1^2 \frac{1}{\gamma} (\vec{j}, d\vec{l}) = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_1^2 (\vec{E}_{\text{смор}}, d\vec{l}). \quad (54.29)$$

Интеграл слева перепишем следующим образом:

$$\int_1^2 \frac{1}{\gamma} (\vec{j}, d\vec{l}) = \int_1^2 \frac{1}{\gamma} j dl = \int_1^2 \frac{1}{\gamma} \frac{j \Delta S dl}{\Delta S} = J \int_1^2 \frac{1}{\gamma} \frac{dl}{\Delta S} \equiv J \int \rho \frac{dl}{\Delta S} \equiv JR_{12}.$$

Величина

$$R_{12} = \int_1^2 \frac{\rho dl}{\Delta S} \quad (54.30)$$

есть *сопротивление* участка проводника, $\rho \equiv 1/\gamma$ – удельное сопротивление. Если проводник однороден по материалу ($\rho = \text{const}$) и толщине ($\Delta S = \text{const}$), то придем к школьной формуле

$$R = \frac{\rho l}{\Delta S}. \quad (54.31)$$

Согласно (20.9), первый интеграл в правой части (54.29) равен разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, или напряжению V_{12} на концах проводника:

$$\int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) = \varphi_1 - \varphi_2 \equiv V_{12} \quad (54.32)$$

Последний интеграл в (54.29) характеризует действие источников тока на участке 1–2 и называется *электродвижущей силой* (ЭДС) \mathcal{E}_{12} на этом участке:

$$\int_1^2 (\vec{E}_{\text{смор}}, d\vec{l}) \equiv \mathcal{E}_{12}. \quad (54.33)$$

В итоге из (54.22) приходим к закону Ома в *интегральной* форме для участка цепи, на котором действуют источники тока:

$$JR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12} \equiv V_{12} + \mathcal{E}_{12}. \quad (54.34)$$

Отсюда вытекает самый обычный закон Ома

$$J = \frac{V}{R} \quad (54.35)$$

для участка проводника без источников тока ($\mathcal{E}_{12} = 0$), а также закон Ома для замкнутой цепи ($\varphi_2 - \varphi_1$) без разветвлений ($J = const$):

$$J = \frac{\mathcal{E}}{R_{полн}} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (54.36)$$

Здесь \mathcal{E} – ЭДС источника тока, т.е. его работа по перемещению единичного заряда вдоль замкнутого контура [см. определение (6.15)]:

$$\mathcal{E} = \oint_l (\vec{E}_{сноп}, d\vec{l}), \quad (54.37)$$

а $R_{полн}$ – полное сопротивление цепи, включающее сопротивление R ее внешней части и внутреннее сопротивление r источника тока. Рассмотрим, наконец, произвольный замкнутый контур в сложной цепи, содержащей разветвления. Для каждого звена этого контура справедлив общий закон Ома (54.34), который теперь перепишем как

$$J_k (R_k + r_k) = (\varphi_1^k - \varphi_2^k) + \mathcal{E}_k, \quad (54.38)$$

где k – номер звена, а $R_k + r_k$ – его полное сопротивление. Суммируя равенства (54.38) по всем звеньям контура и учитывая, что при его обходе потенциал φ возвращается к своему исходному значению, получим *второе правило Кирхгофа*

$$\sum_k J_k (R_k + r_k) = \sum_k \mathcal{E}_k \quad (54.39)$$

с надлежащими правилами знаков для токов и ЭДС.

Найдем теплоту Q_{12} , которая выделяется в единицу времени на участке 1–2 линейного проводника. Проинтегрируем для этого первое выражение (54.23) для q по объему W_{12} данного участка и перейдем к линейным интегралам с помощью подстановки (54.26):

$$Q_{12} = \int_{W_{12}} q dW = \int_{W_{12}} (\vec{j}, \vec{E}) dW + \int_{W_{12}} (\vec{j}, \vec{E}_{сноп}) dW = J \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) + J \int_1^2 (\vec{E}_{сноп}, d\vec{l}).$$

Принимая во внимание формулы (54.32) и (54.33), будем иметь

$$Q_{12} = J (V_{12} + \mathcal{E}_{12}),$$

или, при учете закона Ома (54.34),

$$Q_{12} = J(V_{12} + \mathcal{E}_{12}) = \frac{(V_{12} + \mathcal{E}_{12})^2}{R_{12}} = J^2 R_{12}. \quad (54.40)$$

Для участка проводника без источников тока

$$Q = JV = \frac{V^2}{R} = J^2 R, \quad (54.41)$$

а для замкнутой цепи без разветвлений

$$Q = J\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r} = J^2 (R+r). \quad (54.42)$$

Во всех случаях справедлив закон Джоуля–Ленца в *интегральной* форме

$$Q = J^2 R_{\text{полн}}. \quad (54.43)$$

В заключение данного параграфа обратимся еще раз к физически важному и методически весьма сложному понятию источника тока. Выше его действие в системе проводников описывалось двумя разными способами: через посредство стороннего поля $\vec{E}_{\text{стор}}$ и через посредство электродвижущей силы (ЭДС) \mathcal{E} . Первая характеристика источника тока является локальной (дифференциальной), вторая – глобальной (интегральной). Каждая из них имеет как определенные достоинства, так и некоторые недостатки.

Понятие стороннего поля весьма наглядно. Его введением четко указывается, что при наличии источников постоянного тока уравнения Максвелла сохраняют свою силу, а модификации подвергается лишь материальное уравнение – закон Ома в дифференциальной форме. В то же время данное понятие является довольно формальным. Стороннее поле, возникающее в местах контакта различных проводников, очень велико по модулю и в пределе выражается через δ -функцию. Измерить его сколько-нибудь разумным способом непосредственно на опыте не представляется возможным. Мало того, истинный физический смысл величины $\vec{E}_{\text{стор}}$ не вполне ясен, ибо на самом деле никаких «сторонних сил» в природе не существует. Они вводятся просто для эффективного описания разделения электрических зарядов в контактах, в действительности осуществляемого, скажем, за счет химических процессов, которые в конечном итоге управляются все теми же электромагнитными взаимодействиями, только на микроскопическом уровне.

Видимо, именно по этим причинам понятие стороннего поля вообще не фигурирует в ставшем уже классическим курсе теоретической физики Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица¹⁾. Здесь при анализе контактных явлений предпочтение отдается интегральным характеристикам – электродвижущим силам (вместо $\vec{E}_{\text{стор}}$) и скачкам потенциала (вместо поля \vec{E}). Эти величины имеют прозрачный смысл и допускают простые способы экспериментального измерения. Так, ЭДС \mathcal{E} источника постоянного тока есть та энергия, которая сообщается единичному заряду при его перемещении по контуру проводника и которая, в конечном счете, превращается в теплоту. Измеряется же ЭДС с помощью, например, электростатического вольтметра – как напряжение на полюсах разомкнутого источника тока [покажите это самостоятельно, пользуясь законом Ома (54.36) для замкнутой цепи].

¹⁾ Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, 2-е изд. – М.: Наука, 1982.

Однако при таком подходе теряются все преимущества, связанные с введением величины $\vec{E}_{стор}$, в том числе наглядность. Остается завуалированным и ответ на вопрос, какие же из основных уравнений электродинамики следует модифицировать при наличии источников постоянного тока. По этим причинам мы в качестве исходного выбрали все-таки понятие стороннего поля, а ЭДС ввели определением (54.37) как вторичную величину.

§55. Постоянное магнитное поле в веществе

Уравнения магнитостатики, которые описывают постоянное магнитное поле в веществе, создаваемое заданными стационарными токами $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$, получим из общей системы уравнений Максвелла (47.10), полагая производные по времени равными нулю:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{div } \vec{B} = 0. \quad (55.1)$$

Здесь \vec{B} – макроскопическое магнитное поле, а \vec{H} вводится определением

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}, \quad (55.2)$$

где \vec{M} – намагниченность, смысл и свойства которой обсуждались в §51. К уравнениям (55.1) нужно добавить материальное уравнение $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ [или $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$], которое в простейшем случае записывается как

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (55.3)$$

[или $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$]. Кроме того, их следует дополнить граничными условиями (46.16)

$$H_{\tau_1} = H_{\tau_2}, \quad B_{n_1} = B_{n_2}, \quad (55.4)$$

которые с учетом (55.3) записываются как

$$\frac{1}{\mu_1} B_{\tau_1} = \frac{1}{\mu_2} B_{\tau_2}, \quad B_{n_1} = B_{n_2}; \quad H_{\tau_1} = H_{\tau_2}, \quad \mu_1 H_{n_1} = \mu_2 H_{n_2} \quad (55.5)$$

(считается, что поверхностные токи проводимости отсутствуют). Если распределение токов финитно, то к (55.5) добавляется также естественное граничное условие типа (19.4):

$$|\vec{B}(\vec{r})| < \frac{A}{r^2} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (55.6)$$

(A – некоторая положительная постоянная).

Из второго уравнения (55.1) явствует, что магнитное поле всегда является соленоидальным, т.е.

$$\exists \vec{A}: \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (55.7)$$

Отсюда и из (55.3) имеем

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (55.8)$$

Подставляя последнее выражение в первое уравнение (55.1), получим дифференциальное уравнение для векторного потенциала

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (55.9)$$

Произвол в определении \vec{A} (см. §10 и §27) позволяет наложить на него дополнительное условие вида (27.8).

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (55.10)$$

которое есть частный случай модифицированного условия Лоренца (47.19), отвечающий стационарным процессам. Если магнетик кусочно-однородный, то в каждой пространственной области, где $\mu_i = \text{const}$ (i – номер области), (55.9) превращается при учете калибровки (55.10) в уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \vec{A}_i = -\frac{4\pi}{c} \mu_i \vec{j}_i \quad (55.11)$$

с граничными условиями, вытекающими из (55.5) и (55.7):

$$\left(\operatorname{rot} \vec{A}_i \right)_n \Big|_{\Sigma_{ij}} = \left(\operatorname{rot} \vec{A}_j \right)_n \Big|_{\Sigma_{ij}}, \quad \frac{1}{\mu_i} \left(\operatorname{rot} \vec{A}_i \right)_\tau \Big|_{\Sigma_{ij}} = \frac{1}{\mu_j} \left(\operatorname{rot} \vec{A}_j \right)_\tau \Big|_{\Sigma_{ij}}. \quad (55.12)$$

При финитном распределении токов обычно требуется также, чтобы

$$\vec{A}(\infty) = 0. \quad (55.13)$$

Соответствующая граничная задача для отыскания векторного потенциала \vec{A} и через его посредство полей \vec{B} и \vec{H} в общей ситуации оказывается очень сложной. Но в некоторых случаях она существенно упрощается.

1. В отсутствие ферромагнетиков можно во всем пространстве с высокой точностью положить $\mu = 1$ (см. §51). Уравнение (55.11) превращается в (27.11), а граничные условия (55.12) – в требование непрерывности функции $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$. В итоге мы приходим к той же задаче, что в вакууме, и для векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r})$, а также для полей $\vec{B}(\vec{r}) \cong \vec{H}(\vec{r})$ будут справедливы все результаты, полученные в §27 [см. формулы (27.13) и (27.16), (27.14) и (27.17)].

Заметим, что имеет место закон полного тока

$$\oint_l (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} J_s, \quad (55.14)$$

представляющий собой первое уравнение (55.1) в интегральной форме. Зачастую он оказывается весьма полезным, причем не только в симметричных случаях (бесконечный прямой провод, бесконечный соленоид и т.п.). Так, если проводник имеет круговое сечение, то ясно, что вблизи него силовыми линиями магнитного поля будут концентрические окружности. Тогда во внешней области в окрестности поверхности проводника из (55.14) получим

$$H_{\Sigma} \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} J,$$

откуда

$$H_{\Sigma} \cong B_{\Sigma} = \frac{2J}{cr}. \quad (55.15)$$

Этот результат нам еще потребуется. Очевидно, что если проводник с круговым сечением является прямым и бесконечным, то формула (55.15) справедлива во всей внешней области.

2. Еще одна простая задача возникает, когда все пространство заполнено однородным проводящим магнетиком: $\mu = const$. В этом случае потенциал всюду подчиняется уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} \quad (55.16)$$

с естественным граничным условием (55.13). Решение данной задачи получается из соответствующих формул, выведенных в §27, простой подстановкой $\vec{j} \mapsto \mu \vec{j}$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu \vec{A}_{\text{вак}}(\vec{r}), \quad (55.17)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \mu \vec{B}_{\text{вак}}(\vec{r}), \quad (55.18)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_{\text{вак}}(\vec{r}), \quad (55.19)$$

где $\vec{A}_{\text{вак}}$ и $\vec{B}_{\text{вак}}$ задаются выражениями (27.13) и (27.16) соответственно. Таким образом, при одном и том же распределении токов $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ поле \vec{B} в однородном магнетике приобретает по сравнению с вакуумом дополнительный множитель μ . В диамагнетиках ($\mu < 1$) и парамагнетиках ($\mu > 1$) оно практически не изменяется, так как для них с высокой точностью $\mu = 1$. Но в ферромагнетиках ($\mu \gg 1$) магнитное поле \vec{B} значительно усиливается. Напомним, что электростатическое поле \vec{E} в однородном диэлектрике всегда ослабляется (см. §52). Что касается поля \vec{H} в однородном магнетике, то, согласно (55.19), оно совпадает с $\vec{B}_{\text{вак}}$ (аналогично тому, как в однородном диэлектрике $\vec{D} = \vec{E}_{\text{вак}}$).

3. Если в однородный ($\mu = const$) непроводящий ($\gamma = 0$) магнетик погружен линейный проводник с током, то в соответствующей задаче граничные условия тоже не ставятся. Выражения для \vec{A} , \vec{B} , \vec{H} получаются в этом случае из формул предыдущего пункта стандартной подстановкой (54.26) $\vec{j} dV \mapsto J d\vec{l}$. По виду они совпадают с (55.17) – (55.19), но с $\vec{A}_{\text{вак}}$ и $\vec{B}_{\text{вак}}$, задаваемыми формулами (27.14) и (27.17).

Согласно (47.24), плотность энергии магнитного поля в веществе равна

$$W = \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{8\pi}. \quad (55.20)$$

Для получения полной энергии достаточно воспроизвести выкладки из §30, заменив там один из сомножителей в \vec{B}^2 на \vec{H} и воспользовавшись на заключительном этапе уравнением (55.1). В итоге придем к выражению, по форме идентичному (30.2)

$$u = \frac{1}{2c} \int_{R^3} (\vec{j}(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r})) dV. \quad (55.21)$$

Из него для диамагнетиков и парамагнетиков с $\mu \cong 1$ вытекают все результаты, найденные в §30, к которому, чтобы не повторяться, мы и отсылаем читателя. Ферромагнетики, для которых нужно учитывать нелинейные и гистерезисные эффекты, здесь не рассматриваются.

Плотность силы \vec{f} , действующей на движущиеся заряды со стороны магнитного поля \vec{B} , равна, согласно (4.6),

$$\vec{f} = \frac{1}{c} [\langle \vec{j}_m \rangle, \vec{B}]. \quad (55.22)$$

Здесь $\langle \vec{j}_m \rangle$ есть среднее значение микроскопической плотности тока, задаваемое формулой (49.10), которая в стационарном случае ($\partial \vec{P} / \partial t = 0$) записывается как

$$\langle \vec{j}_m \rangle = \vec{j} + c \operatorname{rot} \vec{M}. \quad (55.23)$$

В общей ситуации, когда для $\langle \vec{j}_m \rangle$ нужно использовать это выражение, а под \vec{B} следует понимать сумму внешнего магнитного поля и поля, создаваемого самими движущимися зарядами, вычисление плотности силы (55.22) и полной силы

$$\vec{F} = \int_v \vec{f} dV \quad (55.24)$$

представляет собой весьма сложную задачу.

Она существенно упрощается для замкнутого неферромагнитного проводника. В этом случае $\mu \cong 1$ и $\chi_m \cong 0$, а значит, $\vec{M} \cong 0$, так что в $\langle \vec{j}_m \rangle$ остается только первый член, т.е. только ток проводимости. Кроме того, сила, действующая на проводник в целом со стороны его собственного поля, равна нулю, ибо в противном случае он самоускорялся бы в противоречии с законом сохранения импульса. Таким образом, при вычислении полной силы под \vec{B} в (55.22) можно понимать лишь внешнее поле, и в случае неферромагнитного проводника мы приходим для нее к выражению (31.2)

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_v [\vec{j}, \vec{B}] dV, \quad (55.25)$$

со всеми вытекающими отсюда следствиями (см. §31). В описанной ситуации оказываются справедливыми: формула (31.3) для силы, действующей на линейный проводник, и закон Ампера (31.4); формулы (31.6) и (31.7) для силы взаимодействия двух токов, а также закон Био–Савара–Лапласа (31.8); формулы (31.9) и (31.11) для силы и момента сил, действующих на проводник с током со стороны внешнего квазиоднородного магнитного поля, и т.п.

Обратимся еще раз к энергетическому балансу в цепи постоянного тока. Обсудим с этой целью поток энергии в данной цепи, плотность которого совпадает с вектором Пойнтинга (47.25)

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (55.26)$$

Принимая во внимание выражение (54.25) для поля \vec{E} , получим

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi\gamma} [\vec{j}, \vec{H}] - \frac{c}{4\pi} [\vec{E}_{\text{стор}}, \vec{H}]. \quad (55.27)$$

Введем единичный вектор $\vec{\tau}$, направленный по касательной к поверхности проводника вдоль линии тока \vec{j} , единичный вектор \vec{n} внутренней нормали к поверхности и ортогональный им единичный вектор $\vec{t} = [\vec{n}, \vec{\tau}]$, касательный к поверхности. Считая, что проводник является достаточно тонким и имеет круговое сечение радиуса a , запишем

$$\vec{j} = j\vec{\tau}, \quad \vec{H} = H_{\Sigma}\vec{t} = \frac{2J}{ca}\vec{t}, \quad \vec{E}_{\text{стор}} = \vec{E}_{\text{стор}}\vec{\tau}. \quad (55.28)$$

Индекс Σ указывает, что значения всех величин берутся вблизи границы раздела проводник–вакуум (или однородный магнетик) при подходе к ней изнутри проводника. При этом учтено, что $j_{\Sigma} = j$, $E_{\text{стор}}^{\Sigma} = E_{\text{стор}}$, а для H_{Σ} использована формула (55.15), так как, согласно первому граничному условию (55.4), $H_{\Sigma}^{\text{внутри}} = H_{\Sigma}^{\text{вне}}$. Подставляя выражения (55.28) в (55.27), будем иметь

$$\vec{\Pi}_{\Sigma} = \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2, \quad (55.29)$$

где

$$\vec{\Pi}_1 = \frac{c}{4\pi\gamma} [\vec{j}, \vec{H}] = \frac{Jj}{2\pi a\gamma} \vec{n} = \rho \frac{J^2}{2\pi a\Delta S} \vec{n} \quad (55.30)$$

($1/\gamma \equiv \rho$ – удельное сопротивление, $j \Delta S = J$) и

$$\vec{\Pi}_2 = -\frac{c}{4\pi} [\vec{E}_{\text{стор}}, \vec{H}] = -\frac{J}{2\pi a} E_{\text{стор}} \vec{n}. \quad (55.31)$$

В той части цепи, где источники отсутствуют, $\vec{\Pi}_{\Sigma} = \vec{\Pi}_1$. Здесь энергия *втекает* в проводник, и ее полный поток равен

$$S_1 \equiv \int_{\Sigma} (\vec{\Pi}_1, d\vec{S}) = \Pi_1 2\pi aL = J^2 \frac{\rho L}{\Delta S} = J^2 R$$

(L – длина проводника, R – его сопротивление). Он совпадает с теплотой Q , выделяемой в проводнике в единицу времени [формула (54.41)]:

$$S_1 = Q. \quad (55.32)$$

На участке цепи длиной l , где действуют источники тока, с высокой точностью $\vec{\Pi}_\Sigma = \vec{\Pi}_2$. Здесь энергия *вытекает* из цепи, и для ее полного потока имеем

$$S_2 \equiv \int_{\Sigma} (\vec{\Pi}_2, d\vec{S}) = \Pi_2 \cdot 2\pi a l = -J E_{\text{сноп}} l = -J \mathcal{E},$$

т.е. по модулю он также равен Q [формула (54.42)]:

$$S_2 = -Q. \quad (55.33)$$

Итак, мы видим, что энергетический баланс в замкнутом проводнике, по которому протекает постоянный ток, оказывается следующим. Из источников тока исходит поток электромагнитной энергии. Вся эта энергия возвращается в другие участки цепи (где $\mathcal{E} = 0$) и полностью превращается там в теплоту.

§56. Квазистационарное электромагнитное поле

Теперь мы переходим к рассмотрению переменного во времени, т.е. нестационарного электромагнитного поля. В принципе оно описывается системой уравнений Максвелла (47.10). Но применительно к процессам, протекающим в массивных проводниках, смысл уравнения $\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$ не совсем ясен. Здесь нужны какие-то дополнительные предположения и/или приближения. В данном параграфе рассматриваются поля, достаточно медленно меняющиеся во времени. Если говорить конкретнее, то считаются выполненными следующие условия:

(а) период изменения поля гораздо больше времени свободного пробега носителей тока в проводнике;

(б) ток смещения гораздо меньше тока проводимости;

(в) период изменения поля гораздо больше времени собственного запаздывания электромагнитного сигнала в системе проводников.

Расшифруем эти условия, проводя оценки по порядку величины и опуская все численные множители типа 2π . Будут опускаться также стрелки над векторами и знаки модулей.

(а) Согласно первому условию, $T \gg \bar{\tau} = \bar{l}/\bar{v}$ (\bar{l} – средняя длина свободного пробега носителя тока, \bar{v} – его средняя скорость), или

$$\omega \ll \frac{1}{\bar{\tau}} = \frac{\bar{v}}{\bar{l}}. \quad (56.1)$$

Оно позволяет считать (при прочих ограничениях, указанных в §50, §51, §54) справедливыми простейшие материальные уравнения

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (56.2)$$

с независимыми от частоты (статическими) значениями величин ε , μ , γ . Всюду ниже рассматриваются лишь однородные проводники, так что ε , μ , $\gamma = const$.

(б) Второе условие приводит к оценке

$$\frac{4\pi}{c} j = \frac{4\pi}{c} \gamma E \gg \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c} \omega E,$$

где учтен закон Ома и принято, что поле изменяется во времени по гармоническому закону. Данная оценка равнозначна неравенству

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon}. \quad (56.3)$$

Рассматриваемое условие позволяет записывать второе уравнение (47.10) как

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (56.3, a)$$

откуда

$$\text{div } \vec{j} = 0. \quad (56.4)$$

Последнее соотношение можно получить и из уравнения непрерывности (2.19) и первого уравнения (47.10):

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = \text{div} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) \cong \text{div } \vec{j}.$$

Из (56.4) при учете закона Ома (56.2) $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ получим для однородного проводника ($\gamma = const$) уравнение

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad (56.5)$$

заменяющее в рассматриваемой ситуации уравнение $\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho$.

(в) Последнее условие стоит несколько особняком и применяется главным образом при анализе процессов в цепях переменного тока. Оно утверждает, что $T \gg L/c$ (L – характерные размеры цепи), т.е.

$$\omega \ll \frac{c}{L}. \quad (56.6)$$

Более наглядно его можно представить, умножив обе части исходного неравенства на c и учтя, что cT есть длина волны λ :

$$L \ll \lambda. \quad (56.7)$$

Данное условие позволяет пренебрегать всеми эффектами, связанными с конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений. Главное, можно считать, что все величины имеют в разных точках цепи в фиксированный момент времени одну и ту же фазу.

Совокупность требований (а) – (в) называют условиями *квазистационарности* электромагнитного поля. Правда, иногда, особенно в общей физике, говорят о квазистационарных токах, имея в виду только неравенство (56.7) или эквивалентное неравенство (56.6).

Для хороших проводников, т.е. обычных металлов, условие (а) выполняется вплоть до частот, лежащих в инфракрасной области спектра. Для них это условие обычно гарантирует выполнимость и условия (б). Но переменное электромагнитное поле, квазистационарное в металлах, может оказаться существенно нестационарным в полупроводниках (у типичных металлов $\gamma \sim 10^{17} - 10^{18} c^{-1}$, а, например, у чистого германия при комнатной температуре $\gamma \sim 10^{10} c^{-1}$, у кремния – $\gamma \sim 10^6 c^{-1}$) и тем более в диэлектриках ($\gamma < 10^3 c^{-1}$). Что касается условия (в), то оно является наиболее ограничительным. Особенно ясно это видно из неравенства (56.7). Оно же показывает однако, что для промышленного переменного тока ($\nu = 50$ Гц, $\lambda \sim 10^4$ км) данное условие выполняется с большим запасом даже в протяженных линиях электропередачи.

Итак, квазистационарное электромагнитное поле в массивных проводниках описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \gamma \vec{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (56.8)$$

К ней приводят уравнения Максвелла (47.10) при замене первого из них соотношением (56.5), а второго – уравнением (56.3,а). В этом уравнении учтен закон Ома (56.2) и принято, что $\vec{B} = \vec{H}$ (ферромагнитные проводники не рассматриваем, так что с высокой точностью $\mu = 1$).

По сравнению с уже изученными стационарными случаями существенно новым является последнее уравнение (56.8), которое в интегральной форме

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (56.9)$$

представляет собой закон электромагнитной индукции Фарадея в трактовке Максвелла (см. §6, п.3). К собственно фарадеевой его трактовке мы обратимся в конце данного параграфа. За счет электродвижущей силы

$$\mathcal{E} = \oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) \quad (56.10)$$

за время dt совершается элементарная работа по перемещению заряда dq вдоль замкнутого контура, равная

$$dA = dq \cdot \mathcal{E} = Idt \mathcal{E},$$

где $I = dq/dt$ – сила тока. Отсюда для работы в единицу времени, т.е. мощности, имеем

$$\frac{dA}{dt} \equiv \mathcal{P} = I\mathcal{E}, \quad (56.11)$$

в полном соответствии с результатами §54, где рассматривался постоянный ток.

Теперь же обсуждение конкретных явлений в квазистационарном случае мы начнем с краткого обобщающего анализа процессов в цепях переменного тока, который подробно проводится в курсе общей физики¹⁾. Рассмотрим контур из последовательно соединенных резистора (сопротивление R), катушки (индуктивность L) и конденсатора (емкость C), а также с источником переменного тока (ЭДС \mathcal{E}). Действие последнего обычно как раз и основано на явлении электромагнитной индукции. Коль скоро пренебрегается всеми эффектами запаздывания, то здесь можно пользоваться многими результатами, сформулированными в теории постоянного тока (§54), магнитостатике (§55) и даже электростатике проводников (§53).

Работа источника тока в единицу времени, равная $I\mathcal{E}$ [формула. (56.11)] расходуется следующим образом. Часть ее I^2R необратимо превращается в теплоту [формула (54.41)], часть идет на изменение энергии магнитного поля $LI^2/2$ в катушке индуктивности [формула (30.13)¹⁾], часть – на изменение энергии электрического поля $q^2/2C$ в конденсаторе [формула (53.37)]. Поэтому энергетический баланс выглядит следующим образом:

$$I\mathcal{E} = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right). \quad (56.12)$$

Выполняя дифференцирования по времени, учитывая, что $dq/dt = I$ и производя сокращение на общий множитель I , получим

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (56.13)$$

Дифференцируя обе части (56.13) еще раз по времени, придем к основному уравнению для линейной цепи квазистационарного тока

$$L\ddot{I} + RI + \frac{1}{C}I = \dot{\mathcal{E}}. \quad (56.14)$$

Если источники тока отсутствуют ($\mathcal{E} = 0$), а сопротивлением можно пренебречь ($R = 0$), то получим уравнение колебательного контура

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC}I = 0. \quad (56.15)$$

Ток в нем изменяется по гармоническому закону

$$I = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (56.16)$$

с частотой ω_0 , задаваемой формулой Томсона

¹⁾ Чтобы сохранить в данном пункте полную преемственность с курсами школьной и общей физики, здесь мы пользуемся системой единиц СИ, в которой коэффициент $1/C^2$ отсутствует (см. вторую сноску на с.146).

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (56.17)$$

Обращаясь к процессам в реальной цепи ($R \neq 0$) с источником тока, рассмотрим наиболее важный случай гармонически изменяющейся ЭДС

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \alpha) \equiv \hat{\mathcal{E}}_0 e^{i\omega t}, \quad (56.18)$$

где $\hat{\mathcal{E}}_0$ – ее комплексная амплитуда. Как и в §35, подразумевается, что непосредственный смысл имеет вещественная часть последнего выражения, символ Re которой для краткости опускается. Нас интересует установившийся процесс, когда ток меняется тоже по гармоническому закону. Поэтому ищем его в виде

$$I = I_0 \cos(\omega t + \beta) \equiv \hat{I}_0 e^{i\omega t}. \quad (56.19)$$

Подставляя (56.18) и (56.19) в уравнение (56.14) и производя сокращение на общий экспоненциальный множитель $\exp(i\omega t)$, получим

$$\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) \hat{I}_0 = i\omega \hat{\mathcal{E}}_0.$$

Отсюда приходим к *обобщенному закону Ома*

$$Z(\omega) \hat{I}_0 = \hat{\mathcal{E}}_0, \quad (56.20)$$

в котором

$$Z(\omega) = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (56.21)$$

есть комплексное сопротивление, или *импеданс*. Последний удобно представлять в комплексной форме

$$Z(\omega) = |z| e^{i\varphi}, \quad |z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad (56.22)$$

записывая закон Ома как

$$\hat{I}_0 = \frac{1}{|z|} \hat{\mathcal{E}}_0 e^{-i\varphi}. \quad (56.23)$$

Взяв модуль от обеих частей (56.23), придем к соотношению между *амплитудными* значениями тока и ЭДС, подобному обычному закону Ома:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{|z|}. \quad (56.24)$$

В этом смысле модуль импеданса $|z|$ можно называть полным сопротивлением цепи переменного тока. Из (56.23) видно, что его фаза φ задает фазовый сдвиг между током и ЭДС. Индуктивность приводит к отставанию, а емкость – к опережению тока по фазе по сравнению с ЭДС.

Поставим теперь задачу о распределении плотности тока по сечению *массивного* проводника, квазистационарное электромагнитное поле в котором описывается системой уравнений (56.8). При решении этой задачи проще всего найти сначала поле \vec{E} , а затем определить ток с помощью закона Ома $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. С этой целью возьмем ротор от обеих частей последнего уравнения, а затем воспользуемся первым и вторым уравнениями (56.8):

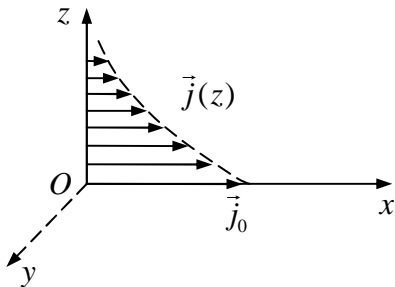
$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\frac{4\pi\gamma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

откуда

$$\nabla^2 \vec{E} = -\frac{4\pi\gamma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0. \quad (56.25)$$

Это уравнение, как и уравнение теплопроводности, относится к параболическому типу. Поэтому можно ожидать, что поле \vec{E} , а вместе с ним ток \vec{j} , затухает вглубь проводника по экспоненциальному закону.

Решение соответствующей реальной задачи для проводника, имеющего, например, цилиндрическую форму, требует привлечения аппарата специальных функций. Вместо нее мы рассмотрим модельную задачу, которая более проста и в то же время отражает все характерные особенности исследуемого явления. Итак, пусть проводник заполняет полупространство $z \geq 0$, и по нему вдоль оси x протекает переменный ток с (не очень высокой) частотой ω : $\vec{j} = \{j, 0, 0\}$. Считаем, что плотность тока от координаты y не зависит. Независимость же ее от координаты x следует из уравнения непрерывности (56.4):



$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, вектор плотности тока j имеет компоненты

$$j_x = \hat{j}(z) e^{i\omega t}, \quad j_y = j_z = 0, \quad (56.26)$$

и задача сводится к отысканию функции $\hat{j}(z)$. Для ее решения найдем электрическое поле \vec{E} , компоненты которого, в силу (56.26) и закона Ома (56.2), равны

$$E_x = \hat{E}(z) e^{i\omega t}, \quad E_y = E_z = 0. \quad (56.27)$$

Подставляя эти выражения в (56.25), приходим к уравнению для $\hat{E}(z)$:

$$\frac{d^2 \hat{E}(z)}{dz^2} - i \frac{4\pi\gamma\omega}{c^2} \hat{E}(z) = 0. \quad (56.28)$$

Его общее решение имеет вид

$$\hat{E}(z) = \hat{A}_1 e^{-kz} + \hat{A}_2 e^{kz}, \quad (56.29)$$

где \hat{A}_1 и \hat{A}_2 – произвольные постоянные, а

$$k = \sqrt{i \frac{4\pi\gamma\omega}{C^2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{C} \sqrt{4\pi\gamma\omega} \equiv \frac{1}{\delta} + i \frac{1}{\delta}.$$

Здесь учтено, что одно из значений \sqrt{i} равно

$$\sqrt{i} = (e^{i\pi/2})^{1/2} = e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, получаем

$$\hat{E}(z) = \hat{A}_1 e^{-z/\delta} e^{-iz/\delta} + \hat{A}_2 e^{z/\delta} e^{iz/\delta}, \quad (56.30)$$

где

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\gamma\omega}}. \quad (56.31)$$

Из требования ограниченности поля при $z \rightarrow \infty$ следует $\hat{A}_2 = 0$, а условие $\hat{E}(0) = \hat{E}_0$ дает $\hat{A}_1 = \hat{E}_0$, так что

$$\hat{E}(z) = \hat{E}_0 e^{-z/\delta} e^{-iz/\delta}. \quad (56.32)$$

Учтя (55.27) и закон Ома (56.2), окончательно найдем

$$j_x(z|t) = \hat{j}_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}, \quad j_y = j_z = 0. \quad (56.33)$$

Итак, электрическое поле \vec{E} (а также магнитное поле \vec{B}) и плотность тока \vec{j} убывают вглубь проводника по экспоненциальному закону. Эффективное их исчезновение (ослабление в e раз) происходит на расстоянии δ от поверхности, задаваемом формулой (56.31). Иными словами, электромагнитное поле и ток оказываются сосредоточенными в приповерхностном слое проводника толщиной δ . Данное явление носит название *скин-эффекта* (от англ. skin – «кожура», «кожица»), а величина δ – толщины скин-слоя, или глубины проникновения¹⁾.

Например, на промышленной частоте $\nu = 50$ Гц для меди имеем $\delta \cong 1$ см, и в тонких проводах скин-эффектом можно пренебречь. Но на частотах $\nu \sim 10^6$ Гц $\cong 1$ МГц для той же меди $\delta \sim 10^{-3}$ см, так что здесь скин-эффект играет существенную роль. За счет него сопротивление проводников резко возрастает. При этом ясно, что на высоких частотах для передачи электромагнитных сигналов можно в целях экономии применять полые кабели. Используют также провода, покрытые тонким слоем дорогого, но высокопроводящего и слабоокисляющегося материала (скажем, серебра или даже золота).

¹⁾ При этом имеется в виду проникновение внешнего (переменного) электромагнитного поля в толщу проводника.

Рассмотрим еще одну задачу, важную как с общефизической, так и с методической точки зрения. Речь идет о явлении электромагнитной индукции, имеющем непосредственное отношение к квазистационарным процессам. До сих пор проводники считались неподвижными, и данное явление трактовалось по Максвеллу (см. §6, п.3): переменное во времени магнитное поле порождает, независимо от наличия проводника как такового, вихревое электрическое поле:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (56.34)$$

Допустим теперь, что имеется реальный проводник, который движется в магнитном поле. Он может и деформироваться, так что скорости разных его участков в данный момент времени, вообще говоря, различны. На заряд в малой области проводника будет действовать сила Лоренца (4.1), а на единичный заряд – сила \vec{F}/q , которую назовем эффективным полем

$$\vec{E}_{\text{эфф}} = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}] \equiv \vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}. \quad (56.35)$$

Оно складывается из обычного электрического поля \vec{E} и стороннего поля $\vec{E}_{\text{стор}}$, обусловленного действием магнитной части силы Лоренца. Именно эффективное поле $\vec{E}_{\text{эфф}}$ определяет ток в проводнике в соответствии с обобщенным законом Ома в дифференциальной форме (54.22).

Полная электродвижущая сила будет равна

$$\mathcal{E} = \oint_L (\vec{E}_{\text{эфф}}, d\vec{l}) = \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) + \frac{1}{c} \oint_L ([\vec{v}, \vec{B}], d\vec{l}) \equiv \mathcal{E}_M + \mathcal{E}_\Phi, \quad (56.36)$$

где интегрирование ведется по контуру проводника¹⁾. Первое слагаемое \mathcal{E}_M является «максвелловым». С помощью уравнения (56.34) выражение для него преобразуется к закону Фарадея (56.9), который теперь записываем как

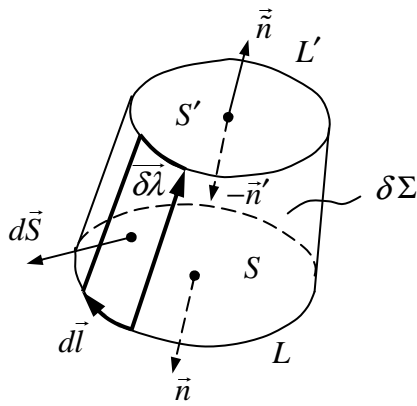
$$\mathcal{E}_M = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\vec{v}=0}. \quad (56.37)$$

Этим подчеркивается, что часть \mathcal{E}_M полной ЭДС (56.36) возникает за счет изменения магнитного потока, связанного с изменением во времени магнитного поля, когда положение контура самого проводника фиксировано.

При анализе слагаемого \mathcal{E}_Φ в (56.36) примем во внимание, что $\vec{v} = \overline{\delta\lambda}/\delta t$, где $\overline{\delta\lambda}$ – смещение участка контура проводника за малое время δt . Тогда будем иметь

$$\mathcal{E}_\Phi = \frac{1}{c} \oint_L ([\vec{v}, \vec{B}], d\vec{l}) = \frac{1}{c} \oint_L ([\overline{\delta\lambda}, \vec{B}], d\vec{l}) = \frac{1}{c} \oint_L ([d\vec{l}, \overline{\delta\lambda}], \vec{B}) = -\frac{1}{c} \oint_{\delta\Sigma} (\vec{B}, d\vec{S}),$$

¹⁾ В формуле (56.36) и ниже под \vec{v} фактически следует понимать скорость участка проводника, т.к. составляющая скорости заряда относительно проводника вдоль его контура не вносит вклада в смешанное произведение во втором интеграле.



где $d\vec{S} = [\delta\vec{\lambda}, d\vec{l}]$ – элемент площади боковой поверхности $\delta\Sigma$ (см. рисунок), L и L' – контуры проводника в моменты времени t и $t + \delta t$, S и S' – натянутые на них поверхности. Поскольку полный магнитный поток через всю замкнутую поверхность равен нулю, то поток через боковую поверхность $\Phi_{\delta\Sigma}$ равен

$$\Phi_{\delta\Sigma} = -(\Phi_S + \Phi_{S'}) = -\Phi_t + \Phi_{t+\delta t}.$$

Здесь нужно внимательно следить за знаками. Величины Φ_S и $\Phi_{S'}$ есть потоки магнитного поля через торцы S и S' с нормальными \vec{n} и \vec{n}' , внешними по отношению к поверхности в целом и потому направленными в разные стороны. Величины $\Phi_t = \Phi_S$ и $\Phi_{t+\delta t} = -\Phi_{S'}$ – это потоки тоже через S и S' , но с сонаправленными нормальными \vec{n} и $-\vec{n}'$ (см. рис.). В итоге имеем

$$\mathcal{E}_\Phi = -\frac{1}{C} \frac{\Phi_{\delta\Sigma}}{\delta t} = -\frac{1}{C} \frac{\Phi_{t+\delta t} - \Phi_t}{\delta t},$$

или

$$\mathcal{E}_\Phi = -\frac{1}{C} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\vec{B}=\text{const}}. \quad (56.38)$$

Такой записью подчеркивается, что часть \mathcal{E}_Φ ЭДС (56.36) является, условно говоря, фарадеевой. Она возникает за счет движения самого проводника в магнитном поле и не связана с изменением последнего во времени.

Складывая выражения (56.37) и (56.38), получим для полной ЭДС, индуцируемой нестационарным магнитным полем в движущемся проводнике,

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{1}{C} \frac{\partial \Phi}{\partial t}}, \quad (56.39)$$

где производная по времени отвечает полному изменению магнитного потока. Это и есть закон Фарадея в его наиболее общем виде. Значение ЭДС индукции находится по единой формуле безотносительно к причине изменения потока – будь то изменение магнитного поля во времени, либо движение, либо деформация проводника.

В стационарном поле действует только вторая причина – «фарадеева». Если проводник движется так, что все точки его контура перемещаются вдоль силовых линий, то магнитный поток через этот контур остается постоянным, и $\mathcal{E} = 0$. Для возникновения ЭДС индукции необходимо, чтобы проводник *пересекал* магнитные силовые линии. Разумеется, что условие не является достаточным. Примером может служить поступательное движение замкнутого жесткого проводника в однородном стационарном магнитном поле. Чтобы в таком проводнике возникала ЭДС индукции, проводник должен вращаться (или деформироваться), на чем и основан общеизвестный принцип действия обычных генераторов тока.

В заключение данного параграфа обсудим довольно тонкий вопрос, который связан с работой силы Лоренца и часто служит источником недоразумений. Обобщенный закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме (54.23) при учете выражения (56.35) для эффективного поля $\vec{E}_{\text{стор}} + \vec{E}$ записывается как

$$q = \frac{1}{\gamma} \vec{j}^2 = \left(\vec{j}, \vec{E} + \frac{1}{C} [\vec{v}, \vec{B}] \right). \quad (56.40)$$

Отсюда видно, что при движении проводника в магнитном поле в единицу времени выделяется дополнительная теплота

$$Q = \frac{1}{C} \int_V (\vec{j}, [\vec{v}, \vec{B}]) dV, \quad (56.41)$$

которая неотрицательна, т.е. $Q \geq 0$, причем $Q > 0$ при $\vec{j} \neq 0$. Эта теплота может выделяться лишь за счет работы магнитной части силы Лоренца (в дальнейшем ради краткости будем говорить просто о силе Лоренца). Таким образом, для мощности этой силы имеем

$$\mathcal{P} = Q > 0 \quad \text{при} \quad \vec{j} \neq 0, \quad (56.42)$$

хотя, как мы знаем, она всегда должна равняться нулю. Возникла проблемная ситуация.

К ней можно подойти и с другой стороны. Плотность полной силы Лоренца задается формулой (4.6). Если положить $\vec{E} = 0$, то для ее магнитной части найдем

$$\vec{f}_M = \frac{1}{C} [\vec{j}, \vec{B}]. \quad (56.43)$$

При движении проводника со скоростью \vec{v} данной силой будет в единицу времени совершаться работа

$$\mathcal{P}' = \frac{1}{C} \int_V (\vec{v}, [\vec{j}, \vec{B}]) dV. \quad (56.44)$$

Она, вообще говоря, тоже отличается от нуля, в противоречии со всеми нашими представлениями о свойствах силы Лоренца.

Для разрешения парадокса достаточно сопоставить выражения (56.41) и (56.43), предварительно разобравшись, что же реально кроется за символами \mathcal{P} и \mathcal{P}' . Ни тот, ни другой не представляет полной мощности силы Лоренца, а отвечает лишь некоторым ее частям. Дело в том, что в (56.41) и (56.44) перемножаются совершенно разнородные величины \vec{v} и \vec{j} . Первая из них характеризует движение проводника как целого, а вторая – движение свободных зарядов относительно этого проводника. В итоге мощность \mathcal{P} отвечает работе электродвижущих сил, индуцированных в проводнике при его движении, а мощность \mathcal{P}' – механической работе, производимой над проводником объемными магнитными силами. И нет ничего удивительного в том, что каждая из них по отдельности отличается от нуля. Действительная трудность возникала бы лишь в том случае, если бы таким свойством обладала полная мощность $\mathcal{P} + \mathcal{P}'$ силы Лоренца. Но, как видно из сравнения формул (56.41) и (56.44), а также из свойств смешанного произведения векторов, $\mathcal{P}' = -\mathcal{P}$, и потому $\mathcal{P} + \mathcal{P}' = 0$.

Высказанные утверждения станут более наглядными, если рассмотреть движение одной из частиц с зарядом q , порождающих ток в проводнике. Для нее следует различать скорость \vec{v} переносного движения вместе с проводником, скорость \vec{u} дрейфового движения частицы относительно проводника и полную скорость $\vec{V} = \vec{v} + \vec{u}$. Для полной мощности силы Лоренца имеем

$$(\vec{V}, \vec{F}_q^M) = \frac{q}{C} (\vec{V}, [\vec{V}, \vec{B}]) = 0.$$

Подставляя сюда выражение $\vec{V} = \vec{v} + \vec{u}$, производя перемножение и отбрасывая равные нулю смешанные произведения векторов с двумя одинаковыми сомножителями, получим тождество

$$\frac{q}{C} (\vec{u}, [\vec{v}, \vec{B}]) + \frac{q}{C} (\vec{v}, [\vec{u}, \vec{B}]) = 0. \quad (56.45)$$

Читателю предлагается самостоятельно осмыслить данный результат, сопоставив отдельные слагаемые в левой части (56.45) с выражениями (56.41) и (56.44). При этом полезно опираться на традиционную схему школьного демонстрационного эксперимента с проводником, скользящим по двум рельсам, которые замкнуты неподвижной перемычкой или источником постоянного напряжения¹⁾.

§57. Электромагнитные волны в идеальном диэлектрике

Рассмотрим теперь случай, в определенном смысле противоположный обсуждавшемуся в предыдущем параграфе. Имеется в виду ситуация, когда можно пренебречь током проводимости по сравнению с током смещения (а не наоборот!). Она свойственна, прежде всего, «идеальным» диэлектрикам, для которых с высокой точностью можно положить $\gamma = 0$, а значит, $\vec{j} = 0$. Считаем, что диэлектрик заполняет все пространство, что он является изотропным и однородным и что сторонние заряды в нем отсутствуют: $\rho = 0$. Пусть к тому же электромагнитное поле таково, что для него справедливы простейшие материальные уравнения $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ и $\vec{B} = \mu \vec{H}$ со статическими значениями ε и μ (в силу однородности $\varepsilon, \mu = const$). При сделанных предположениях приходим из (47.10) к следующей системе уравнений Максвелла для поля в идеальном диэлектрике:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}. \quad (57.1)$$

Взяв ротор от обеих частей последнего уравнения, воспользовавшись формулами векторного анализа и двумя первыми уравнениями (57.1), получим

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\frac{\varepsilon \mu}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

или

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (57.2)$$

¹⁾ Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. – М.: Просвещение, 1986. – §95.

Читателю предлагается показать, что такому же уравнению подчиняется и поле \vec{B} . Мало того, как явствует из (47.20) при $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, подобным уравнениям удовлетворяют также скалярный и векторный потенциалы φ и \vec{A} .

Таким образом, в рассматриваемом случае для каждой из полевых переменных $f = f(\vec{r}|t)$ (компонентов векторов \vec{E} , \vec{B} , \vec{A} и скаляра φ) справедливо *волновое уравнение*

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (57.3)$$

где введено обозначение

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (57.4)$$

Как установлено в §33, уравнение (57.3) допускает решение в виде плоских волн, распространяющихся вдоль оси x :

$$f(x|t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right), \quad (57.5)$$

или, в общей ситуации, – вдоль прямой с направляющим вектором \vec{n} :

$$f(\vec{r}|t) = f_1\left(t - \frac{(\vec{r}, \vec{n})}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{(\vec{r}, \vec{n})}{v}\right). \quad (57.6)$$

В итоге заключаем, что величина v , определяемая формулой (57.4), имеет смысл *скорости* распространения электромагнитных волн в однородном идеальном диэлектрике.

Особый интерес представляют плоские монохроматические волны, для которых все полевые переменные f , в том числе \vec{E} и \vec{B} , изменяются по гармоническому закону:

$$\vec{E} = \hat{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B} = \hat{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \quad (57.7)$$

Здесь ω – циклическая частота, $\vec{k} = k\vec{n}$ – волновой вектор, \hat{E}_0 и \hat{B}_0 – комплексные векторные амплитуды, причем подразумевается, что справа стоит символ вещественной части Re [сравн. с (35.14)].

Для установления свойств этих волн воспользуемся приемом, который применялся в дополнении к §35, и основу которого составляет наблюдение, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = ik_j e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = -i\omega e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad (57.8)$$

($x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$).

Подстановка выражения (57.7) для \vec{E} (или \vec{B}) в волновое уравнение (57.3) дает

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{k}^2 \hat{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \frac{\omega^2}{v^2} \hat{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\right) \vec{E} = 0,$$

откуда $k^2 = \omega^2/v^2$, и мы приходим к связи между частотой и волновым числом, или к закону дисперсии:

$$k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c} \quad \text{или} \quad \omega = vk = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} ck \quad (57.9)$$

[сравн. с (35.5)].

Подставим теперь выражения (57,7) для \vec{E} и \vec{B} последовательно в каждое из уравнений Максвелла (57.1). Из первого уравнения находим

$$\operatorname{div} \vec{E} = i(\vec{k}, \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = i(\vec{k}, \vec{E}) = ik(\vec{n}, \vec{E}) = 0.$$

Аналогичный результат получается для вектора \vec{B} из третьего уравнения (57.1). Таким образом, плоские монохроматические (и любые плоские) электромагнитные волны в однородном идеальном диэлектрике являются, как и в вакууме, поперечными:

$$(\vec{n}, \vec{E}) = 0, \quad (\vec{n}, \vec{B}) = 0. \quad (57.10)$$

[сравн. с (33.17) и (33.18)]. Второе уравнение (57.1) дает

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= i\left[\vec{k}, \hat{B}_0\right] e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = i\left[\vec{k}, \vec{B}\right] = ik\left[\vec{n}, \vec{B}\right] = i\frac{\omega}{v}\left[\vec{n}, \vec{B}\right] = \\ &= \frac{\epsilon\mu}{C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\epsilon\mu \frac{\omega}{C} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = -i\epsilon\mu \frac{\omega}{C} \vec{E} = -i\sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{v} \vec{E}, \end{aligned}$$

где использованы также формулы (57.9). К аналогичному результату приводит и последнее уравнение (57.1). В итоге приходим к связям между векторами \vec{E} и \vec{B} в плоской монохроматической электромагнитной волне

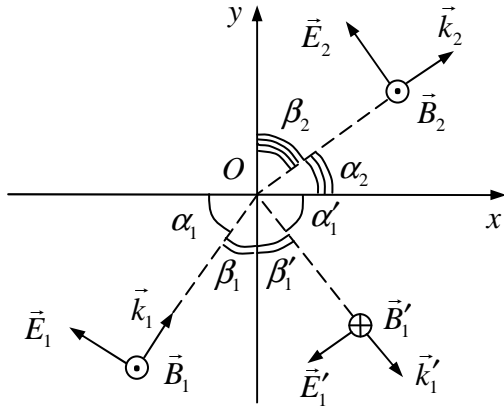
$$\vec{E} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \left[\vec{n}, \vec{B}\right], \quad \vec{B} = \sqrt{\epsilon\mu} \left[\vec{n}, \vec{E}\right] \quad (57.11)$$

[сравн. с (33.15) и (33.16)], которые указывают, что эти векторы взаимно ортогональны ($\vec{E} \perp \vec{B}$), и устанавливают соотношение между их модулями:

$$|\vec{B}| = \sqrt{\epsilon\mu} |\vec{E}| \quad (57.12)$$

[сравн. с (33.19)].

Пусть теперь имеются два неферромагнитных ($\mu=1$) изотропных однородных идеальных диэлектрика с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 , заполняющих области $y < 0$ и $y > 0$ соответственно (см. рисунок). Пусть из первой среды на границу раздела, т.е. на плоскость $y=0$, падает плоская монохроматическая электромагнитная волна с характеристиками ω_1 и \vec{k}_1 . Эта волна на границе раздела частично отражается (распространяется в той же среде), а частично преломляется (переходит в другую среду). Наша задача состоит в том, чтобы установить основные свойства отраженной и преломленной волн.



Выберем систему координат так, чтобы векторы \vec{E}_1 и \vec{k}_1 падающей волны лежали в плоскости xOy , и введем для каждого из волновых векторов $\vec{k}_1, \vec{k}_1', \vec{k}_2$, направляющие углы α, β, γ с соответствующими индексами. Очевидно, что в силу принятых соглашений $\gamma_1 = \pi/2$, β_1 есть угол падения $\theta_{пад}$, β_1' – угол отражения $\theta_{отр}$, а β_2 – угол преломления $\theta_{прел}$. Расписываем в выбранной системе координат выражения (57.7) для электрического поля \vec{E} в падающей, отраженной и преломленной волнах:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \hat{E}_{01} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_1 t)} = \hat{E}_{01} e^{i(k_1 x \cos \alpha_1 + k_1 y \cos \beta_1 - \omega_1 t)} \\ \vec{E}_1' = \hat{E}'_{01} e^{i(\vec{k}_1' \vec{r} - \omega_1' t)} = \hat{E}'_{01} e^{i(k_1' x \cos \alpha_1' + k_1' y \cos \beta_1' + k_1' z \cos \gamma_1' - \omega_1' t)} \\ \vec{E}_2 = \hat{E}_{02} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_2 t)} = \hat{E}_{02} e^{i(k_2 x \cos \alpha_2 + k_2 y \cos \beta_2 + k_2 z \cos \gamma_2 - \omega_2 t)}. \end{cases} \quad (57.13)$$

Согласно граничным условиям (47.16), на границе раздела двух сред тангенциальная составляющая полного электрического поля непрерывна:

$$(\vec{E}_1 + \vec{E}_1')_{\tau} \Big|_{y=0} = (\vec{E}_2)_{\tau} \Big|_{y=0}, \quad (57.14)$$

или, с учетом (57.13),

$$\hat{E}_{01\tau} e^{i(k_1 x \cos \alpha_1 - \omega_1 t)} + \hat{E}'_{01\tau} e^{i(k_1' x \cos \alpha_1' + k_1' z \cos \gamma_1' - \omega_1' t)} = \hat{E}_{02\tau} e^{i(k_2 x \cos \alpha_2 + k_2 z \cos \gamma_2 - \omega_2 t)}.$$

Это равенство должно выполняться при всех значениях переменных t, x, z , а потому из него следует, что

$$\omega_1 = \omega_1' = \omega_2, \quad (57.15,а)$$

$$k_1 \cos \alpha_1 = k_1' \cos \alpha_1' = k_2 \cos \alpha_2, \quad (57.15,б)$$

$$0 = k_1' \cos \gamma_1' = k_2 \cos \gamma_2. \quad (57.15,в)$$

Первые соотношения говорят о том, что при отражении и преломлении частота электромагнитной волны остается неизменной. Из последних соотношений видно, что

$$\gamma_1' = \gamma_2 = \frac{\pi}{2} = \gamma_1, \quad (57.16)$$

т.е. «лучи» падающий, отраженный и преломленный (прямые, на которых лежат соответствующие волновые векторы \vec{k}) расположены в одной плоскости. Это есть первая часть стандартной формулировки законов отражения и преломления. При анализе оставшихся соотношений (57.15) примем во внимание, что $k = \omega/v$. Отсюда и из того, что $v_1' = v_1$ и $\omega_1' = \omega_1$, вытекает равенство

$$k'_1 = k_1, \quad (57.17)$$

которое при подстановке в первое условие (57.15,б) приводит к закону отражения $\alpha'_1 = \alpha_1$, или $\beta'_1 = \beta_1$, или

$$\theta_{omp} = \theta_{nad}. \quad (57.18)$$

Для преломленной и падающей волн имеем из (57.9), (57.4) и (57.15,а)

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\omega_1}{v_1} : \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{C/\sqrt{\varepsilon_2}}{C/\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2} \equiv n_{21}, \quad (57.19)$$

где введены абсолютные показатели преломления сред

$$n_i = \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}, \quad (57.20)$$

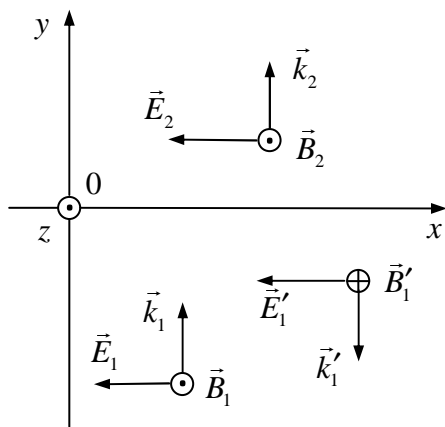
а также их относительный показатель преломления

$$n_{21} \equiv \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}} = \frac{1}{n_{12}} \quad (57.21)$$

(напомним, что в рассматриваемом случае $\mu = 1$). Подстановка (57.19) во второе условие (57.15,б) дает $\cos \alpha_2 / \cos \alpha_1 = n_{21}$, или $\sin \beta_2 / \sin \beta_1 = n_{21}$, и мы приходим к закону преломления

$$\frac{\sin \theta_{прел}}{\sin \theta_{над}} = n_{21}. \quad (57.22)$$

Выясним теперь, как распределяется энергия в отраженной и преломленной волнах. Выкладки в общей ситуации довольно громоздки и не очень показательны. Но все основные особенности явления можно изучить уже в простом случае нормального падения волны, который мы и рассмотрим. Выражения (57.13) при учете уже полученных результатов и приведенного рисунка расписываются как



$$\begin{cases} E_{1z} = -E_{01} e^{i(k_1 y - \omega t)}, & E_{1y} = E_{1z} = 0 \\ E'_{1x} = E'_{01} e^{i(-k_1 y - \omega t)}, & E'_{1y} = E'_{1z} = 0 \\ E_{2x} = -E_{02} e^{i(k_2 y - \omega t)}, & E_{2y} = E_{2z} = 0 \end{cases}, \quad (57.23)$$

где амплитуды выбраны вещественными (начальные фазы равными нулю), и все знаки указаны явно. Компоненты магнитного поля находим с помощью (57.23) и соотношения (57.11) при $\mu = 1$ (см. также рисунок):

$$\begin{cases} B_{1x} = B_{1y} = 0, & B_{1z} = \sqrt{\varepsilon_1} E_{01} e^{i(k_1 y - \omega t)} \\ B'_{1x} = B'_{1y} = 0, & B'_{1z} = -\sqrt{\varepsilon_1} E'_{01} e^{i(-k_1 y - \omega t)} \\ B_{2x} = B_{2y} = 0, & B_{2z} = \sqrt{\varepsilon_2} E_{02} e^{i(k_2 y - \omega t)} \end{cases} \quad (57.24)$$

Условия непрерывности тангенциальных составляющих полных электрического и магнитного полей [формулы (47.16)] дают

$$(E_{1x} + E'_{1x})|_{y=0} = E_{2x}|_{y=0}, \quad (B_{1z} + B'_{1z})|_{y=0} = B_{2z}|_{y=0},$$

откуда, с учетом (57.23) и (57.24),

$$E_{01} + E'_{01} = E_{02}, \quad \sqrt{\varepsilon_1} (E_{01} - E'_{01}) = \sqrt{\varepsilon_2} E_{02}. \quad (57.25)$$

Разрешая эти алгебраические соотношения относительно E'_{01} и E_{02} , получим

$$E'_{01} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} E_{01}, \quad E_{02} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} E_{01}.$$

Поделив числители и знаменатели на $\sqrt{\varepsilon_1}$ и введя относительный показатель преломления [см. (57.21)]

$$n \equiv n_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_{21}}, \quad (57.26)$$

будем иметь

$$E'_{01} = \frac{1-n}{1+n} E_{01}, \quad E_{02} = \frac{2}{1+n} E_{01}. \quad (57.27)$$

Мы хотим сравнить потоки энергии в падающей, отраженной и преломленной волнах. Для каждой из них вектор Пойнтинга равен

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}| |\vec{B}| \vec{n} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon} E^2 \vec{n}, \quad (57.28)$$

где использованы формула (47.25) и равенство $\vec{B} = \vec{H}$ при $\mu = 1$, а также соотношение ортогональности (57.11) и соотношение между модулями (57.12) полей \vec{E} и \vec{B} . Рассмотрение проводится непосредственно на границе раздела двух сред, и потому нужно считать $y = 0$. Переходя к тому же в (57.23) к вещественной форме записи, для модуля вектора \vec{E} в трех интересующих нас волнах получим

$$|\vec{E}_1| = E_{01} |\cos \omega t|, \quad |\vec{E}'_1| = E'_{01} |\cos \omega t|, \quad |\vec{E}_2| = E_{02} |\cos \omega t|. \quad (57.29)$$

Подставляя эти выражения в (57.28), найдем, учитывая (57.27),

$$\begin{aligned}
|\bar{\Pi}_1| &= \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon_1} E_{01}^2 \cos^2 \omega t, \\
|\bar{\Pi}'_1| &= \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon_1} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 E_{01}^2 \cos^2 \omega t = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 |\bar{\Pi}_1|, \\
|\bar{\Pi}_2| &= \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon_2} \left(\frac{2}{n+1} \right)^2 E_{01}^2 \cos^2 \omega t = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \left(\frac{2}{n+1} \right)^2 |\bar{\Pi}_1| = \left(\frac{2\sqrt{n}}{n+1} \right)^2 |\bar{\Pi}_1|.
\end{aligned} \tag{57.29,a}$$

Вводя коэффициент отражения R и коэффициент прохождения T естественными определениями

$$R = \frac{|\bar{\Pi}_{\text{omp}}|}{|\bar{\Pi}_{\text{над}}|} \equiv \frac{|\bar{\Pi}'_1|}{|\bar{\Pi}_1|}, \quad T = \frac{|\bar{\Pi}_{\text{прои}}|}{|\bar{\Pi}_{\text{над}}|} \equiv \frac{|\bar{\Pi}_2|}{|\bar{\Pi}_1|}, \tag{57.30}$$

получим для них с помощью (57.29)

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2, \quad T = \left(\frac{2\sqrt{n}}{n+1} \right)^2. \tag{57.31}$$

Непосредственное сложение показывает, что

$$R + T = 1. \tag{57.32}$$

Данный результат свидетельствует о том, что в рассматриваемой системе электромагнитная энергия сохраняется. Она не диссипирует в теплоту, т.е. на границе раздела двух сред электромагнитные волны не поглощаются (естественно, они не поглощаются и в толще каждой из сред).

Как видно из формул (57.31), если среды почти одинаковы, т.е. $\varepsilon_2 \cong \varepsilon_1$ ($n \cong 1$), то $R \cong 0$ и $T \cong 1$. В этом случае электромагнитная волна минует границу раздела, практически не отражаясь. Если же среды резко различны, т.е. $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ ($n \rightarrow \infty$) или $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ ($n \cong 0$), то $R \cong 1$ и $T \cong 0$. Электромагнитная волна на границе раздела претерпевает практически полное отражение.

§58* Электромагнитные волны в проводящей среде

В предшествующих параграфах проанализированы крайние случаи хорошего проводника, когда можно пренебречь током смещения, и идеального диэлектрика, в котором отсутствует ток проводимости. Рассмотрим теперь электромагнитное поле в промежуточных средах – полупроводниках или растворах электролитов. Частоты считаем достаточно высокими, чтобы ток смещения был сравним с током проводимости, но не слишком высокими, чтобы еще оставались справедливыми простейшие материальные уравнения $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ со статическими значениями ε , μ , γ . Предполагаем к тому же среду однородной (ε , $\mu = \text{const}$) и сторонние заряды отсутствующими ($\rho = 0$).

Тогда из (47.10) придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \gamma \vec{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (58.1)$$

Взяв ротор от обеих частей последнего уравнения и воспользовавшись остальными уравнениями (58.1), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\frac{4\pi\mu\gamma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

или

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\gamma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0. \quad (58.2)$$

Аналогичное уравнение справедливо и для магнитного поля \vec{B} .

Нас интересует поле, изменяющееся во времени по гармоническому закону:

$$\vec{E}(\vec{r}|t) = \hat{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \quad (58.3)$$

Подстановка данного выражения в (58.2) дает

$$\nabla^2 \hat{E}_0(\vec{r}) + k^2 \hat{E}_0(\vec{r}) = 0, \quad (58.4)$$

где введено обозначение

$$k = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} + i \frac{4\pi\mu\gamma\omega}{c^2}} \equiv p + iq. \quad (58.5)$$

Знак корня будем выбирать так, чтобы мнимая часть k была положительной, т.е. $q > 0$. Смысл этого условия прояснится в дальнейшем.

Конкретизируем задачу. Пусть проводящая среда заполняет полупространство $x \geq 0$, и пусть на границе раздела среда–вакуум возбуждается не зависящее от координат y и z гармоническое поле (например, на поверхность $x = 0$ нормально к ней со стороны вакуума падает плоская монохроматическая волна):

$$\vec{E}(x=0|t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (58.6)$$

где \vec{E}_0 – вещественная амплитуда. Требуется найти электромагнитное поле во всех точках среды, т.е. при $x > 0$. Ясно, что при такой постановке задачи $\vec{E}(\vec{r}|t) = \vec{E}(x|t)$, причем, в соответствии с (58.3),

$$\vec{E}(x|t) = \hat{E}_0(x) e^{-i\omega t}, \quad (58.7)$$

где функция $\hat{E}_0(x)$ подчиняется уравнению вида (58.4):

$$\frac{d^2 \hat{E}_0(x)}{dx^2} + k^2 \hat{E}_0(x) = 0. \quad (58.8)$$

Общее решение этого уравнения записывается как

$$\hat{E}_0(x) = \hat{A}_1 e^{ikx} + \hat{A}_2 e^{-ikx} = \hat{A}_1 e^{-qx} e^{ipx} + \hat{A}_2 e^{qx} e^{-ipx} \quad (58.9)$$

с «волновым числом» k , задаваемым формулой (58.5). Так как мы положили $q > 0$, то из требования ограниченности поля при $x \rightarrow +\infty$ следует, что $\hat{A}_2 = 0$. Постоянная же \hat{A}_1 определяется из условия (58.6): $\hat{A}_1 = \vec{E}_0$.

В итоге имеем

$$\vec{E}(x|t) = \vec{E}_0 e^{-qx} e^{i(px - \omega t)}. \quad (58.10)$$

Аналогичное выражение получается и для магнитного поля \vec{B} .

Таким образом, получено решение в виде плоской монохроматической волны с частотой ω и волновым числом p , распространяющейся в однородной проводящей среде. Амплитуда волны уменьшается с глубиной по экспоненциальному закону с показателем затухания q , что соответствует диссипации электромагнитной энергии в тепловую. Согласно результатам §38, фазовая и групповая скорости волны вычисляются по формулам

$$v_\phi = \frac{\omega}{p}, \quad v_{gp} = \frac{d\omega}{dp}. \quad (58.11)$$

Нетрудно получить из (58.5) явные выражения для p и q , а затем для v_ϕ и v_{gp} , но они слишком громоздки, и потому не показательны. Ограничимся обсуждением двух предельных случаев.

Если проводимость мала (хороший диэлектрик), то выражение (58.5) для k приближенно преобразуется следующим образом:

$$k \equiv p + iq = \sqrt{\frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} + i \frac{4\pi\gamma\mu\omega}{c^2}} = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + i \frac{4\pi\gamma}{\epsilon\omega}} \cong \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c} + i \frac{2\pi\gamma}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}},$$

откуда

$$p \cong \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c}, \quad q \cong \frac{2\pi\gamma}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (58.12)$$

Волновое число p практически совпадает с волновым числом (57.9) в идеальном диэлектрике, а затухание волны можно считать не зависящим от частоты: ее амплитуда уменьшается в e раз на глубине

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{q} \cong \frac{c}{2\pi\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}. \quad (58.13)$$

Заметим, что в данном случае

$$\frac{q}{p} \cong \frac{2\pi\gamma}{\varepsilon\omega} \ll 1, \quad (58.14)$$

т.е. поглощение электромагнитной энергии является очень слабым. Из первой формулы (58.12) получаем для фазовой и групповой скоростей

$$v_\phi = v_{gp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (58.15)$$

Они не зависят от частоты и равны друг другу, что связано с линейностью закона дисперсии $\omega = \omega(p)$ [сравн. с (38.9)]. Кроме того, эти скорости практически совпадают со скоростью распространения электромагнитных волн в идеальном диэлектрике.

Другой из упомянутых предельных случаев отвечает большим значениям проводимости и относительно малым частотам:

$$k \equiv p + iq = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} + i\frac{4\pi\gamma\omega}{c^2}} \cong \sqrt{i\frac{4\pi\gamma\omega}{c^2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4\pi\gamma\omega}}{c},$$

откуда

$$p \cong \frac{\sqrt{2\pi\gamma\omega}}{c} = \frac{1}{\delta}, \quad q \cong \frac{\sqrt{2\pi\gamma\omega}}{c} = \frac{1}{\delta}. \quad (58.16)$$

Здесь затухание велико, и ослабление волны в e раз происходит на толщине скин-слоя δ (см. §56). Фазовая скорость растет с частотой:

$$v_\phi = \frac{\omega}{p} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu}} \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}}. \quad (58.17)$$

Чтобы найти групповую скорость, продифференцируем первое соотношение (58.16) по p :

$$1 = \frac{\sqrt{2\pi\mu}}{2c\sqrt{\omega}} \frac{d\omega}{dp}.$$

Отсюда получаем

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dp} = 2 \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu}} \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} = 2v_\phi, \quad (58.18)$$

т.е. групповая скорость вдвое больше фазовой, что характерно для квадратичного закона дисперсии $\omega = \omega(p)$ [см. обсуждение формулы (38.9)].

Обратимся в заключение ко второму уравнению Максвелла (58.1). Если электрическое поле \vec{E} изменяется во времени по гармоническому закону (58.3), то это уравнение можно переписать как

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \gamma \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c} i\omega \vec{E} = \frac{\mu}{c} \left(\varepsilon - \frac{4\pi\gamma}{i\omega} \right) (-i\omega) \vec{E},$$

или

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\mu}{c} \left(\varepsilon - \frac{4\pi\gamma}{i\omega} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (58.19)$$

Мы видим, что оно представляется в форме

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (58.20)$$

подобной второму уравнению Максвелла (57.1) для идеального диэлектрика, но с *комплексной* диэлектрической проницаемостью, зависящей от частоты,

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon - \frac{4\pi\gamma}{i\omega}. \quad (58.21)$$

Сделанное замечание можно рассматривать как совсем краткое введение к следующему параграфу, где оно обобщается и развивается в разных направлениях.

§59*. Комплексная диэлектрическая проницаемость

До сих пор всюду предполагалось, что связь между поляризованностью \vec{P} и электрическим полем \vec{E} , а значит, между полями \vec{D} и \vec{E} , является квазистатической:

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (59.1)$$

где χ_e и ε – некоторые постоянные или функции координат. Но если \vec{E} очень быстро меняется во времени, то \vec{P} , а вместе с ним \vec{D} , не будет успевать следить за соответствующими изменениями. Если ограничиться рассмотрением достаточно слабых полей, то связь между \vec{D} и \vec{E} по-прежнему можно считать линейной. Но в силу эффектов запаздывания теперь она будет нелокальной по времени и в общей ситуации запишется как

$$\vec{D}(\vec{r}|t) = \vec{E}(\vec{r}|t) + \int_0^{\infty} f(\tau) \vec{E}(\vec{r}|t-\tau) d\tau. \quad (59.2)$$

В этом соотношении $f(\tau)$ – некоторая функция времени, определяемая свойствами среды, а слагаемое \vec{E} выделено просто из соображений удобства, по аналогии с обычным определением $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$.

Чрезвычайно существенно, что нижний предел интегрирования в (59.2) равен нулю. В этом находит свое выражение *принцип причинности*, согласно которому на поле $\vec{D}(t)$ в данный момент времени t могут оказывать влияние значения поля $\vec{E}(t')$ только в *предшествующие* моменты $t' < t$. Если бы область интегрирования простиралась не от 0, а от $-\infty$, то при отрицательных τ аргумент у \vec{E} под знаком интеграла в (59.2) был бы больше t , в противоречии с принципом причинности.

По аналогии с электростатикой соотношение (59.2) можно записать как

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (59.3)$$

но здесь уже ϵ – не число, а интегральный оператор (символ \mathcal{E} мы сохраняем за обычной диэлектрической постоянной). Тем не менее, в определенных случаях можно получить и алгебраическую связь между \vec{D} и \vec{E} . Наиболее важный из них – случай монохроматического поля вида (58.3)

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}|t) = \hat{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad \vec{D}_\omega(\vec{r}|t) = \hat{D}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}. \quad (59.4)$$

Подставив эти выражения в (59.2), получим

$$\hat{D}_0 e^{-i\omega t} = \hat{E}_0 e^{-i\omega t} + \int_0^\infty f(\tau) \hat{E}_0 e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau$$

(пространственные аргументы не выписываем), откуда найдем, что

$$\vec{D}_\omega = \epsilon(\omega) \vec{E}_\omega, \quad (59.5)$$

где

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (59.6)$$

Итак, для монохроматических полей сохраняется стандартная связь между векторами \vec{D} и \vec{E} , но с временной *дисперсией*¹⁾. Диэлектрическая проницаемость зависит теперь не только от свойств среды, но и от частоты, т.е. от свойств поля. Аналогичный результат справедлив также для отдельных гармоник произвольных полей, в чем легко убедиться, разложив последние в интегралы Фурье по времени

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \vec{D}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{D}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (59.7)$$

и подставив эти выражения в интегральное соотношение (59.3).

Функция $\epsilon(\omega)$, вообще говоря, *комплексная*:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega). \quad (59.8)$$

Из ее определения (59.6) сразу следует, что $\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)$, т.е.

$$\epsilon_1(\omega) - i\epsilon_2(\omega) = \epsilon_1(-\omega) + i\epsilon_2(-\omega).$$

Таким образом, вещественная часть ϵ_1 является четной, а мнимая часть ϵ_2 – нечетной функцией частоты:

¹⁾ Пространственную дисперсию, обязанную нелокальности связи между \vec{D} и \vec{E} по координатам, мы не рассматриваем.

$$\epsilon_1(-\omega) = \epsilon_2(\omega), \quad \epsilon_2(-\omega) = -\epsilon_2(\omega). \quad (59.9)$$

Обсудим физический смысл комплексной диэлектрической проницаемости и ее вещественной и мнимой частей. Для этого заметим, прежде всего, что для монохроматических полей уравнения Максвелла с помощью $\epsilon(\omega)$ записываются в произвольной однородной среде точно так же, как в идеальном диэлектрике [см., например, уравнение (58.20)]. Если функция $\epsilon(\omega)$ чисто вещественна, или ее мнимая часть мала, т.е. $\epsilon(\omega) \equiv \epsilon_1(\omega)$, то согласно сказанному и результатам §57, получим для скорости монохроматической волны

$$v(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1(\omega)}} \equiv \frac{c}{n(\omega)}, \quad n(\omega) = \sqrt{\epsilon_1(\omega)}. \quad (59.10)$$

Тем самым квадратный корень из вещественной части комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon_1(\omega)$ определяет показатель преломления $n(\omega)$ рассматриваемой среды на данной частоте ω (в общей ситуации в него дает вклад и мнимая часть ϵ_2 , о чем см. §60).

При анализе $\epsilon_2(\omega)$ следует вспомнить, что величина $\overline{\text{div } \vec{\Pi}}$, где $\vec{\Pi}$ – вектор Пойнтинга (47.25), имеет смысл объемной плотности источников потока энергии электромагнитного поля. Но в однородных средах, с которыми мы имеем дело, энергия поля может только превращаться в теплоту (активные среды типа лазерных не рассматриваются), и потому

$$\overline{\text{div } \vec{\Pi}} = -q, \quad (59.11)$$

где черта означает усреднение по времени, а q – удельное тепловыделение в единицу времени.

С другой стороны, $\text{div } \vec{\Pi}$ входит в уравнение энергетического баланса (47.22). Для монохроматического поля его можно записать как

$$\frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\vec{E}_\omega, \frac{\partial \vec{D}_\omega}{\partial t} \right) + \left(\vec{H}_\omega, \frac{\partial \vec{B}_\omega}{\partial t} \right) \right\} + \text{div } \vec{\Pi} = 0, \quad (59.12)$$

ибо в формализме комплексной диэлектрической проницаемости ток проводимости эффективно учитывается в токе смещения¹⁾ (см. выше).

Сравнение (59.11) с (59.12) дает

$$q(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \overline{\left(\vec{E}_\omega, \frac{\partial \vec{D}_\omega}{\partial t} \right) + \left(\vec{H}_\omega, \frac{\partial \vec{B}_\omega}{\partial t} \right)} \right\}. \quad (59.13)$$

Учтем теперь, что в рассматриваемом случае \vec{E}_ω и \vec{D}_ω задаются выражениями (59.4) и (59.5), а \vec{H}_ω и \vec{B}_ω – аналогичными выражениями

¹⁾ Чтобы получить уравнение (59.12), достаточно воспроизвести его вывод из уравнения Максвелла (47.10), взяв второе из них в виде (58.20).

$$\vec{H}_\omega = \hat{H}_0 e^{-i\omega t}, \quad \vec{B}_\omega = \mu \vec{H}_\omega, \quad (59.14)$$

но с вещественной магнитной проницаемостью μ , которая практически не испытывает дисперсии (ферромагнетики не рассматриваем). Выделим в этих выражениях вещественные части (см. начало дополнения к §35), считая сами амплитуды $\hat{E}_0 \equiv \vec{E}_0$ и $\hat{H}_0 \equiv \vec{H}_0$ вещественными, и подставим результаты в (59.13), расписав явным образом операцию усреднения:

$$q(\omega) = \frac{\vec{E}_0^2}{4\pi} \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \frac{\partial}{\partial t} \{ \epsilon_1(\omega) \cos \omega t + \epsilon_2(\omega) \sin \omega t \} dt + \frac{\mu \vec{H}_0^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \frac{\partial}{\partial t} (\cos \omega t) dt.$$

Проводя элементарные интегрирования, для удельного тепловыделения в единицу времени на частоте ω получим

$$q(\omega) = \omega \epsilon_2(\omega) \frac{\vec{E}_0^2}{8\pi}. \quad (59.15)$$

Таким образом, мнимая часть $\epsilon_2(\omega)$ комплексной диэлектрической проницаемости определяет *диссипацию* энергии электромагнитного поля в диэлектрической среде.

Из сказанного ясно, сколь важно знать функцию $\epsilon(\omega)$. Последовательная теория дисперсии может быть развита только в рамках квантовой механики. В следующем параграфе мы определим вид $\epsilon(\omega)$, основываясь на классических представлениях, заведомо огрубленных. А сейчас обсудим ряд общих свойств данной функции, не зависящих от модели строения вещества, и прежде всего, ее асимптотическое поведение при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$.

При невысоких частотах, когда еще допустимо разделение тока смещения и тока проводимости, $\epsilon(\omega)$ задается выражением (58.21). Если в статическом пределе, т.е. при $\omega \rightarrow 0$, поляризация молекул отсутствует, т.е. рассматривается идеальный проводник, то $\mathcal{E} = 0$, и

$$\epsilon(\omega) = i \frac{4\pi\gamma}{\omega}. \quad (59.16)$$

В этом смысле говорят иногда, что статическая диэлектрическая проницаемость проводника равна мнимой бесконечности. Последнее означает, что в проводнике вся энергия стационарного электрического поля диссипирует в теплоту (см. конец §55). Если вещество является идеальным диэлектриком, т.е. $\gamma = 0$, то из (58.21) при невысоких частотах, где справедлива эта формула, получаем $\epsilon(\omega) = \epsilon$, чем мы неоднократно пользовались в предшествующих параграфах.

В пределе очень высоких частот внешнее электрическое поле не успевает оказывать влияние на поведение не только молекул в целом, но и атомных электронов. Поэтому поляризация не возникает, и

$$\epsilon(\omega) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (59.17)$$

Эта оценка допускает уточнение. Поскольку считается, что частота поля значительно превышает собственные частоты движения электронов, то при вычислении поляризованности образца их можно считать свободными. Поэтому уравнение движения одного электрона запишется как (сравн. с §44)

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E}_\omega = -e\hat{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (59.18)$$

(e – элементарный заряд). Отсюда, считая, что $\vec{v} = 0$ при $t = 0$, для перемещения электрона под действием поля найдем

$$\vec{r} = \frac{e}{m\omega^2} \hat{E}_0 e^{-i\omega t} = \frac{e}{m\omega^2} \vec{E}_\omega. \quad (59.19)$$

Поляризованность \vec{P} получается суммированием дипольных моментов \vec{d}_a всех зарядов в единичном объеме, так что с помощью (59.19) имеем

$$\vec{P}_\omega = \sum_a q_a \vec{r}_a = -e \sum_a \vec{r}_a = -eN\vec{r} = -\frac{e^2}{m\omega^2} N\vec{E}_\omega, \quad (59.20)$$

где N – число электронов в единице объема, т.е. их концентрация. Подставив это выражение в формулы

$$\vec{D}_\omega = \epsilon(\omega) \vec{E}_\omega = \vec{E}_\omega + 4\pi \vec{P}_\omega,$$

придем к следующему результату:

$$\epsilon(\omega) \cong 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} N \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (59.21)$$

Итак, на основе только общих соображений мы можем сказать о свойствах комплексной диэлектрической проницаемости достаточно много:

(а) ее вещественная часть ϵ_1 является четной, а мнимая часть ϵ_2 – нечетной функцией частоты [формулы (59.9)];

(б) при невысоких частотах функция $\epsilon(\omega)$ равна постоянной величине \mathcal{E} для идеальных диэлектриков и обладает полюсом первого порядка при $\omega = 0$ для проводников [формула (58.21)];

(в) при очень высоких частотах $\epsilon(\omega) \rightarrow 1$, причем характер ее поведения при $\omega \rightarrow \infty$ уточняет формула (59.21).

Исходя только из этих свойств и упоминавшегося выше принципа причинности, удастся установить общую связь между вещественной и мнимой частями комплексной диэлектрической проницаемости. Она имеет вид

$$\epsilon_1(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (59.22)$$

(интеграл берется в смысле главного значения¹⁾) и называется *дисперсионным соотношением* Крамерса–Кронига. Данное равенство широко используется в оптике²⁾, но этим его роль не ограничивается. Наиболее, пожалуй, существенным является то, что подход к анализу электродинамических явлений, приводящий к соотношению (59.22), допускает далеко идущие обобщения на процессы, протекающие в мире элементарных частиц. В свое время в рамках квантовой теории поля было развито целое большое направление, которое так и называется – теория дисперсионных соотношений.

§60*. Классическая теория дисперсии

До сих пор практически всюду использовался феноменологический подход к электродинамике сплошных сред. Статистический (микроскопический) подход к ней составляет главы курса электронной теории вещества³⁾. Но для одного важного вопроса⁴⁾ здесь будет сделано исключение. Речь идет о классической теории дисперсии, т.е. об отыскании зависимости $\epsilon = \epsilon(\omega)$ и извлечении из нее соответствующих следствий. Она строится на основе микроскопических представлений и исходит из осцилляторной модели атомов, описанной в §46.

Исходным в этой модели является приближенное уравнение (45.14). Для учета взаимодействия излучения с веществом в его правую часть нужно включить силу, действующую на атомный электрон со стороны плоской монохроматической электромагнитной волны. Тогда в приближении, принятом в §44, получим следующее уравнение движения электрона:

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}_\omega = -\frac{e}{m} \hat{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (60.1)$$

где \hat{E}_0 – постоянная комплексная амплитуда, а смысл ω_0 и γ разъяснен в §45 (не путать γ с проводимостью). В установившемся режиме ищем закон движения электрона в стандартном виде

$$\vec{r} = \vec{r}_\omega \equiv \hat{r}_0 e^{-i\omega t}. \quad (60.2)$$

Подставляя это выражение в уравнение (60.1), найдем

¹⁾ Напомним, что если $c \in (a, b)$ и функция $f(x)$ имеет в точке $x = c$ особенность, являясь неограниченной, то по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left\{ \int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right\}.$$

²⁾ См., например: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, 2-е изд. – М.: Наука, 1982, – Гл. IX.

³⁾ См.: Свирский М.С. Электронная теория вещества. – М.: Просвещение, 1980; Измайлов С.В. Курс электродинамики. – М.: Учпедгиз, 1982, – Гл. VIII.

⁴⁾ По каким-то причинам в цитированном учебном пособии М.С. Свирского он не нашел отражения.

$$\vec{r}_\omega = -\frac{e}{m} \frac{\vec{E}_\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}. \quad (60.3)$$

Дальше в качестве среды рассматриваем не очень плотный газ, для которого можно положить

$$\vec{P}_\omega = N\vec{d}_\omega, \quad \vec{d}_\omega = -e\vec{r}_\omega, \quad \vec{D}_\omega = \epsilon(\omega)\vec{E}_\omega = \vec{E}_\omega + 4\pi\vec{P}_\omega. \quad (60.4)$$

Здесь N – число рассеивающих электронов в единице объема, \vec{d}_ω – приобретаемый каждым из них дипольный момент, \vec{E}_ω – внешнее поле. Отсюда и из (60.3) имеем

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}. \quad (60.5)$$

В пределе высоких частот ($\omega \rightarrow \infty$) приходим к асимптотическому выражению (59.21) для $\epsilon(\omega)$, а в пределе низких частот ($\omega \rightarrow 0$) – к выражению для статической диэлектрической постоянной:

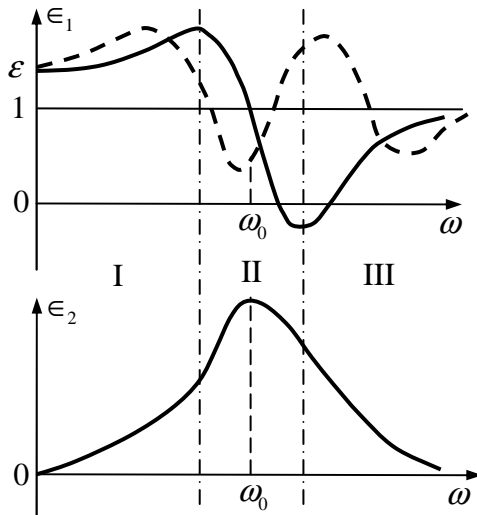
$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi e^2}{m\omega_0^2} N. \quad (60.6)$$

Выделяя из (60.5) вещественную и мнимую части, получим

$$\epsilon_1(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} N \quad (60.7)$$

и

$$\epsilon_2(\omega) = \frac{4\pi e^2}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} N. \quad (60.8)$$



Графики этих функций изображены на рисунке, где штриховой линией указана возможная зависимость $\epsilon_1(\omega)$ для реального газа. Области I и III – это области нормальной дисперсии, область II – область аномальной дисперсии. Смысл терминологии прояснится чуть ниже. Сейчас же заметим, что в областях нормальной дисперсии $\epsilon_1(\omega)$ увеличивается с ростом частоты, а диссипация электромагнитной энергии невелика (вспомним

смысл ϵ_ω); в области аномальной дисперсии $\epsilon_1(\omega)$ уменьшается с ростом частоты, и диссипация достигает максимума.

Заметим, что на самом деле газ обычно моделируется набором осцилляторов не с одной, а несколькими различными собственными частотами ω_{0j} . Тогда в формуле (60.5) следует провести суммирование по всем сортам осцилляторов:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \sum_j \frac{N_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - i\gamma_j \omega}. \quad (60.9)$$

Примечательно, что сходное выражение для $\epsilon(\omega)$ получается и в рамках квантовой механики, только с заменой ω_{0j} на частоты переходов $\omega_r = (E_r - E_0)/\hbar$ атома из возбужденных состояний в основное и N_j на так называемые силы осцилляторов. Однако здесь все эти уточнения учитывать не будем, ибо нас интересуют качественные результаты, для получения которых вполне достаточной оказывается формула (60.5) для $\epsilon(\omega)$.

Как уже неоднократно подчеркивалось, в формализме комплексной диэлектрической проницаемости уравнения Максвелла для поля, гармонически изменяющегося во времени, по виду совпадают с уравнениями Максвелла (57.1) для поля в идеальном диэлектрике, но с заменой \mathcal{E} на $\epsilon(\omega)$. Поэтому для плоской монохроматической волны в произвольной среде будет справедливо соотношение типа (57.9):

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)} \quad (60.10)$$

(считаем $\mu=1$). Поскольку $\epsilon(\omega)$ – комплексная величина, то комплексным будет и «волновое число» [сравн. с (58.5)]:

$$k \equiv p + iq = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa), \quad (60.11)$$

где введено обозначение

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} = n + i\kappa, \quad (60.12)$$

так что

$$p = \frac{\omega}{c} n, \quad q = \frac{\omega}{c} \kappa. \quad (60.13)$$

Ясно, что $n(\omega)$ имеет смысл показателя преломления среды на частоте ω , а $\kappa(\omega)$ – ее коэффициента поглощения на этой частоте (см. §58).

Для газа с большой точностью $n=1$, т.е. второе слагаемое в (60.5) мало по сравнению с единицей при всех частотах. Поэтому можно записать

$$n + i\kappa = \sqrt{\epsilon(\omega)} = \left\{ 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \right\}^{1/2} \cong 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}, \quad (60.14)$$

откуда, выделяя вещественную и мнимую части, получим

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} N \quad (60.15)$$

и

$$\kappa = \frac{2\pi e^2}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} N. \quad (60.16)$$

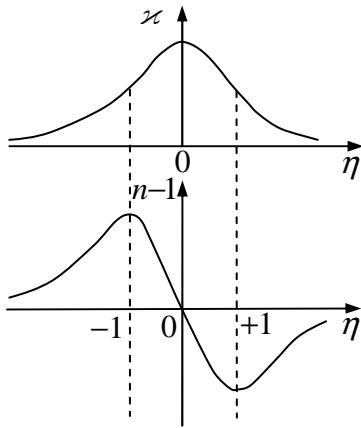
Данные выражения отличаются от выражений (60.7) и (60.8) для $\epsilon_1(\omega)$ и $\epsilon_2(\omega)$ лишь множителями $1/2$ в своих частях, зависящих от частоты. Поэтому графики зависимостей $n = n(\omega)$ и $\kappa = \kappa(\omega)$ практически совпадают с кривыми рисунка на с.299.

Эти зависимости станут более наглядными, если ввести переменную

$$\eta = (\omega - \omega_0) / \frac{\gamma}{2}. \quad (60.17)$$

Тогда получим

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2 N}{m\gamma\omega_0} \frac{\eta}{1 + \eta^2}, \quad \kappa = \frac{2\pi e^2 N}{m\gamma\omega_0} \frac{\eta}{1 + \eta^2}. \quad (60.18)$$



Графики функций $n(\eta)-1$ и $\kappa(\eta)$ изображены на рисунке. При $\eta=0$, т.е. при $\omega = \omega_0$, имеет место максимальное поглощение, которое резко снижается с ростом $|\eta|$ и достигает половины своего наибольшего значения при $\eta = \pm 1$, т.е. при $\omega = \omega_0 \pm \gamma/2$. Таким образом, ширина линии поглощения совпадает с естественной шириной соответствующей линии испускания (см. §46).

Показатель преломления n при $|\eta| > 1$, т.е. вне линии поглощения, увеличивается с ростом η . При $\eta = \mp 1$ (на «границах» линии поглощения) он достигает максимального и минимального значений соответственно. Область $|\eta| > 1$ отвечает *нормальной* дисперсии. В интервале же $-1 < \eta < +1$ показатель преломления уменьшается с ростом η , прсчинимая при $\eta = 0$ ($\omega = \omega_0$) значение $n = 1$. Это есть область *аномальной* дисперсии, совпадающая с областью наименьшей прозрачности среды.

При достаточно высоких частотах ω (больших значениях η) показатель преломления оказывается меньше единицы ($n < 1$), а значит, фазовая скорость электромагнитных волн в среде превышает скорость света в вакууме:

$$v_\phi = \frac{c}{n} > c. \quad (60.19)$$

Однако в этом ничего страшного нет, так как из §38 мы знаем, что реальные сигналы, несущие информацию, передаются не с фазовой, а с групповой скоростью. Проведем ее вычисление, во избежание громоздких выкладок, в высокочастотном пределе $\omega \rightarrow \infty$, в котором формулы (60.15) и (60.16) дают

$$n = 1 - \frac{2\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \kappa = 0. \quad (60.20)$$

Продифференцируем равенство $k = \frac{\omega}{c}n(\omega)$ по k и вспомним, что $d\omega/dk = v_{gp}$:

$$1 = \frac{n}{c} \frac{d\omega}{dk} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{dk} = \frac{n}{c} \frac{d\omega}{dk} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} = \frac{v_{gp}}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right).$$

Отсюда с помощью выражения (60.20) для $n(\omega)$ имеем

$$v_{gp} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{1 + \frac{2\pi e^2 N}{m\omega^2}} \cong c \left(1 - \frac{2\pi e^2 N}{m\omega^2} \right) = cn. \quad (60.21)$$

Мы видим, что групповая скорость электромагнитных волн в среде оказывается меньше скорости света в вакууме и при $n < 1$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Введение. ПРЕДМЕТ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ	4
Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ	
§1. Электрический заряд	8
§2. Закон сохранения электрического заряда	13
§3. Электромагнитное поле	19
§4. Сила Лоренца	26
§5. Основные задачи классической электродинамики	29
§6. Эмпирический базис классической электродинамики	30
§7. Уравнения электромагнитного поля	36
Глава II. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ	
§8. Уравнения Максвелла в вакууме	48
§ 9. Общие свойства уравнений Максвелла	52
§10. Потенциалы электромагнитного поля	56
§11. Энергия электромагнитного поля	60
§12. Импульс электромагнитного поля	64
Глава III. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ	
§13. Ковариантный формализм в релятивистских теориях	73
§14. Четырехмерный ток	78
§15. Четырехмерный потенциал	80
§16. Тензор электромагнитного поля	82
§17. Уравнения Максвелла в ковариантной форме	86
§18. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле	90
Глава IV. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ	
§19. Уравнения электростатики в вакууме	92
§20. Электростатический потенциал	96
§21. Теорема Ирншоу	100
§22. Методы решения задач электростатики	101
§23. Электростатическое поле в дипольном приближении	112
§24. Понятие о квадрупольном моменте	117
§25. Энергия электростатического поля	122
§26. Заряженные частицы во внешнем электростатическом поле	126
Глава V. СТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ	
§27. Уравнения для стационарного магнитного поля	130
§28. Электромагнитное поле равномерно движущегося заряда	134
§29. Стационарное магнитное поле в дипольном приближении	138
§30. Энергия стационарного магнитного поля	142
§31. Движущиеся частицы во внешнем магнитном поле	145
Глава VI. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВАКУУМЕ	
§32. Свободное электромагнитное поле	154
§33. Плоские электромагнитные волны в вакууме	156
§34. Сферические волны	160
§35. Монохроматические плоские электромагнитные волны	162

§36. Поляризация плоской монохроматической электромагнитной волны	165
§37. Эффект Доплера	168
§38*. Волновой пакет	173
§39*. Собственные колебания поля	177

Глава VII. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§40. Запаздывающие потенциалы	180
§41. Дипольное приближение для поля в волновой зоне	185
§42. Дипольное излучение	188
§43. Простейшие излучающие системы	190
§44*. Рассеяние света свободными электронами	195
§45*. Сила радиационного трения	197
§46*. Осцилляторная модель атома	202

Глава VIII. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

§47. Феноменологический подход	210
§48. Статистический подход	217
§49. Сравнение статистического и феноменологического подходов	220
§50. Поляризованность	222
§51. Намагниченность	229

Глава IX. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ВЕЩЕСТВЕ

§52. Электростатика диэлектриков	237
§53. Электростатика проводников	245
§54. Постоянный ток в металлах	259
§55. Постоянное магнитное поле в веществе	268
§56. Квазистационарное электромагнитное поле	273
§57. Электромагнитные волны в идеальном диэлектрике	283
§58*. Электромагнитные волны в проводящей среде	289
§59*. Комплексная диэлектрическая проницаемость	293
§60*. Классическая теория дисперсии	298