

Глава III. ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ

§1. Движение свободной частицы

Рассмотрим одну *свободную* частицу массы m , т.е. частицу, движение которой не ограничено *связями* – поверхностями, нитями и т.п.

Согласно *принципу детерминированности*, при фиксированных внешних условиях закон движения частицы $\vec{r} = \vec{r}(t)$ полностью определяется заданием ее начального состояния, т.е. положения \vec{r}_0 и скорости \vec{v}_0 в некоторый момент времени $t = t_0$:

$$\vec{r} = \vec{r}(t; \vec{r}_0, \vec{v}_0). \quad (1.1)$$

Согласно *Второму закону Ньютона*, при фиксированных внешних условиях ускорение частицы \vec{w} в любой момент времени t однозначно определяется положением \vec{r} и скоростью \vec{v} в этот же момент времени:

$$m\vec{w}(t) = \vec{F}[\vec{r}(t), \vec{v}(t); t], \quad (1.2)$$

где функция \vec{F} есть сила.

В предыдущей главе доказана эквивалентность утверждений принципа детерминированности и Второго закона Ньютона. Уже само это доказательство подсказывает нам возможность постановки двух разных динамических задач, одинаковых по важности, но существенно различных по методам решения.

1. Прямая задача

Прямая задача классической механики ставится следующим образом. Известны силы, действующие на каждую частицу системы, и требуется найти законы движения частиц. Эта задача является основной задачей. Именно с ней почти всегда и приходится иметь дело, и именно для ее анализа создан весь разветвленный аппарат механики. Обсудим ее применительно к одной свободной частице.

Второй закон Ньютона в данном контексте записывается как

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (1.3)$$

и представляет собой систему трех обыкновенных *дифференциальных* уравнений второго порядка по времени относительно функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Как известно из теории дифференциальных уравнений, для однозначного определения закона движения уравнение (1.3) следует дополнить *начальными условиями*, что и составляет содержание принципа детерминированности:

$$\vec{r}|_{t=t_0} = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}|_{t=t_0} = \vec{v}_0. \quad (1.4)$$

С принципиальной точки зрения решение основной задачи сводится теперь к следующей процедуре. Интегрируя систему уравнений (1.3), находим ее общее решение, содержащее $3 \times 2 = 6$ произвольных постоянных \vec{A} и \vec{B} :

$$\vec{r} = \vec{r}(t; \vec{A}, \vec{B}). \quad (1.5)$$

Дифференцирование (1.5) по времени дает общую зависимость скорости от времени и от постоянных интегрирования

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t; \vec{A}, \vec{B}). \quad (1.6)$$

Полагая теперь в (1.5) – (1.6) $t = t_0$ и учитывая начальные условия (1.4), будем иметь

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0; \vec{A}, \vec{B}), \quad \vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0; \vec{A}, \vec{B}).$$

Разрешая эти алгебраические уравнения относительно \vec{A} и \vec{B} , найдем

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}_0, \vec{v}_0; t_0), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}_0, \vec{v}_0; t_0). \quad (1.7)$$

Наконец, подставляя найденные константы в (1.5), придем к закону движения

$$\vec{r} = \vec{r}(t; \vec{r}_0, \vec{v}_0). \quad (1.8)$$

При решении конкретных задач удобно, как правило, пользоваться какой-то определенной системой координат. В частности, если выбрана Декартова система координат, то прямая задача для одной свободной частицы будет ставиться следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = V_{0x} \\ y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = V_{0y} \\ z(t_0) = z_0, \quad \dot{z}(t_0) = V_{0z} \end{array} \right\} \quad (1.9)$$

и решение ее запишется как

$$x = x(t; \vec{r}_0, \vec{v}_0), \quad y = y(t; \vec{r}_0, \vec{v}_0), \quad z = z(t; \vec{r}_0, \vec{v}_0). \quad (1.10)$$

Не следует думать, однако, что Декартовы координаты – наиболее удобные и что они чаще всего используются в механике. Выбор конкретных координат диктуется свойствами симметрии внешнего поля, и если он удачен, то решение задачи существенно упрощается. Ниже, при анализе движения частицы в центральном поле, мы воспользуемся сферическими координатами (которые, правда, вырождаются там в полярные координаты). При исследовании движения частицы в поле с осевой симметрией естественно применять цилиндрические координаты.

Иногда прибегают к менее известным координатам. Так, если при анализе движения заряженной частицы в поле, создаваемом двумя одинаковыми неподвижными зарядами (скажем, ион H_2^+), удобны эллиптические координаты. Если заряженная частица движется в поле неподвижного заряда, причем на всю систему накладывается еще однородное электрическое поле (например, эффект Штарка для водорода), то применяют параболические координаты. Эти координаты полезны и при анализе движения заряженной частицы в кулоновом поле. В частности, ее используют в квантовой механике при выводе формулы Резерфорда.

Как известно, даже одно дифференциальное уравнение второго порядка интегрируется весьма редко. Это тем более относится к системе трех дифференциальных уравнений второго порядка (1.3) или (1.9), которая решается в квадратурах лишь в исключительных случаях. Примеры до конца решаемых уравнений будут рассмотрены в следующем параграфе.

Вообще, интегрируемые уравнения соответствуют, как правило, такой ситуации, когда сила, т.е. внешнее поле, обладает какой-то дополнительной симметрией. Оказывается, что симметрии порождают законы сохранения, или интегралы движения, предварительный анализ которых будет приведен в §3. Связь законов сохранения со свойствами симметрии в достаточно общей форме мы исследуем при изучении динамики систем частиц. С данной точки зрения этот случай оказывается гораздо более содержательным, чем достаточно тривиальный случай динамики одной частицы.

А теперь приведем для простых примеров решения прямой задачи динамики свободной частицы, которые подробно рассматривались на практических занятиях и которые нам потребуются чуть ниже для сравнения.

Примеры

1. Частица массы m испытывает со стороны среды силу сопротивления $\vec{F} = -k\vec{v}$. В момент времени $t = 0$ скорость частицы равна \vec{v}_0 . Найти ее закон движения.

Очевидно, что частица движется по прямой, вдоль которой направлен вектор \vec{v}_0 . Выберем ее в качестве оси x , поместив начало отсчета в ту точку, в которой находилась частица при $t = 0$ (так что $x_0 = 0$). Имеем следующую задачу:

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (1.11)$$

Учитывая, что $\dot{x} = v$, разделяя в уравнении переменные, интегрируя и принимая во внимание начальные условия для скорости, получим закон изменения скорости:

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \quad (1.12)$$

Интегрируя еще раз с учетом начального условия для координаты, приходим к закону движения

$$x = \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right). \quad (1.13)$$

2. Тело массы m , лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплено к концу пружины с коэффициентом упругости k . В момент времени $t = 0$ ему сообщили скорость \vec{v}_0 , вектор которой расположен в той же плоскости и составляет угол α с пружиной. Найти закон движения и траекторию тела.

Обозначим длину ненапряженной пружины через a и, поместив начало отсчета O в ее закрепленный конец, получим следующую задачу:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}, \quad \vec{r}(0) = \vec{a}, \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0. \quad (1.14)$$

Очевидно, движение происходит в горизонтальной плоскости, в которой и введем декартову систему координат xOy . При этом ось Ox направим вдоль положения пружины, которое она занимала в начальный момент времени, а ось Oy – перпендикулярно ей. Тогда задача (1.14) запишется так:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ m\ddot{y} &= -ky \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x(0) &= a, \dot{x}(0) = v_0 \cdot \cos \alpha \\ y(0) &= 0, \dot{y}(0) = v_0 \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (1.15)$$

Общее решение двух независимых уравнений (1.15) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ y &= C \cdot \cos \omega t + D \sin \omega t \end{aligned} \right\} \omega^2 \equiv \frac{k}{m}. \quad (1.16)$$

Определяя 4 постоянные интегрирования из начальных условий, получим закон движения

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t + \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega} \cdot \sin \omega t \\ y &= \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \right\}. \quad (1.17)$$

Исключая отсюда время, нетрудно прийти к уравнению траектории

$$x^2 - 2ctg\alpha \cdot xy + \left(ctg^2\alpha + \frac{a^2\omega^2}{v_0^2 \sin^2\alpha} \right) y^2 = a^2, \quad (1.18)$$

которое задает некоторый эллипс.

2. Обратная задача

Обратная задача классической механики ставится следующим образом. Известны законы движения частиц системы, и требуется найти действующие на них силы. Эта задача является чрезвычайно важной, так как позволяет по экспериментальным данным определить законы сил. К счастью для механики встречается она гораздо реже прямой задачи, поскольку число принципиально различных сил весьма невелико. Да и специального аппарата ее решение по сути дела не требует. Обсудим обратную задачу применительно к одной свободной частице.

Взяв известную функцию (1.1) и продифференцировав ее два раза по времени, получим три соотношения

$$\vec{r} = \vec{r}(t; \vec{r}_0, \vec{v}_0), \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}(t; \vec{r}_0, \vec{v}_0), \quad \vec{\omega} = \ddot{\vec{r}}(t; \vec{r}_0, \vec{v}_0). \quad (1.19)$$

Вся проблема сводится теперь к тому, чтобы выразить ускорение не через t, \vec{r}_0, \vec{v}_0 , а через \vec{r}, \vec{v}, t . Далее можно рассуждать двояко.

а). Из последнего соотношения (1.19) получаем

$$\vec{\omega}_0 = \ddot{\vec{r}}(t_0; \vec{r}_0, \vec{v}_0) \equiv \vec{f}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0). \quad (1.20)$$

Если мы уверены в том, что функция \vec{f} не содержит явной зависимости от времени (например, частица входит в состав замкнутой системы), то это равенство должно быть справедливо в любой момент времени t , а поэтому

$$\vec{\omega} = \vec{f}(\vec{r}, \vec{v}). \quad (1.21)$$

б). Однако при рассмотрении движения одной частицы во внешнем поле, которым мы сейчас и занимаемся, нельзя быть уверенным априори в том, что \vec{f} не содержит явной зависимости от времени. В такой ситуации лучше выразить с помощью первых двух

соотношений (1.19) \vec{r}_0 и \vec{v}_0 через \vec{r}, \vec{v} и t подставить результат в третье соотношение. В результате мы и получим зависимость

$$\vec{w} = \vec{f}(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (1.22)$$

Теперь, чтобы получить силу \vec{F} , достаточно просто умножить найденную тем или иным способом функцию (1.22) на массу частицы m :

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\vec{f}(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (1.23)$$

Таким образом, основа решения обратной задачи – все тот же Второй закон Ньютона (1.2). И процедура отыскания силы сводится, фактически, к простому дифференцированию.

Примеры

1. Пусть при изучении движения частицы массы m в вязкой среде экспериментально установлено, что при произвольных начальных условиях она перемещается вдоль прямой (которую объявим осью x) по закону

$$x = a + b(1 - e^{-\gamma t}), \quad (1.24)$$

где константы a и b определяются начальной координатой x_0 и начальной скоростью v_0 . Найдем силу, действующую на частицу.

Дифференцируя (1.24) два раза по времени, будем иметь

$$v \equiv \dot{x} = -\gamma b e^{-\gamma t}, w \equiv \ddot{x} = \gamma^2 b e^{-\gamma t}. \quad (1.25)$$

Первое соотношение дает нам

$$\gamma b e^{-\gamma t} = -v. \quad (1.26)$$

Подставляя это выражение во второе соотношение (1.25), получим

$$w = -\gamma v \equiv f(x, v, t). \quad (1.27)$$

Умножая функцию f на массу m , придем к выражению для силы:

$$F = -\gamma m v. \quad (1.28)$$

Последней процедурой исключается зависимость характеристики воздействия среды на частицу от массы последней. Поэтому величина

$$\gamma m \equiv k \quad (1.29)$$

называемая коэффициентом сопротивления, есть характеристика именно воздействия среды (зависящая также от симметрии «частицы»). С учетом обозначения (1.29), для искомой силы окончательно имеем

$$\vec{F} = -k\vec{v}. \quad (1.30)$$

2. Можно рассматривать в качестве опытного факта, что частица массы m , прикрепленная к пружине, при произвольных начальных условиях движется по некоторому эллипсу с центром в точке закрепления частицы, совершая два взаимно перпендикулярных гармонических колебания с одной и той же частотой ω . Поэтому, если начало системы координат поместить в указанную точку, взяв плоскость эллипса в качестве плоскости xOy , закон движения частицы будет записываться как

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ y &= C \cdot \cos \omega t + D \sin \omega t \end{aligned} \right\}, \quad (1.31)$$

где 4 константы определяются начальными условиями. Дифференцируя (1.31) два раза по времени, получим

$$\left. \begin{aligned} w_x \equiv \ddot{x} &= -\omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = -\omega^2 x \\ w_y \equiv \ddot{y} &= -\omega^2 (C \cdot \cos \omega t + D \sin \omega t) = -\omega^2 y \end{aligned} \right\}, \quad (1.32)$$

т.е.

$$\vec{w} = -\omega^2 \vec{r} \equiv \vec{f}(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (1.33)$$

Поэтому для силы $\vec{F} = m\vec{f}$ будем иметь

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}^2. \quad (1.34)$$

Величина

$$m\omega^2 \equiv k, \quad (1.35)$$

называемая коэффициентом упругости, не зависит от свойств частицы, а определяется исключительно свойствами пружины. С учетом обозначения (1.35) для искомой силы, которая называется упругой силой, получаем

$$\vec{F}_{\text{уп}} = -k\vec{r}. \quad (1.36)$$

С излагаемой точки зрения этот результат можно рассматривать как экспериментальный факт (плюс определение силы), поскольку в качестве такового мы приняли закон движения (1.31), являющийся отправным пунктом всех рассуждений. Этот опытный факт называется *законом Гука*.

Этот закон весьма важен с практической точки зрения, поскольку в той области, где он выполняется (а она достаточно узка), дает нам удобный способ измерения всякой другой статистической силы. Под последней понимается произведение массы частицы на ее ускорение при фиксированной конфигурации внешних тел. Для этого достаточно прикрепить частицу к пружине и воздействовать на эту частицу внешними телами. После некоторого переходного режима установится равновесие, т.е. ускорение частицы станет равным нулю. Поэтому, используя принцип суперпозиции, мы получим для измеряемой силы

$$\vec{F} = -\vec{F}_{\text{уп}} = k\vec{r}. \quad (1.37)$$

Как известно, на практике очень часто так и поступают. В частности, измеряя значения силы при разных конфигурациях тел, можно установить закон силы, т.е. явную зависимость произведения $m\vec{w}$ от положения и скоростей тел. В общем-то, именно таким способом был открыт закон Кулона. Только вместо пружины в качестве измерительного инструмента были использованы крутильные весы, что совершенно не меняет сути дела.

§2. Одномерное движение

Как упоминается в §1, даже для одной частицы уравнения движения (1.3) или (1.9) интегрируются в квадратурах лишь в исключительных случаях. Рассмотрим важный класс одночастичных систем, для которых эта задача существенно упрощается. Речь идет о силе, каждая компонента F_i которой зависит только от «своих» координаты x_i и проекции скорости \dot{x}_i :

$$F_i = F_i(x_i, \dot{x}_i, t) \quad [i=1,2,3]. \quad (2.1)$$

В этом случае система дифференциальных уравнений (1.3) расцепляется, и решение общей задачи (1.9) распадается на решение трех одномерных задач, сводясь фактически к исследованию одномерного движения частицы.

Одномерное движение – такое движение, в процессе которого частица перемещается вдоль прямой линии, которую мы примем за координатную ось Ox . Основным источником одномерных задач только что указан, причем они представляют и значительный самостоятельный интерес.

Ниже рассматривается *прямая одномерная задача*, которая ставится следующим образом. Известна сила, т.е. *уравнение движения* частицы

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \quad (2.2)$$

и заданы *начальные условия*

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0. \quad (2.3)$$

Требуется найти *закон движения* частицы $x = x(t)$.

Как мы знаем, главная часть решения задачи состоит в отыскании общего решения дифференциального уравнения (2.2), зависящего от двух произвольных постоянных:

$$x = x(t; c_1, c_2) \quad (2.4)$$

Константы интегрирования c_1 и c_2 находятся из начальных условий (2.3) посредством процедуры, описанной в §1. После ее проведения мы и получим *закон движения* частицы в виде зависимости

$$x = x(t; x_0, v_0) \quad (2.5)$$

Однако и дифференциальное уравнение (2.2) решается в квадратурах далеко не всегда. Интегрируемые случаи возникают, например, когда сила зависит лишь от какой-то одной переменной – t , \dot{x} или x . Кратко рассмотрим эти случаи.

1. Сила зависит от времени

Итак, известно, что

$$m\ddot{x} = F(t). \quad (2.6)$$

Интегрируя обе части этого уравнения по времени от начального момента t_0 до произвольного момента t , получим закон изменения скорости:

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau + v_0 \equiv v(t; v_0), \quad (2.7)$$

где автоматически учтено начальное условие $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Интегрируя (2.7) еще раз по тому же промежутку времени, придем к закону движения в форме

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(\mathcal{E}; v_0) d\mathcal{E} + x_0 = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t d\mathcal{E} \int_{t_0}^{\mathcal{E}} F(\tau) d\tau + v_0(t - t_0) + x_0, \quad (2.8)$$

где также учтено начальное условие: $x(0) = x_0$. Формулы (2.7) и (2.8) полностью решают поставленную задачу.

2. Сила зависит от скорости

В этом случае Второй закон Ньютона записывается как

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}). \quad (2.9)$$

Считая неизвестной функцию $\dot{x} \equiv v$, получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(v). \quad (2.10)$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m} dt. \quad (2.11)$$

Проводя интегрирование от t_0 до t , которым отвечают значения скорости v_0 и v , запишем

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m} (t - t_0). \quad (2.12)$$

Проводя интегрирование в явном виде и выражая из полученного алгебраического уравнения v , придем к закону изменения скорости:

$$v = v(t; v_0).$$

Интегрируя еще раз по времени, найдем закон движения:

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(\tau; v_0) d\tau + x_0. \quad (2.13)$$

3. Сила зависит от координаты

В этом наиболее важном случае уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x). \quad (2.14)$$

Умножая обе его части на \dot{x} , получаем

$$m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}F(x), \quad (2.15)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} \right) = F(x) \frac{dx}{dt}, \quad (2.16)$$

откуда

$$d(\dot{x}^2) = \frac{2}{m} F(x) dx. \quad (2.17)$$

Проводя интегрирование от t_0 до t , которым отвечают значения квадрата скорости v_0^2 и \dot{x}^2 и значения координаты x_0 и x , имеем:

$$\dot{x}^2 - v_0^2 = \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(\eta) d\eta. \quad (2.18)$$

Отсюда приходим к закону изменения скорости в зависимости от x :

$$\dot{x} = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(\eta) d\eta} \equiv v(x; x_0, v_0), \quad (2.19)$$

причем знак должен быть выбран таким, чтобы он совпадал со знаком начальной скорости v_0 .

Учитывая, что $\dot{x} = dx/dt$ и разделяя в (2.19) переменные, придем к уравнению

$$\frac{dx}{v(x; x_0, v_0)} = dt. \quad (2.20)$$

Проводя интегрирование от t_0 до t , получим алгебраическое соотношение

$$\int_{x_0}^x \frac{d\eta}{v(\eta; x_0, v_0)} = t - t_0, \quad (2.21)$$

из которого найдем закон движения

$$x = x(t; x_0, v_0). \quad (2.22)$$

Дифференцируя (2.22) по времени или подставляя (2.22) в (2.19), найдем закон изменения скорости:

$$v = v(t; x_0, v_0). \quad (2.23)$$

В итоге задача оказывается полностью решенной.

Примеры

а) Пусть частица массы m прикреплена к концу пружины с коэффициентом упругости k . В нулевой момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат, т.е. $x(0) = 0$, и ей сообщили скорость $v_0 > 0$. Требуется найти закон движения и закон изменения скорости частицы.

Разумеется, эта задача об *одномерном гармоническом осцилляторе* достаточно тривиальна, и ее решение общеизвестно. Но мы найдем его методом, изложенным в п.3, полагая в общих формулах

$$F = -kx, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad v_0 = v_0. \quad (2.24)$$

Из (2.19) имеем

$$\dot{x} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{m} \int_0^x \eta d\eta} = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m} x^2} \equiv v(x; v_0). \quad (2.25)$$

Подставляя это выражение в (2.21), получим:

$$\begin{aligned} t &= \int_0^x \frac{d\eta}{v(\eta; v_0)} = \int_0^x \frac{d\eta}{\sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m} \eta^2}} = \frac{1}{v_0} \int_0^x \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{mv_0}} \eta\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{v_0} v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(\frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{k}{m}} \eta \right) \Big|_0^x = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(\frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{k}{m}} x \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем закон движения гармонического осциллятора:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \equiv A \cdot \sin \omega t. \quad (2.26)$$

Дифференцируя (2.26) по времени или подставляя (2.26) в (2.25), найдем закон изменения скорости:

$$v = v_0 \cdot \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \equiv v_0 \cos \omega t. \quad (2.27)$$

б) Пусть интенсивность сгорания топлива в ракете равна dm/dt и продукты сгорания выбрасываются из сопла с относительной скоростью u . Получим уравнение движения ракеты.

Исходная проблема является на самом деле *многочастичной* – рассматривается система, состоящая в данный момент времени из остова ракеты с остатками топлива (одна «частица») и из выброшенного топлива (бесконечно много частиц). Наша задача как раз и состоит в сведении этой проблемы к *одночастичной*. Рассуждаем следующим образом. Сначала рассматриваем систему ракета – топливо как одну частицу. Тогда, как говорилось в предыдущей главе, для нее можно записать обычный Второй закон Ньютона

$$M\vec{W} = \vec{F} \quad (2.28)$$

или, что нам будет более удобным,

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = F. \quad (2.29)$$

Здесь M – полная масса системы, \vec{W} – ускорение ее центра инерции, \vec{F} – внешняя сила, действующая на систему (например, сила тяжести), \mathcal{P} – полный импульс системы.

Пусть в некоторый произвольный момент времени t масса ракеты равна m , ее скорость равна v . Найдем изменение импульса системы в целом за бесконечно малый промежуток времени dt :

$$d\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(t+dt) - \mathcal{P}(t) = \{(m-dm)(v+dv) + dm v_1\} - mv \approx m dv + dm(v_1 - v), \quad (2.30)$$

где v_1 – скорость выбрасываемого топлива относительно ИСО. Замечая, что разность $v_1 - v$ есть как раз относительная скорость топлива u , перепишем (2.30) в виде

$$d\mathcal{P} = m dv + u dm. \quad (2.31)$$

Подстановка этого выражения во Второй закон в форме (2.29) дает

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} \equiv m \frac{dv}{dt} + u \frac{dm}{dt} = F.$$

И в итоге мы приходим к уравнению Мещерского:

$$m \frac{dv}{dt} = F - \frac{dm}{dt} u. \quad (2.32)$$

в) Применим полученный результат к решению задачи Циолковского. Пусть внешних сил нет ($F=0$), а относительная скорость продуктов сгорания постоянна и равна u . В начале движения скорость равна v_0 , а ее масса – m_0 . Найдем скорость ракеты в тот момент, когда ее масса станет равной m .

Полагая в уравнении Мещерского $F=0$, получим следующую цепочку равенств:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} u \Rightarrow m dv = -u dm \Rightarrow dv = -u \frac{dm}{m} \Rightarrow v = -u \ln m + A.$$

Константу интегрирования A находим из начального условия:

$$v_0 = -u \ln m_0 + A \Rightarrow A = v_0 + u \ln m_0.$$

В итоге приходим к следующему значительному результату:

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m}. \quad (2.33)$$

В частности, когда выгорит все топливо, ракета обретет некоторую скорость V , с которой дальше она и будет двигаться. Если обозначить через M массу остова ракеты, а через μ – массу всего топлива (так что $m_0 = M + \mu$), то из (2.33) получим

$$V = v_0 + u \ln \left(1 + \frac{\mu}{M} \right). \quad (2.34)$$

Отсюда видно, сколь сложные проблемы встают перед космонавтикой – увеличение массы топлива приводит к возрастанию конечной скорости ракеты всего лишь по логарифмическому закону.

Уравнение Мещерского (2.32) заслуживает комментария. В литературе почти повсеместно можно услышать высказывание, что Второй закон Ньютона в форме (2.29) является более общим, чем Второй закон Ньютона в форме (2.28). Аргументируют это тем, что он применим и для движения тел с *переменной массой*, тогда как уравнение (2.28) в этом случае непригодно. И в качестве примера приводят как раз движение ракеты.

Встанем на эту точку зрения и проведем следующую выкладку:

$$\frac{dp}{dt} = F \Rightarrow \frac{d(mv)}{dt} = F \Rightarrow m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v = F,$$

т.е.

$$m \frac{dv}{dt} = F - \frac{dm}{dt} v. \quad (2.35)$$

В итоге мы приходим к уравнению, отличающемуся от уравнения Мещерского, а значит, получаем неверный результат.

Ошибка связана как раз с исходной посылкой, что уравнение (2.29) обладает универсальной областью применимости. Это, конечно, так, но это же относится и к уравнению типа (2.28). Только нужно четко представлять себе, что величина F , стоящая в правых частях (2.28) и (2.29), – это сила, действующая на всю систему в целом, а не сила, действующая на ракету с остатками топлива. Особенно четко это видно в случае, когда $F = 0$. Сила, действующая на всю систему, здесь равна нулю (как в задаче Циолковского), но сила, действующая на ракету, отлична от нуля – иначе почему бы ей ускоряться? Но эта вторая сила непосредственно не может быть учтена, так как не известен ее вид. Уравнение Мещерского как раз и определяет его: сила, действующая на ракету со стороны топлива, в данный момент времени равна

$$F' = - \frac{dm}{dt} u. \quad (2.36)$$

§ 3. Первые интегралы и законы сохранения

Отыскание закона движения свободной частицы при заданной силе сводится к решению системы трех дифференциальных уравнений второго порядка

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \quad (3.1)$$

которое, грубо говоря, включает *6 интегрирований*. Эта задача существенно упрощается, если известны какие-то первые интегралы дифференциальных уравнений движения – короче, интегралы движения.

Определение. *Интегралом движения* называется такая комбинация координат частицы, компонент ее скорости и времени, которая не изменяет свое значение в процессе движения:

$$\varphi(\vec{r}, \vec{v}, t) = const. \quad (3.2)$$

Очевидно, что константа в (3.2) равна значению левой части, вычисленному в начальный момент времени t_0 :

$$const \equiv \varphi_0 = \varphi(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0), \quad (3.3)$$

т.е. определяется начальными условиями.

Если мы каким-то способом умудрились найти общее решение уравнений движения (3.1)

$$\vec{r} = \vec{r}(t; c_1, \dots, c_6), \quad (3.4)$$

то интегралы движения находятся тривиально. Действительно, дифференцируя (3.4) по времени, получим общий закон изменения скорости

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t; c_1, \dots, c_6). \quad (3.5)$$

Разрешая теперь соотношения (3.4) – (3.5) относительно констант интегрирования, мы и придем к 6 интегралам движения:

$$c_\alpha = \varphi_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = const \equiv \varphi_{0\alpha} \quad / \alpha=1, \dots, 6/. \quad (3.6)$$

Гораздо интереснее обратная ситуация, когда из каких-то дополнительных соображений найдены первые интегралы. Если их 6, то разрешая 6 соотношений типа (3.2) относительно \vec{r} и \vec{v} , мы получим закон движения частицы и закон изменения ее скорости, которые наряду с временем t будут включать 6 констант, определяемых начальными условиями.

Однако столь идеальный случай практически, к сожалению, никогда не реализуется. Даже в благоприятной ситуации удастся установить лишь l интегралов движения, где $l < 6$. Зная их, мы не получим полного решения задачи. Но процедура его отыскания все же упростится, так как теперь вместо 6 интегрирований потребуется всего $6-l$ интегрирований. Например, если известно 3 интеграла, то три уравнения (3.1), имеющих второй порядок по времени, заменятся тремя дифференциальными уравнениями первого порядка.

Примеры

1. Этот пример тривиален – рассматривается изолированная частица с уравнением движения

$$\ddot{\vec{r}} = 0. \quad (3.7)$$

(Его можно рассматривать или как определение ИСО, или как Второй закон Ньютона с $\vec{F} = 0$, что по сути дела одно и то же). Тем не менее, он хорошо иллюстрирует процедуру отыскания интегралов движения по общему решению уравнений движения и процедуру отыскания закона движения по известным интегралам движения (по двум векторным или по какому-то одному из них).

Интегрируя два раза (а фактически 6 раз) уравнение (3.7), получим следующие зависимости с двумя векторными константами:

$$\vec{v} = \vec{A}, \quad \vec{r} = \vec{A}t + \vec{B}. \quad (3.8)$$

Разрешая их относительно постоянных интегрирования, найдем интегралы движения:

$$\vec{A} = \vec{v} = const, \quad \vec{B} = \vec{r} - \vec{v}t = const. \quad (3.9)$$

Наоборот, пусть нам из каких-то соображений известны эти интегралы движения, т.е. мы знаем, что

$$\vec{v} = \vec{A}, \quad \vec{r} - \vec{v}t = \vec{B}. \quad (3.10)$$

Решая (3.10) относительно \vec{r} и \vec{v} , найдем

$$\vec{v} = \vec{A}, \quad \vec{r} = \vec{A}t + \vec{B}. \quad (3.11)$$

Константы \vec{A} и \vec{B} определяются из начальных условий:

$$\vec{v}_0 = \vec{A}, \quad \vec{r}_0 = \vec{A}t_0 + \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A} = \vec{v}_0 \\ \vec{B} = \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t_0 \end{cases}. \quad (3.12)$$

Подстановка (3.12) в (3.11) дает нам закон движения частицы и закон изменения ее скорости:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0), \quad \vec{v} = \vec{v}_0. \quad (3.13)$$

Пусть теперь задан лишь один векторный интеграл движения (3.10) скажем первый из них:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{A}. \quad (3.14)$$

Интегрируя по времени, получим для радиус-вектора частицы

$$\vec{r} = \vec{A}t + \vec{B}. \quad (3.15)$$

Определяя константы \vec{A} и \vec{B} из начальных условий, вновь придем к законам (3.13). Заметим, что в отличие от первоначальной процедуры, которая привела нас к (3.8), здесь для

решения задачи требуется лишь интегрирование уравнения (3.14), имеющего первый порядок по времени.

Пусть теперь известен лишь второй из интегралов движения (3.10):

$$\vec{r} - \vec{v}t \equiv \vec{r} - \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot t = \vec{B}. \quad (3.16)$$

Разделяя здесь переменные, имеем

$$\frac{d\vec{r}}{\vec{r} - \vec{B}} = \frac{dt}{t} \quad (3.17)$$

(в делении векторов ничего страшного здесь нет, поскольку $d\vec{r}$ и $\vec{r} - \vec{v}t$ коллинеарны). Проводя интегрирование и обозначая константу через $\ln \vec{A}$, имеем

$$\ln(\vec{r} - \vec{B}) = \ln t + \ln \vec{A},$$

откуда получаем общее решение исходной задачи:

$$\vec{r} = \vec{A}t + \vec{B}. \quad (3.18)$$

Дифференцируя по времени и определяя \vec{A} и \vec{B} из начальных условий, вновь приходим к (3.13). И здесь потребовалось лишь одно интегрирование, хотя практически проще, конечно, решать исходное уравнение движения (3.7), чем дифференциальное уравнение (3.16).

2. Второй пример чуть менее тривиален – рассмотрим одномерный гармонический осциллятор с уравнением движения

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (3.19)$$

Как мы знаем, его общее решение имеет вид

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t \left(\omega^2 \equiv \frac{k}{m} \right), \quad (3.20a)$$

откуда получаем и общий закон изменения скорости:

$$\dot{x} = -\omega(a \sin \omega t - b \cos \omega t). \quad (3.20б)$$

Разрешая (3.20) относительно констант a и b , найдем два интеграла движения:

$$\left. \begin{aligned} 2a \equiv A &= x \cos \omega t - \frac{\dot{x}}{\omega} \sin \omega t = const \\ 2b \equiv B &= x \sin \omega t + \frac{\dot{x}}{\omega} \cos \omega t = const \end{aligned} \right\}. \quad (3.21)$$

Полученные интегралы движения имеют весьма сложный вид, и предугадать их практически невозможно. Поэтому здесь сама постановка задачи об отыскании закона движения по интегралам движения (3.21), хотя формально и возможна, но по существу довольно бессмысленна.

Исключим, однако, из (3.21) время. Для этого достаточно возвести обе части каждого из соотношений (3.21) в квадрат, и результаты сложить:

$$\frac{\dot{x}^2}{\omega^2} + x^2 = A^2 + B^2 \equiv C^2. \quad (3.22)$$

В итоге мы получаем еще один интеграл движения. Разумеется он не является независимым от (3.21), но зато, как мы увидим вскоре, имеет глубокий физический смысл. А потому, в частности, его можно предугадать сразу, не решая задачу.

Задание интеграла (3.22) равнозначно заданию дифференциального уравнения первого порядка по времени. С уравнением именно такого типа мы уже встречались в одном из примеров предыдущего параграфа. Поэтому не будем останавливаться на его исследовании и сразу приведем окончательный ответ:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (3.23)$$

Он получается путем интегрирования уравнения (3.22) (в котором разделяются переменные) с учетом начальных условий $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

Итак, знание интегралов движения существенно упрощает решение динамических задач. Но откуда их брать? На этот вопрос всегда существует, разумеется, тривиальный ответ. Следует найти общее решение дифференциального уравнения (3.1), а затем выразить константы интегрирования через \vec{r} и \vec{v} . Но мы-то как раз и хотим упростить процедуру решения этого уравнения с помощью интегралов движения.

Рассмотренные примеры учат нас, что интеграл интегралу рознь. В первом из них постоянство скорости изолированной частицы можно предугадать сразу – хотя бы просто на основании определения ИСО. Во втором примере интеграл (3.22) также выглядит гораздо «приятнее», чем интегралы (3.21). В чем же здесь дело?

Оказывается, что существует 7 специальных интегралов движения, обладающих следующими важными свойствами. Если для данной конкретной системы эти интегралы вообще имеются, то

- а) они не содержат времени, т.е. имеют вид

$$\varphi(\vec{r}, \vec{v}) = Const; \quad (3.24)$$

б) их можно получить, не решая уравнений движения, а исходя из неких общих теорем динамики;

в) их можно получить, не решая уравнений движения и не прибегая к общим теоремам динамики, а исходя прямо из фундаментальных свойств симметрии пространства и времени (в нашей задаче о движении частицы во внешнем поле – из свойств симметрии этого поля).

Кроме того, при рассмотрении движения не одной частицы, а системы частиц, подобные интегралы обладают еще одним важным свойством – свойством аддитивности. Оно состоит в том, что значение интеграла движения для системы, разбитой на две не взаимодействующие друг с другом подсистемы, равно сумме значений интегралов движения для каждой из подсистем в отдельности. При этом для шести из семи таких интегралов требование отсутствия взаимодействия между подсистемами оказывается даже излишним.

Указанные особенности обсуждаемых интегралов движения возводят их в ранг фундаментальных законов природы, а потому они заслуживают специального названия.

Определение. Интегралы движения, не содержащие времени и являющиеся следствиями общих свойств симметрии пространства и времени, а также обладающие свойствами аддитивности для систем частиц, называются *законами сохранения*.

Именно к классу законов сохранения относятся интеграл движения (3.14) в нашем первом примере и интеграл движения (3.22) во втором примере.

§4. Общие теоремы динамики и законы сохранения

Рассмотрим процедуру получения законов сохранения из так называемых общих теорем динамики. Исходным пунктом всех рассуждений является, разумеется, уравнение движения частицы, т.е. Второй закон Ньютона:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \quad \text{или} \quad m\dot{\vec{v}} = \vec{F}. \quad (4.1)$$

1. Закон сохранения импульса

Учитывая постоянство массы, внесем ее в (4.1) под знак производной:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \quad (4.2)$$

Определение. Величина

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (4.3)$$

называется *импульсом* частицы.

Теорема 1. Скорость изменения импульса частицы равна действующей на нее силе:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (4.4)$$

Это утверждение вытекает из (4.2) и (4.3).

Закон сохранения импульса. Если на частицу не действует сила, то ее импульс сохраняется:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}. \quad (4.5)$$

Пример. Для изолированной частицы по определению $\vec{F} = 0$, а потому $\vec{p} = \text{const}$, т.е.

$$\vec{v} = \text{const},$$

и мы приходим к одному из интегралов движения из первого примера §3. Других примеров не существует. Столь тривиальная ситуация возникает просто потому, что рассматривается система, состоящая всего из одной частицы.

Закон сохранения компоненты импульса

Если сила \vec{F} такова, что ее проекция $F_{\vec{\tau}}$ на фиксированное направление, задаваемое единичным вектором $\vec{\tau}$, равна нулю, то соответствующая компонента сохраняется:

$$F_{\vec{\tau}} = 0 \Rightarrow p_{\vec{\tau}} = \text{const}. \quad (4.6)$$

Для доказательства достаточно умножить обе части уравнения (4.4) скалярно на вектор $\vec{\tau}$.

Пример. Пусть частица движется вблизи поверхности Земли, и сила сопротивления отсутствует. Сила тяжести направлена по вертикали, потому обе горизонтальные компоненты импульса сохраняются. Если ось Oz направлена по вертикали, то

$$p_\tau = const \Rightarrow v_\tau = const. \quad (4.7)$$

Этот пример хотя и тривиален, но уже чуть более содержательный, чем предыдущий.

2. Закон сохранения момента импульса

Умножим обе части уравнения движения (4.1) слева векторно на \vec{r}

$$[\vec{r}, m\dot{\vec{v}}] = \vec{F}. \quad (4.8)$$

Преобразуем левую часть, вынося производную по времени:

$$\left[\vec{r}, \frac{d(m\vec{v})}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r}, m\vec{v}] - \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r}, m\vec{v}] - m[\vec{v}, \vec{v}] = \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{p}].$$

Это позволяет переписать (4.8) в виде

$$\frac{d[\vec{r}, \vec{p}]}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (4.9)$$

Определение . Величина

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] \quad (4.10)$$

называется *моментом импульса* частицы, а величина

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] - \quad (4.11)$$

– *моментом силы*.

Теорема 2. Скорость изменения момента импульса частицы равна моменту действующей на нее силы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (4.12)$$

Это утверждение следует из (4.9) и из определения (4.10) – (4.11).

Закон сохранения момента импульса

Если момент силы, действующей на частицу, равен нулю, то ее момент импульса сохраняется:

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const. \quad (4.13)$$

Примеры

1. Для изолированной частицы $\vec{F} = 0$, и тем более $\vec{M} = 0$, а потому момент импульса сохраняется. Но, в отличие от ситуации с сохранением импульса, этот тривиальный пример не является исчерпывающим даже для одной частицы.

2. Нетривиальный пример дает нам случай, когда сила все время направлена в одну точку (или от нее), которую мы выберем за начало отсчета:

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = F(\vec{r}, \vec{v}, t) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (4.14)$$

Очевидно, что момент этой силы равен нулю:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = \frac{1}{r} F [\vec{r}, \vec{r}] = 0,$$

а потому момент импульса частицы, на которую она действует, сохраняется. Наиболее важный пример силы типа (4.14) – центральная сила, движение под действием которой ниже анализируется весьма подробно.

Заметим, что момент импульса очень просто связан с векторной скоростью

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{v}], \quad (4.15)$$

введенной в главе 1. Из определений (4.10) и (4.15) имеем

$$\vec{L} = 2m \vec{\sigma}. \quad (4.16)$$

Поэтому закон сохранения момента импульса равнозначен закону сохранения векторной скорости, который применительно к движению планет вокруг Солнца называется Вторым законом Кеплера.

3. Закон сохранения энергии

Умножим обе части уравнения движения (4.1) скалярно на $d\vec{r}$:

$$(m\dot{\vec{v}}, d\vec{r}) = (\vec{F}, d\vec{r}). \quad (4.17)$$

Преобразуя левую часть как

$$\left(m \frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r} \right) = m \left(d\vec{v}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = m(\vec{v}, d\vec{v}) = d \left(\frac{mv^2}{2} \right),$$

получим

$$d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = (\vec{F}, d\vec{r}), \quad (4.18)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = (\vec{F}, \vec{v}). \quad (4.19)$$

Определение. Величина

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (4.20)$$

называется *кинетической энергией* частицы, а

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) \quad (4.21)$$

– *элементарной работой* силы \vec{F} на перемещении $d\vec{r}$.

Теорема 3. Изменение кинетической энергии частицы при ее перемещении на $d\vec{r}$ равно элементарной работе силы на этом перемещении:

$$dT = \delta A. \quad (4.22)$$

Этот результат, в старину называвшийся почему-то «теоремой живых сил», следует из (4.19) и определений (4.21) – (4.22).

Иногда теорему 3 формулируют несколько иначе, имея в виду соотношение (4.19), эквивалентное, конечно, соотношению (4.18).

Определение. Величина

$$\mathcal{P} = (\vec{F}, \vec{v}) \quad (4.23)$$

называется *мощностью* силы в данный момент времени.

Теорема 3'. Скорость изменения кинетической энергии частицы равна мощности, действующей на нее силы:

$$\frac{dT}{dt} = \mathcal{P}. \quad (4.24)$$

Вернемся, однако, к соотношению (4.22). Слева стоит *полный дифференциал* кинетической энергии. Кинетическая энергия, как и импульс и момент импульса, является *функцией состояния* частицы. Справа же, в (4.22) фигурирует величина, *не являющаяся* полным дифференциалом никакой функции состояния, откуда и обозначение δA вместо dA .

Интегрируя (4.22) по дуге M_0M кривой, вдоль которой движется частица, получим

$$T - T_0 = \int_{\widetilde{M_0M}} \delta A \equiv \int_{\widetilde{M_0M}} (\vec{F}, d\vec{r}). \quad (4.25)$$

Определение. Величина

$$A = \int_{\widetilde{M_0M}} (\vec{F}, d\vec{r}) \quad (4.26)$$

называется *работой* силы \vec{F} , производимой ею над частицей на участке траектории $\widetilde{M_0M}$.

С учетом этого определения результат (4.25) можно сформулировать следующим образом:

изменение кинетической энергии частицы на участке траектории M_0M равно работе силы на этом участке:

$$T - T_0 = A. \quad (4.27)$$

Поскольку величина δA не есть полный дифференциал, постольку и работа A зависит не только от начального и конечного состояний частицы, но и от характера ее движения по дуге траектории M_0M – в частности, от формы этой дуги. В этом смысле говорят, что работа есть *функция процесса* (а не функция состояний).

В общей ситуации вычисление работы силы, производимой ею над частицей, весьма обременительно. Попробуйте сказать, например, какую работу совершает сила сопротивления $\vec{F} = -k\vec{v}$ над частицей, которая прошла путь S , двигаясь по прямой линии. Вычисление работы требует на самом деле полного решения задачи, т.е. знание закона движения. Если он известен, то можно поступить следующим образом:

$$A = \int_{\widetilde{M_0M}} (\vec{F}, d\vec{r}) \equiv \int_{t_0}^t \left(\vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt \equiv \int_{t_0}^t (\vec{F}, \vec{v}) dt,$$

т.е.

$$A = \int_{t_0}^t \left(\vec{F} [\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t], \dot{\vec{r}}(t) \right) dt. \quad (4.28)$$

Тем не менее, существуют силы, как раз наиболее важные с принципиальной точки зрения, для которых все указанные усложнения не возникают.

Определение. Сила F называется *потенциальной*, если она не зависит от скорости:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t), \quad (4.29)$$

и если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) криволинейный интеграл

$$V(\widetilde{M_0M}; t) \equiv \int_{\widetilde{M_0M}} \left(\vec{F}(\vec{r}, t) \Big|_{t=Const}, d\vec{r} \right) \quad (4.30)$$

зависит только от точек M_0 и M (и от времени, как от параметра);

б) для любого замкнутого контура

$$\oint_L \left(\vec{F}(\vec{r}, t) \Big|_{t=Const}, d\vec{r} \right) = 0; \quad (4.31)$$

в) $\exists U(\vec{r}, t): \vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}, t); \quad (4.32)$

$$\text{г) } \quad \text{rot } \vec{F}(\vec{r}, t) = 0. \quad (4.33)$$

В математическом анализе достаточно просто устанавливается эквивалентность условия (а) – (г), причем в процессе доказательства довольно существенно используется теорема Стокса:

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{\Sigma} (\text{rot } \vec{F}, d\vec{s}). \quad (4.34)$$

Подчеркнем, что несмотря на внешнее сходство определений (4.26) и (4.30), вводимые ими понятия в общем случае различны. Первое определение вводит работу, которая вычисляется для реального движения частицы, при переменном времени t , по формуле типа (4.28). Определение же (4.30) вводит некую величину, которая зависит от времени, как от параметра, – при вычислении интеграла время считается «замороженным». Два этих понятия совпадают лишь в том случае, когда сила явно не зависит от времени. Кстати, он и является самым важным, и вскоре мы к нему вернемся.

А сейчас обратимся к теореме 3. Имея в виду принцип суперпозиции, представим силу \vec{F} в виде суммы двух слагаемых:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{ном}} + \vec{F}_{\text{неном}}, \quad (4.35)$$

где $\vec{F}_{\text{ном}}$ – потенциальная сила, а $\vec{F}_{\text{неном}}$ – непотенциальная. В соответствии с разбиением силы (4.35), разбивается на два слагаемых и элементарная работа:

$$\delta A = (\delta A)_{\text{ном}} + (\delta A)_{\text{неном}}, \quad (4.36)$$

где

$$(\delta A)_{\text{ном}} = (\vec{F}_{\text{ном}}, d\vec{r}) \quad (4.37)$$

и

$$(\delta A)_{\text{неном}} = (\vec{F}_{\text{неном}}, d\vec{r}). \quad (4.38)$$

Преобразуем выражение для $(\delta A)_{\text{ном}}$, имея в виду свойство (4.32) для потенциальной силы:

$$\begin{aligned} (\delta A)_{\text{ном}} &= (\vec{F}_{\text{ном}}, d\vec{r}) = -(\vec{\nabla}U, d\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) \equiv \\ &\equiv -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt\right) + \frac{\partial U}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Замечая, что в скобках стоит полный дифференциал функции $U(\vec{r}, t)$, запишем этот результат в форме

$$(\delta A)_{\text{ном}} = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (4.39)$$

Теперь закон изменения кинетической энергии (4.22) можно записать как

$$dT = -dU + (\delta A)_{\text{неном}} + \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (4.40)$$

Определение. Функция $U(\vec{r}, t)$, определяемая условием (4.32), называется *потенциальной энергией* частицы в поле силы $\vec{F}_{ном}$, и величина

$$E = T + U \quad (4.41)$$

называется *механической энергией* частицы.

С учетом этого определения закон изменения кинетической энергии частицы (4.40) представляется в форме закона изменения ее механической энергии:

$$dE = \frac{\partial U}{\partial t} dt + (\delta A)_{неном}, \quad (4.42)$$

или, после деления на элемент времени dt ,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + (\vec{F}_{неном}, \vec{v}). \quad (4.43)$$

Рассмотрим теперь непотенциальную часть (4.38) элементарной работы. Здесь, прежде всего, встает вопрос, какие силы в классической механике относятся к числу непотенциальных (примеры потенциальных сил будут приведены ниже).

а) *Диссипативная сила* \vec{F}_d – действует со стороны вязкой среды и направлена в сторону, противоположную скорости частицы:

$$\vec{F}_d = -f(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot \vec{v}, \quad (4.44)$$

где f – положительная скалярная функция. Мощность диссипативной силы отрицательна:

$$P_d \equiv (\vec{F}_d, \vec{v}) = -fv^2 < 0. \quad (4.45)$$

К числу диссипативных сил относится сила, уже неоднократно нам встречающаяся:

$$\vec{F}_d = -k \cdot \vec{v}, \quad (4.46)$$

где k – постоянный положительный коэффициент. Ее мощность равна

$$P_d = -kv^2. \quad (4.47)$$

б). *Гирскопическая сила* – линейно зависит от скорости частицы и всегда направлена перпендикулярно вектору скорости. Наиболее важный пример – *магнитная часть силы Лоренца*

$$\vec{F}_B = e[\vec{v} \vec{B}]. \quad (4.48)$$

При описании движения частицы в *неинерциальных* (вращающихся) системах отсчета возникает еще один пример гирскопической силы – *кориолисова сила*

$$\vec{F}_C = 2m[\vec{v}\vec{\omega}]. \quad (4.49)$$

Собственно, других примеров гироскопических сил и не существует. С рассматриваемой точки зрения они являются весьма «хорошими», так как мощность, а стало быть и работа, гироскопической силы равна нулю:

$$P_g = 0 \Leftrightarrow (\delta A)_g = 0. \quad (4.50)$$

в) *Прочие силы* \vec{F}' – это силы, не являющиеся потенциальными, диссипативными и гироскопическими. К ним относятся, например, так называемые силы реакции – в частности, сила сухого трения. Как правило, мощность этих сил отрицательна, хотя это и не является обязательным. Работу этих сил будем снабжать штрихом.

С учетом сказанного законы изменения механической энергии (4.42) и (4.43) переписываются окончательно следующим образом:

$$dE = \frac{\partial U}{\partial t} dt + (\vec{F}_d, d\vec{r}) + \delta A' \quad (4.51)$$

и

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} - f(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot v^2 + p', \quad (4.52)$$

где p' – мощность «прочих» сил.

Теперь становится совершенно ясным, при каких условиях выполняется закон сохранения механической энергии частицы. Прежде, чем формулировать его, введем еще два понятия.

Определение. Сила \vec{F} называется *стационарной*, если она не зависит явно от времени:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}). \quad (4.53)$$

Определение. Сила называется *консервативной*, если она потенциальна и стационарна, т.е.

$$\exists U = U(\vec{r}): \vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}). \quad (4.53)$$

В случае, когда сила является не просто потенциальной, но и консервативной, все понятия существенно упрощаются, поскольку величина $V(\widetilde{M_0M})$, определяемая формулой (4.30), обретает смысл работы:

$$V(\widetilde{M_0M}) = \int_{\widetilde{M_0M}} (\vec{F}, d\vec{r}) = A_{\widetilde{M_0M}} \equiv A_{M_0M}, \quad (4.54)$$

причем эта работа зависит только от начальной и конечной точек участка траектории, по которой движется частица. Она, если угодно, является аналогом *напряжения* в электростатике.

Кроме того, потенциальная энергия в случае консервативной силы обретает простой физический смысл. Чтобы выяснить его, достаточно проделать следующую очевидную выкладку:

$$A_{M_0M} = \int_{M_0}^M (\vec{F}, d\vec{r}) = - \int_{M_0}^M (\vec{\nabla}U, d\vec{r}) = - \int_{M_0}^M dU(\vec{r}),$$

откуда

$$A_{M_0M} = U(M_0) - U(M). \quad (4.55)$$

Таким образом, потенциальная энергия – эта такая функция положения, разность значений которой в начальной и конечной точках определяет работы силы на соответствующем участке траектории.

Сила находится по потенциальной энергии простым дифференцированием:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}). \quad (4.56)$$

В частности, для компоненты силы в направлении $\vec{\tau}$ имеем

$$F_{\tau} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \tau}, \quad (4.57)$$

где справа стоит производная от функции $U(\vec{r})$ по направлению $\vec{\tau}$, которая определяется в математическом анализе.

Обратная задача – нахождение потенциальной энергии по силе – решается интегрированием. Действительно, из (4.55) имеем

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (\vec{F}, d\vec{\rho}). \quad (4.58)$$

Даже если точка \vec{r}_0 задана, потенциальная энергия не определена однозначным образом, так как значение $U(\vec{r}_0)$ можно выбрать любым. При добавлении к $U(\vec{r}_0)$ произвольной константы она же добавится и к $U(\vec{r})$. В результате только и имеющая непосредственный смысл работа A_{M_0M} не изменится. Таким образом, потенциальная энергия определена с точностью до аддитивной постоянной.

Мало того, в (4.58) и сама начальная точка M_0 может быть совершенно произвольной. Обычно поступают следующим образом. Фиксируют какую-то наиболее удобную точку M_0 (часто в качестве таковой выбирают бесконечно удаленную точку) и полагают в ней потенциальную энергию равной нулю. Тогда потенциальная энергия в произвольной точке будет вычисляться по формуле

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (\vec{F}, d\vec{\rho}). \quad (4.59)$$

Легко видеть, что теперь нуль потенциальной энергии фиксируется автоматически, так как из (4.59)

$$U(\vec{r}_0) = 0. \quad (4.60)$$

Примеры

1. Однородное силовое поле

$$\vec{F}(\vec{r}) = \text{const} \equiv \vec{F}_0 \quad (4.61)$$

является консервативным, так как сила не зависит от времени, и, кроме того, $\text{rot } \vec{F}_0 = 0$. Потенциальная энергия в этом случае равна

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (\vec{F}_0, d\vec{\rho}) = -\left(\vec{F}_0, \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{\rho} \right) = -(\vec{F}_0, \vec{r} - \vec{r}_0). \quad (4.62)$$

Если в качестве точки отсчета выбрать начало координат ($\vec{r}_0 = 0$), то получим

$$U(\vec{r}) = -(\vec{F}_0, \vec{r}). \quad (4.63)$$

В частности, если ось Oz направить вдоль силы, то (4.62) превратится в

$$U(\vec{r}) = -F_0 z. \quad (4.64)$$

Наоборот, пусть известно, что потенциальная энергия задается формулой (4.63) векторного анализа. Для нахождения силы воспользуемся формулой

$$\text{grad}(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}, \vec{\nabla})\vec{a} + [\vec{a}, \text{rot } \vec{b}] + [\vec{b}, \text{rot } \vec{a}]. \quad (4.65)$$

С учетом (4.56) имеем:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla}U = -\vec{\nabla}\{-(\vec{F}_0, \vec{r})\} = \vec{\nabla}(\vec{F}_0, \vec{r}) = (\vec{F}_0, \vec{\nabla})\vec{r} = \\ &= \left(F_{ox} \frac{\partial}{\partial x} + F_{oy} \frac{\partial}{\partial y} + F_{oz} \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = F_{ox}\vec{i} + F_{oy}\vec{j} + F_{oz}\vec{k}, \end{aligned}$$

т.е. приходим к (4.61). Если потенциальная энергия задана формулой (4.64), то выкладка будет совсем простой.

Конкретным примером однородного поля может служить электростатическое поле, действующее на заряд, помещенный внутрь плоского конденсатора с постоянным напряжением на пластинах. В этом случае

$$\vec{F} = e\vec{E}_0, \quad U(\vec{r}) = -e(\vec{E}_0, \vec{r}). \quad (4.66)$$

Другой пример – поле тяжести вблизи поверхности Земли:

$$\vec{F} = m\vec{g}, \quad U(\vec{r}) = mgz, \quad (4.67)$$

где начало координат помещено в одну из точек поверхности Земли, а ось OZ направлена вертикально вверх (благодаря чему произошла компенсация двух знаков «минус»).

Если в первом конкретном примере на обкладки конденсатора подается не постоянное, а переменное (гармоническое) напряжение, то силовое поле будет потенциальным, но не консервативным:

$$\vec{F} = e\vec{E}_0 \cos \omega t, \quad U(\vec{r}, t) = -(\vec{E}_0, \vec{r}) \cos \omega t. \quad (4.68)$$

2. *Центральное поле* – характеризуется тем, что сила все время направлена в одну точку (в силовой центр), которую мы выберем в качестве начала координат, а модуль силы зависит только от модуля радиуса-вектора:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (4.69)$$

Непосредственная выкладка, проводимая в курсе математического анализа, показывает, что

$$\text{rot} \left\{ F(r) \frac{\vec{r}}{r} \right\} = 0,$$

т.е. всякое центральное поле автоматически оказывается потенциальным. В этом можно убедиться и непосредственно, вычисляя работу центральной силы между любыми двумя точками M_0 и M :

$$\begin{aligned} A_{M_0 M} &= \int_{M_0}^M (\vec{F}, d\vec{\rho}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(F(\rho) \frac{\vec{\rho}}{\rho}, d\vec{\rho} \right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{F(\rho)}{\rho} (\vec{\rho} d\vec{\rho}) = \\ &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{F(\rho)}{\rho} \rho d\rho = \int_{r_0}^r F(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Таким образом, работа не зависит не только от формы участка кривой, по которой она вычисляется, но и от направлений радиусов-векторов \vec{r}_0 и \vec{r} – она определяется только расстояниями начальной и конечной точек от силового центра.

Если центральная сила постоянна по модулю или если ее модуль возрастает с ростом r , то в качестве начала отсчета потенциальной энергии выбирают обычно сам силовой центр, т.е. начало координат. Тогда, повторяя фактически только что проведенную выкладку, получим

$$U(r) = -\int_0^r F(r) dr.$$

Если же центральная сила убывает по модулю при возрастании r , то в качестве начала отсчета потенциальной энергии выбирают бесконечно удаленную точку ($r_0 = \infty$). В результате для этого случая имеем

$$U(r) = -\int_{+\infty}^r F(\rho) d\rho$$

или

$$U(r) = \int_r^{\infty} F(\rho) d\rho. \quad (4.70)$$

Здесь весьма поучительна обратная процедура – восстановление центральной силы по потенциальной энергии, выражение для которой мы запишем, не фиксируя точку \vec{r}_0 , и чуть более аккуратно, чем это делалось прежде:

$$U(r) = -\int_{r_0}^r F(\rho) d\rho \equiv -\varphi(r). \quad (4.71)$$

Для вычисления градиента от этой функции воспользуемся формулой векторного анализа:

$$\text{grad}\varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (4.72)$$

Имеем:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\vec{\nabla}\{-\varphi(r)\} = \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r} = \frac{d}{dr} \left\{ \int_{r_0}^r F(\rho) d\rho \right\} \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

как это и должно быть.

Конкретный пример центрального поля, потенциальную энергию которого удобно вычислять по формуле (4.59) дает нам изотропная квазиупругая сила

$$\vec{F} = -k\vec{r} \equiv -kr \frac{\vec{r}}{r}, \quad (k > 0). \quad (4.73)$$

Подстановка выражения

$$F(r) = -kr \quad (4.74)$$

в (4.59) сразу дает для потенциальной энергии

$$U(r) = \frac{kr^2}{2}. \quad (4.75)$$

Конкретный и важнейший пример центрального поля, потенциальную энергию которого удобно вычислять по формуле (4.70), дает нам ньютоново (или кулоново) поле

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (4.76)$$

где α – положительное (отталкивание) или отрицательное (притяжение) число. В этом случае

$$F(r) = \frac{\alpha}{r^2} \quad (4.77)$$

и из (4.60) для потенциальной энергии имеем

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}. \quad (4.78)$$

Встречаются и другие центральные поля, но в физике они играют гораздо меньшую роль, чем два только что указанных. Задачи об изотропном осцилляторе и о движении заряженной частицы в кулоновом поле играют фундаментальную роль не только в классической, но и в квантовой механике.

После столь пространного отступления о потенциальных силах вернемся к закону изменения механической энергии в его окончательной форме (4.51):

$$dE = \frac{\partial U}{\partial t} dt + (\vec{F}_d, d\vec{r}) + \delta A'.$$

Из него вытекает следующий результат фундаментальной важности.

Закон сохранения механической энергии

Если на частицу действуют только консервативные и гироскопические силы, то ее механическая энергия сохраняется:

$$E \equiv T + U = Const. \quad (4.79)$$

Здесь возникает естественный вопрос, куда же исчезает (или откуда притекает) механическая энергия частицы в общей ситуации. Сначала о члене с $\partial U / \partial t$ в (4.51). Нестационарность силы, действующей на частицу, как говорилось в свое время, равнозначна эффективному учету движения внешних тел, которые мы не включили в систему. Если же рассмотреть широкую систему «частица плюс все внешние тела», то этого члена не появится. Так что наличие слагаемого с $\partial U / \partial t$ равнозначно тому, что в разные моменты времени механическая энергия по-разному перераспределяется между частицей и внешними телами.

Теперь о диссипативном члене в (4.51), который всегда отрицателен, т.е. всегда уменьшает механическую энергию частицы. Если посмотреть на всю систему «частица + вязкая среда» под микроскопом, то мы увидим, что и в этом случае механическая энергия никуда не исчезает. Она просто от частицы перекачивается к молекулам среды. Но их движение непосредственно не наблюдаемо, а потому мы его и учитываем введением диссипативного члена. Отрицательный знак этого члена свидетельствует о необратимости процессов, протекающих в системах с огромным числом частиц. Кстати, в этом случае закон сохранения энергии можно спасти, но ценой введения еще одного вида энергии, помимо механической – тепловой энергии, которая и эквивалентна невидимой механической энергии движущихся и взаимодействующих молекул. Недаром в термодинамике этот вид энергии называется *внутренней энергией*.

Аналогичная ситуация имеет место и для всех «прочих» сил. Если выявить микроскопическую природу обусловленных ими процессов (точнее процессов, обуславливающих эти силы), то полная энергия всегда будет сохраняться. Это утверждение и составляет содержание одного из самых фундаментальных законов природы – *Закона Сохранения Энергии*.

§5. Законы сохранения и свойства симметрии

В данном параграфе обсуждается связь законов сохранения со *свойствами симметрии*, причем мы не будем выходить за рамки ньютоновой механики. Это последнее обстоятельство вынуждает нас использовать ряд дополнительных предположений. Кроме того, поскольку по-прежнему рассматривается одна частица, формулируемые ниже результаты оказываются в достаточной степени тривиальными. Наиболее адекватным образом связь законов сохранения с симметриями удастся проанализировать лишь в рамках лагранжева и в особенности гамильтонова формализма, и в своем месте мы к этой проблеме еще вернемся. К ней мы будем обращаться и в квантовой механике, где проблема получает свое наиболее простое, полное и изящное решение.

Прежде всего возникает вопрос – свойства симметрии ЧЕГО мы намерены рассматривать? Если бы речь шла о замкнутых системах частиц, то ответ был бы очевидным: здесь имеются в виду свойства симметрии *пространства и времени*, заключенные в полном принципе относительности. Таким образом, нужно анализировать однородность времени, однородность и изотропность пространства, симметрию между правым и левым, обратимость времени и частный принцип относительности Галилея.

Но в случае одной частицы понятие замкнутой системы становится тривиальным, вырождаясь в понятие изолированной частицы, для которой и так все известно. Чтобы и в этой ситуации получить какую-то содержательную информацию, следует трактовать концепции пространства и времени расширенно – как то физическое окружение, в котором движется наша частица. Иными словами, в данном контексте естественно вести разговоры о пространственно-временных свойствах симметрии *внешнего поля*, действию которого подвержена частица.

На этом этапе возникает еще один вопрос. А что мы, собственно говоря, имеем в виду, когда рассуждаем о симметрии внешнего поля? Общий ответ был сформулирован в гл. I, где было введено общее понятие преобразования инвариантности. С этой точки зрения симметрия внешнего поля означает ковариантность (неизменность формы) уравнения движения при том или ином преобразовании системы отсчета. Это есть *пассивная точка зрения*. Несколько более удобной в данном контексте оказывается *активная точка зрения*, согласно которой преобразованию подвергается не система отсчета, а сама физическая система – в нашем случае частица. Именно она сдвигается в пространстве и во времени, поворачивается вокруг какой-то оси и т.п.

Далее, *ковариантность* уравнений движения оказывается не совсем конструктивным требованием в свете извлечения следствий из свойств симметрии. Гораздо удобнее иметь

дело с какими-то критериями *инвариантности* – неизменности физического процесса или некоторой физической величины. Но и здесь возможны разные подходы. Мы начнем с самого простого из них, максимально наглядного, но тем не менее обладающего достаточной общностью. Затем будет развит чуть более общий анализ, основывающийся на требовании инвариантности некоторой физической величины и уже более приближенный к абстрактным формулировкам лагранжева и гамильтонова формализмов. При этом будут обсуждаться только однородность времени, однородность пространства и изотропность пространства. Дискретные симметрии (относительно пространственной инверсии и обращения времени) чужды духу классической физики, как вообще всякие элементы дискретности. Их уместно обсуждать в квантовой механике, где они приводят к весьма содержательным следствиям. Частный же принцип относительности стоит в механике (как классической, так и квантовой) несколько особняком – эта симметрия оказывается весьма специфической и требует особого рассмотрения.

1. Совсем предварительный анализ

В качестве исходного пункта рассуждений выберем Второй закон Ньютона и три теоремы динамики частиц, являющиеся его следствиями. При этом главенствующую роль играет теорема об изменении кинетической энергии:

$$dT = \delta A. \quad (5.1)$$

Как получаются законы сохранения из общих теорем, мы знаем. Но здесь задача ставится несколько иначе. Мы желаем выяснить, какими должны быть условия, т.е. свойства симметрии внешнего поля, чтобы выполнялись те предпосылки, при которых имеет место тот или иной закон сохранения.

а) Сохранение энергии

Исходим из соотношения (5.1) и считаем силу потенциальной, ибо это есть необходимое условие самих разговоров о механической энергии и о ее сохранении. Допустимо присутствие и гироскопических сил, которые в (5.1) вообще не фигурируют. При сделанных предположениях это соотношение переписывается следующим образом (см. §4):

$$d(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (5.2)$$

Однородность времени означает, что все его моменты равноправны: если при $t = t_1$ и при $t = t_2$ состояния частицы (начальные условия) одинаковы, то они будут одинаковыми и при $t' = t_1 + \tau$, и при $t'' = t_2 + \tau$. Но это может быть лишь в случае, когда сила, а значит и потенциальная энергия, от времени не зависит:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0. \quad (5.3)$$

Но тогда из (5.2) мы сразу придем к закону сохранения энергии:

$$E = \text{Const}. \quad (5.4)$$

Таким образом, он является следствием и потенциальности сил, и *однородности времени*.

б) Сохранение импульса

Исходим из теоремы об изменении импульса:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (5.5)$$

Пусть внешнее поле обладает свойством однородности в каком-то направлении, задаваемом единичным вектором $\vec{\tau}$. На конструктивном языке это означает, что движение частицы, начавшееся в точке \vec{r} , будет идентично (при прочих равных условиях) движению, начавшемуся в точке $\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}$, где

$$\delta\vec{r} = \delta a \cdot \vec{\tau} \equiv \delta\vec{a}, \quad \forall \delta a \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Иными словами, на перемещение частицы на вектор $\delta\vec{a}$ не требуется затраты никакой работы:

$$\delta A = (\vec{F}, \delta\vec{a}) = \delta a (\vec{F}, \vec{\tau}) = 0. \quad (5.7)$$

Сокращая на произвольное число δa , получим

$$(\vec{F}, \vec{\tau}) \equiv F_{\tau} = 0. \quad (5.8)$$

Умножая теперь обе части уравнения (5.5) скалярно на τ , придем к закону сохранения соответствующей компоненты импульса:

$$p_{\tau} = \text{Const}. \quad (5.9)$$

Если вектор смещения $\delta\vec{a}$ произволен, то мы получим $\vec{F} = 0$ и придем к закону сохранения вектора импульса:

$$\vec{P} = \text{Const}. \quad (5.10)$$

Таким образом, сохранение импульса действительно связано с *однородностью пространства*.

в) Сохранение момента импульса

Исходим из теоремы об изменении момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (5.11)$$

Пусть внешнее поле обладает свойством изотропности. Это означает, идентичность свойств поля в точках \vec{r} и $\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}$, где \vec{r}' получается из \vec{r} путем поворота частицы на произвольный бесконечно малый угол $\overline{\delta\varphi}$. Вспоминая кинематику твердого тела, имеем:

$$\delta\vec{r} = [\overline{\delta\varphi}, \vec{r}]. \quad (5.12)$$

Вычислим работу силы на таком перемещении:

$$\delta A = (\vec{F}, \delta\vec{r}) = (\vec{F}, [\overline{\delta\varphi}, \vec{r}]) = ([\vec{r}, \vec{F}], \overline{\delta\varphi}),$$

т.е.

$$\delta A = (\vec{M}, \overline{\delta\varphi}). \quad (5.13)$$

Благодаря изотропности пространства, эта работа должна равняться нулю:

$$(\vec{M}, \overline{\delta\varphi}) = 0, \quad (5.14)$$

откуда, имея в виду произвольность вектора $\overline{\delta\varphi}$,

$$\vec{M} = 0. \quad (5.15)$$

В итоге, из уравнения (5.11) получим закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L} = Const, \quad (5.16)$$

который, таким образом, есть следствие *изотропности пространства*.

Если поле обладает свойством изотропности лишь относительно какой-то фиксированной оси, задаваемой единичным вектором \vec{b} , т.е.

$$\delta\vec{r} = \delta\varphi [\vec{b}, \vec{r}], \quad (5.17)$$

то (5.14) – (5.15) дадут нам

$$\delta\varphi (\vec{M}, \vec{b}) \equiv \delta\varphi \cdot M_b = 0 \Rightarrow M_b = 0,$$

и мы будем иметь сохранение компоненты момента импульса – его проекции на ось симметрии:

$$M_b = Const. \quad (5.18)$$

Подчеркнем, что, как видно из приведенных выше выкладок, законы сохранения *не вытекают* из одних только свойств симметрии пространства – времени (в нашем случае – внешнего поля). При получении этих законов нужно обязательно привлекать еще и теоремы динамики, т.е., в конечном итоге, *уравнения движения*.

2. Чуть более общий анализ

Будем теперь считать силу потенциальной энергии не только при выводе закона сохранения энергии, но и при получении других законов сохранения. Это, конечно, некоторое ограничение, но не столь уж принципиальное с общей точки зрения. Собственно говоря, все *истинно механические силы* являются как раз потенциальными – просто по определению. Недаром только такие силы и рассматриваются в учебнике Ландау и Лифшица. Зато сделанное предположение дает весьма ощутимый выигрыш. Оно позволяет установить связь законов сохранения со свойствами симметрии, не прибегая к теоремам динамики, а пользуясь только Вторым законом Ньютона. Кроме того, соответствующий анализ оказывается максимально приближенным к анализу, который проводится в рамках лагранжева формализма. А именно там удастся установить общую теорему о связи законов сохранения со свойствами симметрии, носящую имя немецкого математика Эмми Нетер.

Известными теперь считаются Второй закон Ньютона

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (5.19)$$

и определения импульса, момента импульса и механической энергии. При этом под симметрией, как и всегда, понимается неизменность чего-то при том или ином преобразовании системы отсчета (см. гл. I)

$$x' = gx. \quad (5.20)$$

Сделаем небольшое отступление касательно одного обозначения, широко применяемого в современной физике и во многих хороших учебниках (см., например, курс Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, а также «Курс физики», т.т. I – II А.В. Астахова и Ю.М. Широкова). Ниже в качестве преобразований инвариантности (5.20) будут использоваться так называемые инфинитезимальные преобразования g , бесконечно мало отличающиеся от единичного. В более явной форме они записываются как

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}, \quad t' = t + \delta t; \quad \vec{v}' = \vec{v} + \delta\vec{v}, \quad (5.21)$$

где $\delta\vec{r}$, δt и $\delta\vec{v}$ – бесконечно малые величины. Преобразовывая какую-либо функцию $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, приходим к функции $f(\vec{r} + \delta\vec{r}, \vec{v} + \delta\vec{v}, t + \delta t)$, которую естественно разложить в ряд Тейлора по малым добавкам к аргументам. Вот тут-то и удобны следующие обозначения:

$$\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{r}} \equiv \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\} \equiv \vec{\nabla}f \quad (5.22a)$$

и

$$\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} \equiv \left\{ \frac{\partial f}{\partial v_x}, \frac{\partial f}{\partial v_y}, \frac{\partial f}{\partial v_z} \right\} \equiv \vec{\nabla}_v f. \quad (5.22b)$$

Их использование позволяет обращаться с функциями векторных аргументов точно так же, как с более привычными функциями скалярных аргументов. В этих обозначениях, которые широко будут применяться дальше, особенно в электродинамике, мы в первом порядке по малым добавкам получаем следующее разложение в ряд Тейлора:

$$f(\vec{r} + \delta\vec{r}, \vec{v} + \delta\vec{v}, t + \delta t) = f(\vec{r}, v, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}, \delta\vec{r}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}, \delta\vec{v}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \dots \quad (5.23)$$

Вернемся к обсуждению свойств симметрии. Мы договорились понимать под симметрией неизменность чего-то при преобразовании (5.20) или (5.21). Чего же именно?

Определение. Пространство-время (фактически внешнее поле) симметрично относительно преобразования (5.20) или (5.21), если *потенциальная энергия инвариантна* относительно этого преобразования:

$$U(x') = U(x) \quad (5.24)$$

или

$$\delta U \equiv U(\vec{r} + \delta\vec{r}, t + \delta t) - U(\vec{r}, t) = 0. \quad (5.25)$$

Почему именно потенциальная энергия выбрана в качестве «теста» на симметрию? Прежде всего, потому что именно она входит в правую часть уравнения движения (5.19), и ее инвариантность будет означать ковариантность этого уравнения, в соответствии с общим определением преобразования инвариантности. Но почему потенциальная энергия, а не сила? Во-первых, сама сила есть не инвариант, а ковариант. Другой ответ чисто прагматический – при таком подходе все получается хорошо, а при выборе силы в качестве «теста» правильные результаты получаются не всегда. Наконец, имеется и более глубокий ответ, но он может быть дан лишь в рамках лагранжева формализма, где исходят из требования инвариантности одной из наиболее фундаментальных физических величин – так называемого действия. В нашем случае отражением этого требования и является сформулированное определение.

Преобразуем теперь условие симметрии (5.25), пользуясь обозначениями (5.22) и разложением (5.23). Имеем с точностью до членов первого порядка малости:

$$\begin{aligned} \delta U &\equiv U(\vec{r} + \delta\vec{r}, t + \delta t) - U(\vec{r}, t) = \\ &= \left\{ U(\vec{r}, t) + \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \delta\vec{r}\right) + \frac{\partial U}{\partial t} \delta t \right\} - U(\vec{r}, t) = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \delta\vec{r}\right) + \frac{\partial U}{\partial t} \delta t, \end{aligned}$$

так что условие симметрии гласит:

$$-(\vec{F}, \delta\vec{r}) + \frac{\partial U}{\partial t} \delta t = 0 \Rightarrow (-m\dot{\vec{v}}, \delta\vec{r}) + \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \delta t = 0. \quad (5.26)$$

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных преобразований симметрии.

а) *Закон сохранения энергии*

Исходим из однородности времени, т.е., из симметрии относительно сдвигов во времени:

$$\delta\vec{r} = 0, \quad \delta t = \delta\tau, \quad \forall \delta\tau \in \mathbb{R}. \quad (5.27)$$

Подстановка этих выражений в (5.26) приводит к уже известному результату (5.3):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0. \quad (5.28)$$

Иными словами, однородность времени означает стационарность внешних условий, чего и следовало ожидать.

Найдем теперь изменение полной механической энергии частицы при ее реальном движении в течение промежутка времени dt , когда

$$\delta\vec{r} = d\vec{r} = \vec{v}dt, \quad \delta\vec{v} = d\vec{v} = \dot{\vec{v}}dt, \quad \delta t = dt. \quad (5.29)$$

Для этого изменения имеем:

$$\begin{aligned} dE &= dT + dU = \left(\frac{\partial T}{\partial \vec{v}}, d\vec{v} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, d\vec{r} \right) + \frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt = \\ &= (m\vec{v}, \dot{\vec{v}}dt) + (\vec{\nabla}U, \vec{v}dt) + \frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt \equiv \\ &\equiv (m\dot{\vec{v}}, \vec{v})dt - (\vec{F}, \vec{v})dt + \frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt = \\ &= (m\dot{\vec{v}} - \vec{F}, \vec{v})dt + \frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt. \end{aligned}$$

Но первый член равен нулю в силу уравнения движения, а потому

$$dE = \frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt, \quad (5.30)$$

т.е. мы получаем еще один известный результат. Учитывая теперь условие однородности времени (5.28), приходим к сохранению энергии:

$$E = \text{Const}. \quad (5.31)$$

б) Сохранение импульса

Совершим преобразование пространственной трансляции, т.е. сдвинем частицу (или систему отсчета) на произвольный малый вектор $\vec{\delta a}$:

$$\delta\vec{r} = \vec{\delta a}, \quad \delta t = 0. \quad (5.32)$$

Предполагая, что пространство (внешнее поле) однородно, из (5.26) и (5.32) получим

$$\delta U = -(\vec{F}, \delta\vec{a}) = 0$$

или, с учетом уравнения движения

$$(\dot{\vec{p}}, \delta\vec{a}) = 0. \quad (5.33)$$

В силу произвольности вектора $\vec{\delta a}$ заключаем, что $\dot{\vec{r}} = 0$, и в итоге от однородности пространства приходим к сохранению импульса:

$$\vec{p} = Const. \quad (5.34)$$

Если внешнее поле однородно лишь в направлении, задаваемом единичным вектором $\vec{\tau}$, так что $\vec{\delta a} = \delta a \cdot \vec{\tau}$, то вместо (5.33) получим

$$(\dot{\vec{p}}, \vec{\tau}) \delta a = 0. \quad (5.35)$$

Отсюда следует сохранение соответствующей компоненты импульса:

$$p_{\tau} = 0. \quad (5.36)$$

в) Сохранение момента импульса

При повороте частицы (или системы отсчета) на малый угол $\vec{\delta\varphi}$

$$\delta\vec{r} = [\vec{\delta\varphi}, \vec{r}], \quad \delta t = 0, \quad (5.37)$$

и в предположении изотропности пространства (внешнего поля) из (5.26) получим

$$\delta U = -(\vec{F}, \delta\vec{r}) = -(\vec{F}, [\vec{\delta\varphi}, \vec{r}]) = 0.$$

Заменяя \vec{F} из уравнения движения на $\dot{\vec{p}}$ и проводя очередные преобразования, имеем:

$$\begin{aligned} (\vec{F}, [\vec{\delta\varphi}, \vec{r}]) &= (\dot{\vec{p}}, [\vec{\delta\varphi}, \vec{r}]) = ([\vec{r}, \dot{\vec{p}}], \delta\vec{\varphi}) = \\ &= \left(\frac{d}{dx} [\vec{r}, \vec{p}], \delta\vec{\varphi} \right) - ([\vec{r}, m\dot{\vec{v}}], \delta\vec{\varphi}) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что последний член, содержащий векторное произведение $[\vec{v}, \vec{v}]$, равен нулю, и вспоминая определение момента импульса, заключаем:

$$\left(\dot{\vec{L}}, \overline{\delta\varphi}\right) = 0. \quad (5.38)$$

В силу произвольности вектора $\overline{\delta\varphi}$ отсюда получаем $\dot{\vec{L}} = 0$. Таким образом, отправляясь от изотропности пространства, приходим к сохранению момента импульса:

$$\vec{L} = Const. \quad (5.39)$$

Пусть теперь внешнее поле изотропно лишь частично, т.е. симметрично относительно какой-то одной фиксированной прямой, которую мы выберем в качестве оси Oz . Тогда

$$\overline{\delta\varphi} = \vec{k} \cdot \delta\varphi \quad (5.40)$$

и вместо (5.38) мы получим

$$\left(\dot{\vec{L}}, \vec{k}\right) \delta\varphi = 0. \quad (5.41)$$

В этом случае вектор момента импульса уже не сохраняется, но его компонента L_z сохраняется:

$$L_z = Const. \quad (5.42)$$

Этот вывод можно сделать несколько более наглядным, если вспомнить формулу (5.13) для работы силы, совершаемой ею при повороте частицы вокруг фиксированной оси:

$$\delta A = \left(\vec{M}, \overline{\delta\varphi}\right).$$

Считая, что эта ось совпадает с осью Oz , для изменения потенциальной энергии получаем

$$\delta U = -\left(\vec{F}, \delta\vec{r}\right) = -\delta A = -\left(\vec{M}, \overline{\delta\varphi}\right) = -\left(\vec{M}, \vec{k}\right) \delta\varphi,$$

т.е.

$$\delta U = -M_z \delta\varphi. \quad (5.43)$$

Если внешнее поле обладает аксиальной симметрией, т.е. повороты вокруг оси Oz суть преобразования инвариантности, то $\delta U = 0$, и из (5.43) мы заключаем, что

$$M_z = 0. \quad (5.44)$$

Закон сохранения L_z теперь мгновенно следует из теоремы об изменении момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Кстати, из (5.43) попутно следует один важный результат. Запишем изменение потенциальной энергии при повороте вокруг оси Oz в цилиндрических координатах, в которых угол φ играет роль азимутального угла:

$$\delta U = U(\rho, \varphi + \delta\varphi, z) - U(\rho, \varphi, z) = \left\{ U(\rho, \varphi, z) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \delta\varphi \right\} - U(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \delta\varphi.$$

Сравнивая это выражение с (5.43), имеем:

$$M_z = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (5.45)$$

Таким образом, если компонента силы получается из потенциальной энергии дифференцированием по соответствующей координате, то компонента момента силы – дифференцированием по соответствующему углу. Полученный результат чрезвычайно важен, он будет часто использоваться, и его следует запомнить.

С учетом записи (5.45) закон изменения компоненты L_z момента импульса можно записать как

$$\frac{dL_z}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (5.46)$$

Аксиальная симметрия внешнего поля (частичная изотропность пространства) означает независимость потенциальной энергии от азимутального угла:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0. \quad (5.47)$$

В итоге мы из (5.46) еще раз приходим к сохранению L_z .

На этом предварительный анализ свойств симметрии пространства-времени и их связи с законами сохранения мы закончим. К соответствующей проблематике мы еще неоднократно будем возвращаться – как в классической механике, так и в релятивистской механике, в электродинамике и в квантовой механике. Но особенно важную роль изложенные выше идеи будут играть в нашем последнем курсе, посвященном физике ядра и элементарных частиц.

§6. Уравнения Лагранжа для свободной частицы

Практически всюду в дальнейшем сила, действующая на частицу, предполагается потенциальной, и это специально не оговаривается. Таким образом, уравнения движения свободной частицы записываются как

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Leftrightarrow m\dot{\vec{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \quad (6.1)$$

Наша ближайшая цель – переписать эти уравнения в несколько иной форме, преимущества которой скажутся очень скоро.

Теорема. Уравнения движения свободной частицы можно представить в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0, \quad (6.2)$$

где

$$L = T - U. \quad (6.3)$$

Доказательство

Имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{\vec{v}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{v}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{v}}} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = m \dot{\vec{v}},$$

так что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) = m \dot{\vec{v}} = m \ddot{\vec{r}}. \quad (6.4)$$

Далее,

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \equiv -\nabla U = \vec{F},$$

т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = +\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\vec{F}. \quad (6.5)$$

Подстановка (6.4) – (6.5) в (6.2) дает уравнения движения (6.1), что и утверждалось.

Для последующих обобщений полезно ввести для координат свободной частицы единообразные обозначения

$$q_1 \equiv x_1 \equiv x, \quad q_2 \equiv x_2 \equiv y, \quad q_3 \equiv x_3 \equiv z, \quad (6.6)$$

в которых уравнения (6.2) записываются как

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \quad / i = 1, 2, 3/. \quad (6.7)$$

Разумеется, для свободной частицы эти уравнения полностью эквивалентны ньютоновым уравнениям движения (6.1). Но с точки зрения обобщений они обладают неисчислимыми преимуществами:

а) уравнения (6.7) для свободной частицы справедливы не только в декартовых, но и в произвольных *криволинейных* координатах, что позволяет быстро записывать уравнения движения частицы в общей ситуации;

б) уравнения (6.7) при надлежащем понимании координат q_i оказываются справедливыми не только для свободной частицы, но и для частицы, движение которой ограничено *связями*;

в) Если в (6.7) снять ограничение на значение индекса i и координат q_i , то эти уравнения будут справедливы не только для одной частицы, но и для *системы частиц* – как свободных, так и со связями;

г) если соответствующим образом модифицировать функцию L , то уравнения (6.7) будут справедливы и для движения заряженной частицы во внешнем *электромагнитном поле*, которое оказывает на частицу не только потенциальное, но и гироскопическое воздействие (магнитная часть силы Лоренца);

д) при надлежащей модификации функции L уравнения (6.7) оказываются справедливыми не только в классической, но и в *релятивистской механике*;

е) при соответствующем обобщении понятия координаты и при надлежащем выборе функции L уравнения типа (6.7) сохраняют свою силу и для *немеханических систем* – для электрических цепей (роль координаты играет электрический заряд), для различных полей (например электромагнитного, где роль координат играют потенциалы) и для ряда других систем (скажем, для движущейся жидкости).

Таким образом, уравнения движения свободной частицы в форме (6.7) служат неисчерпаемым источником самых разнообразных обобщений, и этот подход широко используется в современной физике. Достаточно сказать, что основное уравнение квантовой теории – уравнение Шредингера – первоначально было получено его автором на основе как раз излагаемых здесь соображений.

Очень многие из формулируемых ниже результатов основываются только на форме записи уравнений движения в виде (6.7). Поэтому они оказываются справедливыми не только для свободной частицы, движение которой описывается в декартовой системе координат и подчиняется уравнениям (6.2), но и во всех указанных выше более общих случаях. Здесь и кроется причина удобства использования единообразных обозначений (6.6) для координат свободной частицы. Применяя их сразу, мы избегаем повторения большого количества выкладок при переходе ко все более сложным системам.

Основой всех отмеченных обобщений является некий фундаментальный принцип Природы, из которого можно вывести уравнения (6.7). К его формулировке и доказательству в случае свободной частицы мы сейчас переходим, а для более сложных систем его можно просто постулировать, как это часто и делается, особенно в теории поля. Для понимания сути принципа и деталей рассуждений следует вспомнить самые основные сведения из *вариационного исчисления*, которые считаются известными из соответствующего математического курса.

Основная теорема. Рассмотрим множество траекторий $q_i = Q_i(t)$, проходящих в моменты времени t_1 и t_2 через фиксированные точки с координатами $q_i^{(1)}$ и $q_i^{(2)}$:

$$Q_i(t_1) = q_i^{(1)}, \quad Q_i(t_2) = q_i^{(2)}. \quad (6.8)$$

Для реального движения частицы в промежутке времени от t_1 до t_2 интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{Q_i(t)\}, \{\dot{Q}_i(t)\}; t) dt \quad (6.9)$$

принимает экстремальное значение.

Доказательство

Интеграл (6.9) есть *функционал* $S = S[\{Q_i(t)\}]$, т.е. отображение

$$S : \{q_i = Q_i(t)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (6.10)$$

или, наглядно говоря, «функция от функций $q_i = Q_i(t)$ ». Пусть $q_i = q_i(t)$ – те функции, для которых S имеет экстремум. Обозначим достаточно близкие к ним функции $q_i = Q_i(t)$ через $q_i = q_i(t) + \delta q_i(t)$, причем согласно (6.8) *вариации* $\delta q_i(t)$ должны удовлетворять условиям

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0. \quad (6.11)$$

Чтобы функционал S обладал экстремумом «в точке» $q_i = q_i(t)$, необходимо и достаточно обращение в нуль его *первой вариации*, т.е. главной линейной части приращения:

$$\delta S[\{q_i\}] \equiv \Gamma.л.ч.(S[\{q_i + \delta q_i\}]) - S[\{q_i\}] = 0. \quad (6.12)$$

Распишем это условие, имея в виду, что операции варьирования и дифференцирования функций по времени перестановочны:

$$\delta \dot{q}_i(t) \equiv \delta \left(\frac{dq_i(t)}{dt} \right) = \frac{d}{dx} (\delta q_i(t)), \quad (6.13)$$

и принимая эйнштейновское соглашение о суммировании по дважды повторяющимся индексам (которые в рассматриваемом случае изменяются от 1 до 3):

$$a_i b_i \equiv \sum_i a_i b_i. \quad (6.14)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \delta S[\{q_i\}] &= \Gamma.л.ч. \left[\int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i + \delta q_i\}, \{\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i\}; t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}; t) dt \right] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}; t) d\delta t + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}; t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

В силу (6.11) внеинтегральный член обращается в нуль, так что основное условие (6.12) дает нам:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt = 0. \quad (6.15)$$

Поскольку вариации δq_i *независимы*, в этой сумме каждое слагаемое по-отдельности равно нулю. Поскольку же функции $\delta q_i(t)$ считаются прерывными и *произвольными*, то в силу основной леммы вариационного исчисления подынтегральное выражение в квадратных скобках равно нулю. В итоге приходим к уравнениям движения частицы в форме (6.7):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad [i = 1, 2, 3]. \quad (6.16)$$

Обратно, если справедливы уравнения движения (6.7), то очевидным образом выполняется условие $\delta S = 0$.

Таким образом, окончательно получаем, что для справедливости уравнений движения частицы необходимо и достаточно, чтобы функционал S для реальной траектории $q_i = q_i(t)$ достигал экстремума, и основная теорема полностью доказана.

Замечание. На самом деле для подавляющего большинства механических систем функционал S достигает для реального движения не просто экстремума, а *минимума*.

Теорема. Функция L определена с точностью до прибавления к ней полной производной по времени от любой функции координат и времени.

Доказательство

Рассмотрим наряду с функцией L функцию

$$\tilde{L} = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}; t) + \frac{df(\{q_i\}; t)}{dt}. \quad (6.18)$$

Соответствующие им функционалы связаны следующим образом:

$$\tilde{S} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt,$$

т.е.

$$\tilde{S} = S + \left[f(\{q_i^{(2)}\}; t_2) - f(\{q_i^{(1)}\}; t_1) \right]. \quad (6.19)$$

В силу (6.12) член в квадратных скобках при варьировании траектории обращается в нуль, так что условия $\delta\tilde{S} = 0$ и $\delta S = 0$ эквивалентны. Иными словами, уравнения типа (6.7), получаемые с помощью функции L и с помощью функции \tilde{L} , совпадают, что и утверждалось.

Вопрос. Может ли функция f в (6.18) зависеть от \dot{q}_i ?

Упражнение. Доказать утверждение теоремы непосредственно – сравнивая уравнения (6.7), составленные с помощью функций \tilde{L} и L .

Важнейшее замечание. Форма уравнений (6.7) не меняется при переходе к новым координатам

$$Q_i = Q_i(\{q_k\}). \quad (6.20)$$

Действительно, закон движения частицы $q_i = q_i(t)$ можно рассматривать как параметрические уравнения ее траектории, т.е. некоторой *кривой*, с временем в качестве параметра. Поэтому основную теорему можно сформулировать так:

|| Реальная кривая, по которой движется частица, есть экстремаль функционала S .

Но свойство кривой быть экстремалью функционала не зависит от выбора системы координат!!!

Например, один и тот же функционал – длина плоской кривой – в декартовых и в полярных координатах задается разными формулами:

$$l_g = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \Phi_g dt \quad \text{и} \quad l_n = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2} dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \Phi_n dt. \quad (6.21)$$

Однако экстремали *одни и те же* – прямые линии. Их уравнения в декартовых и полярных координатах задаются разными функциями:

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{array}{l} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{array} \right\}. \quad (6.22)$$

Тем не менее, те и другие функции удовлетворяют уравнениям типа (6.7):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_g}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \Phi_g}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_g}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \Phi_g}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \Phi_n}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right\}. \quad (6.23)$$

Упражнение. Записать уравнения (6.23) в явном виде. Решить первую систему уравнений, получив тем самым уравнение семейства всех прямых на плоскости в декартовых координатах.

Высказанное замечание позволяет сразу выписывать уравнения движения частицы не только в декартовых координатах (напомним, что пока у нас было $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$), но и в любых криволинейных координатах. Делается это следующим простым способом.

а) Записываем функцию L в декартовых координатах:

$$L = \frac{mv^2}{2} - U = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_1, x_2, x_3). \quad (6.24)$$

б) Вводим новые координаты q_i , связанные с декартовыми формулами (6.20), или, что гораздо удобнее, обратными им:

$$x_i = x_i(\{q_k\}). \quad (6.25)$$

в) Дифференцируя (6.25) по времени, находим \dot{x}_i как функции q_i , \dot{q}_i и, подставляя их вместе с функциями (6.25) в функции (6.24), находим L в новых координатах:

$$L = \tilde{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}; t). \quad (6.26)$$

г) Выписываем уравнения (6.7) в новых координатах.

Замечание. Форма уравнений (6.7) не меняется при переходе к новым координатам, зависящим не только от старых координат, но и от времени:

$$Q_i = Q_i(\{q_i\}; t). \quad (6.27)$$

Такие преобразования называются точечными.

Поскольку время играет роль параметра, то в свете высказанных выше соображений это замечание оказывается достаточно очевидным. С помощью только что описанной процедуры оно позволяет записывать уравнения движения частицы не только в

криволинейных координатах, но и в системах отсчета, движущихся относительно исходной ИСО произвольным образом, – в частности, в любых неинерциальных системах отсчета.

Соответствующие примеры приводятся в следующем параграфе. Но прежде, чем переходить к ним, необходимо выработать надлежащую терминологию, общепринятую в аналитической механике.

§7. Терминология и примеры

1. Теперь мы уже вправе считать q_i произвольной тройкой чисел, однозначно задающих положение частицы в заданной системе отсчета. Эти числа называются *обобщенными координатами*. Среди них могут быть декартовы координаты, углы и более сложные переменные.

2. Производные \dot{q}_i называются *обобщенными скоростями*. Для декартовых координат они совпадают с компонентами обычной скорости, а если q есть угол, то \dot{q} будет иметь смысл компоненты угловой скорости.

3. Функция L , порождающая уравнения движения, называется *функцией Лагранжа*, или *лагранжианом*.

4. Про уравнения движения в форме (6.7) говорят как про *уравнения Лагранжа*, а функционал S называется *действием*. В соответствии с этим, утверждение основной теоремы именуют принципом экстремального действия. Впрочем, имея в виду одно из замечаний в предыдущем параграфе, чаще говорят о *принципе наименьшего действия*.

5. Величины

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (7.1)$$

называются *обобщенными импульсами*. Импульсами их именуют потому, что в случае декартовых координат они совпадают с компонентами обычного импульса. Например,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right],$$

т.е.
$$p_x = m\dot{x}, \quad (7.2)$$

как это и должно быть. Если же q – не декартова координата, то обобщенный импульс p_q не является компонентой обычного импульса. В частности, когда $q = \varphi$ – угловая переменная, величина p_φ , как мы видим чуть ниже, совпадает с компонентой *момента импульса*.

6. Комбинация

$$\tilde{E} = p_i \dot{q}_i - L \quad (7.3)$$

носит название *обобщенной энергии*. На этом понятии следует остановиться несколько подробнее.

Пусть переход от декартовых координат x_i к обобщенным координатам q_i осуществляется по формулам типа (6.20), не содержащим явно времени, так что обратное преобразование записывается как

$$x_i = x_i(\{q_k\}). \quad (7.4)$$

Дифференцируя эти формулы по времени, для компонент скорости получим:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \equiv a_{ij} \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ij}(\{q_k\}). \quad (7.5)$$

Подстановка выражений (7.5) в кинетическую энергию частицы дает

$$T = \frac{mv^2}{2} \equiv \frac{m}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i = \frac{m}{2} (a_{ij} \dot{x}_j)(a_{ik} \dot{x}_k) = \frac{m}{2} (a_{ij} a_{ik}) \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

т.е.

$$T \equiv T_2 = b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad b_{jk} = b_{jk}(\{q_i\}). \quad (7.6)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае кинетическая энергия есть квадратичная форма обобщенных скоростей, т.е. однородная функция индекса 2. Сделаем в этой связи небольшое отступление.

Определение. Функция f переменных η_i называется *однородной функцией индекса*

N , если

$$f(\{\alpha \eta_i\}) = \alpha^N f(\{\eta_i\}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (7.7)$$

Лемма (Теорема Эйлера об однородных функциях)

$$\frac{\partial f}{\partial \eta_i} \eta_i = Nf. \quad (7.8)$$

Для доказательства достаточно продифференцировать обе части (7.7) по α , а затем положить $\alpha = 1$.

Применим лемму для преобразования выражения (7.3) для обобщенной энергии:

$$\tilde{E} = p_i \dot{q}_i - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \frac{\partial T^2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - U).$$

Таким образом,

$$\tilde{E} = T + U, \quad (7.9)$$

т.е. в случае, когда обобщенные координаты выражаются через декартовы координаты (но не через время!), обобщенная энергия совпадает с обычной механической энергией E .

Пусть теперь формулы перехода содержат время явным образом:

$$x_i = x_i(\{q_j\}; t). \quad (7.10)$$

Тогда вместо (7.5) получим

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv a_{ij} \dot{q}_j + C_i, \quad (7.11)$$

и для кинетической энергии вместо (7.6) будем иметь

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i = \frac{m}{2} (a_{ij} \dot{q}_j + c_i) (a_{ik} \dot{q}_k + c_i) =$$

$$= \frac{m}{2} \{ a_{ij} a_{ik} \dot{q}_j \dot{q}_k + a_{ij} c_i \dot{q}_j + a_{ik} c_i \dot{q}_k + c_i c_i \} = \frac{m}{2} (a_{ij} a_{ik}) \dot{q}_i \dot{q}_k + m (a_{ij} c_i) \dot{q}_j + \frac{m}{2} (c_i c_i) .$$

Таким образом, в общей ситуации

$$T = b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + b_j \dot{q}_j + b \equiv T_2 + T_1 + T_0, \quad (7.12)$$

где T_2 – квадратичная форма скоростей типа (7.6), T_1 – линейная форма скоростей и T_0 – член, вообще не содержащий обобщенных скоростей (однородная функция индекса 0).

В итоге для обобщенной энергии имеем:

$$\tilde{E} = p_i \dot{q}_i - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \frac{\partial (T_2 + T_1 + T_0)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L =$$

$$= 2T_2 + 1 \cdot T_1 + 0 \cdot T_0 - (T - U) = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - U) .$$

Таким образом,

$$\tilde{E} = (T_2 - T_0) + U, \quad (7.13)$$

т.е. в общей ситуации обобщенная энергия \tilde{E} не совпадает с обычной механической энергией

$$E = T + U = (T_2 + T_1 + T_0) + U. \quad (7.14)$$

Поэтому \tilde{E} и называют *обобщенной* энергией, а не просто энергией.

Пример 1. Применим лагранжев формализм для описания движения свободной частицы в цилиндрических координатах

$$x_1 = \rho \cdot \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \quad x_3 = z. \quad (7.15)$$

Обобщенные координаты суть ρ , φ , z , а обобщенные скорости – $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$, \dot{z} .

Дифференцируя формулы (7.15) по времени, получим

$$\dot{x}_1 = \dot{\rho} \cdot \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{x}_2 = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{x}_3 = \dot{z}. \quad (7.16)$$

Подстановка этих выражений в лагранжиан (6.24) дает:

$$L = T + U = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_1, x_2, x_3) = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z). \quad (7.17)$$

Находим обобщенные импульсы:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \dot{\varphi}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z}. \quad (7.18)$$

Кинетическая энергия в (7.17) есть квадратичная форма скоростей, что связано с отсутствием времени в формулах перехода (7.15). Поэтому в данной задаче обобщенная энергия совпадает с обычной:

$$\tilde{E} = E = T + U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(\rho, \varphi, z). \quad (7.19)$$

Убедимся в этом прямым расчетом:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= p_i \dot{q}_i - L = p_\rho \dot{\rho} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - (T - U) = m\dot{\rho}^2 + m\rho^2\dot{\varphi}^2 + m\dot{z}^2 - \\ &- \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U = T + U = E. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение Лагранжа общего вида (6.7)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad (7.20)$$

выражения (7.18) и производные

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (7.21)$$

придем к уравнениям Лагранжа для частицы в цилиндрических координатах:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (7.22)$$

Перекомбинируя члены, окончательно получим

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (7.23)$$

причем производную по времени во втором уравнении удобно оставить в нераскрытом виде.

Допустим теперь, что функция Лагранжа не зависит явно от азимутального угла φ

(скажем, отвечает полю эллипсоида вращения):

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0. \quad (7.24)$$

Тогда из второго уравнения (7.22) мы придем к закону сохранения обобщенного импульса p_φ :

$$p_\varphi \equiv m\rho^2\dot{\varphi} = Const. \quad (7.25)$$

Пусть, далее, функция Лагранжа не зависит явно от координаты z (например, отвечает полю бесконечной призмы):

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (7.26)$$

Тогда из третьего уравнения (7.22) придем к сохранению p_z :

$$p_z \equiv m\dot{z} = Const. \quad (7.27)$$

Если же условия (7.24) и (7.26) выполняются совместно (поле бесконечного цилиндра), то будут сохраняться p_φ и p_z .

Что же мы получим? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, прежде всего, из векторного анализа выражение для градиента в цилиндрических координатах. Тогда для компонент силы будем иметь:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \left\{ -\frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} \right\}. \quad (7.28)$$

Поэтому первое и третье уравнения (7.23) представляют собой Второй закон Ньютона, спроектированный на цилиндрические орты \vec{e}_ρ и \vec{e}_z . Заодно из этих уравнений сразу можно увидеть, чему равны компоненты w_ρ и w_z вектора ускорения, которые мы в кинематике получали довольно мучительным способом:

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad w_z = \ddot{z}. \quad (7.29)$$

Осталось выяснить смысл второго уравнения (7.23). Оно непосредственно не связано со Вторым законом, ибо в правой части стоит не азимутальная компонента силы, а величина, отличающаяся от нее множителем $1/\rho$. Но мы знаем, что $-\partial U / \partial \varphi$ есть не что иное, как M_z – проекция момента силы на ось z . Поэтому данное уравнение представляет собой теорему об изменении момента импульса частицы, спроектированную на орт e_z :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (7.30)$$

И действительно, как мы уже неоднократно убеждались,

$$L_z = m\rho^2 \dot{\varphi}. \quad (7.31)$$

Этот результат важен и тем, что он выявляет смысл величины p_φ : обобщенный импульс, отвечающий угловой координате, совпадает с соответствующей компонентой вектора момента импульса.

Итак, лагранжев формализм позволяет очень просто получить уравнения движения частицы в цилиндрических координатах. В ньютоновом же формализме соответствующие уравнения возникают как результат довольно неприятных кинематических выкладок. Далее, уравнения Лагранжа включают соотношения, представляющие обычно наибольший интерес. Некоторые из них представляют собой проекции Второго закона Ньютона на надлежащие цилиндрические орты, а некоторые – проекции теоремы об изменении момента импульса. При этом последние появляются как раз там, где это нужно. Если внешнее поле обладает определенными свойствами симметрии, то при правильном выборе обобщенных координат уравнения Лагранжа сразу дают нам соответствующие законы сохранения. Более детальное сравнение ньютонова и лагранжева формализмов, призванное выявить преимущества последнего, будет проведено на практических занятиях.

Пример 2. Применим лагранжев формализм для описания движения свободной частицы в системе координат, равномерно вращающейся вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cdot \cos \omega t - y \sin \omega t \\ x_2 &= x \sin \omega t + y \cos \omega t \\ x_3 &= z \end{aligned} \right\}. \quad (7.32)$$

В данном случае обобщенными координатами являются относительные координаты x , y , z , а обобщенными скоростями – компоненты относительной скорости \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} . Дифференцируя формулы (7.32) по времени, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\dot{x} \cos \omega t - \dot{y} \sin \omega t) - \omega(x \sin \omega t + y \cos \omega t) \\ \dot{x}_2 &= (\dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t) + \omega(x \cos \omega t - y \sin \omega t) \\ \dot{x}_3 &= \dot{z} \end{aligned} \right\}. \quad (7.33)$$

Подстановка этих выражений в лагранжиан (6.24) дает

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - U(x, y, z). \quad (7.34)$$

Находим обобщенные импульсы:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - m\omega y, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\omega x, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (7.35)$$

и производные лагранжиана по координатам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} + m\omega^2 x + m\omega \dot{y}, & \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{\partial U}{\partial y} + m\omega^2 y - m\omega \dot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \right\}. \quad (7.36)$$

Учитывая эти заготовки, распишем уравнения (6.7):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} - m\omega \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x} - m\omega^2 x - m\omega \dot{y} &= 0 \\ m\ddot{y} + m\omega \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} - m\omega^2 y + m\omega \dot{x} &= 0 \\ m\ddot{z} + \frac{\partial U}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (7.37)$$

Перегруппировка членов приводит к следующим окончательным уравнениям Лагранжа для свободной частицы во вращающейся системе координат

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} + m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -\frac{\partial U}{\partial y} + m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x} \\ m\ddot{z} &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} . \quad (7.38)$$

Формулы перехода (7.32) в данном случае явно содержат время, благодаря чему кинетическая энергия в (7.34) обретает общую структуру:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \equiv T_2 + T_1 + T_0. \quad (7.39)$$

Поэтому обобщенная энергия \tilde{E} не совпадает с обычной энергией E :

$$\tilde{E} = T_2 - T_0 + U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + U = E - \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (7.40)$$

Для уяснения того, что же мы получили, полезно переписывать все основные результаты в векторной форме. Для лагранжиана (7.34) имеем

$$L = \frac{mv^2}{2} + m(\vec{v}, [\vec{r}, \vec{\omega}]) + \frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2 - U(\vec{r}), \quad (7.41)$$

уравнения Лагранжа записываются как

$$m\vec{w} = -\vec{\nabla}U + m[\vec{\omega}[\vec{r}\vec{\omega}]] + 2m[\vec{v}\vec{\omega}], \quad (7.42)$$

обобщенные импульсы (7.35) объединяются в вектор

$$\vec{p} = m\vec{v} + m[\vec{\omega}\vec{r}], \quad (7.43)$$

а выражение для обобщенной энергии (7.40) принимает вид

$$\tilde{E} = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2 + U = E - \frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2. \quad (7.44)$$

Рассмотрим, прежде всего, уравнения движения (7.42). Мы видим, что во вращающейся системе координат ускорение частицы обусловлено не только обычной силой

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U, \quad (7.45)$$

но также и некими «фиктивными» силами, называемыми *силами инерции – центробежной силой*

$$\vec{F}_u = m[\vec{\omega}[\vec{r}\vec{\omega}]] \quad (7.46)$$

и *кориолисовой силой*

$$\vec{F}_\kappa = 2m[\vec{v}\vec{\omega}]. \quad (7.47)$$

Для уяснения их смысла достаточно перенести эти добавки в левую часть уравнений движения, записав их как

$$m(\vec{w} + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}] + 2[\vec{\omega}\vec{v}]]) = -\vec{\nabla}U. \quad (7.48)$$

Но если вспомнить теперь кинематику, то в левой части мы узнаем произведение массы частицы на ее ускорение \vec{w}_0 , вычисленные в исходной инерциальной системе отсчета.

Таким образом, происхождение сил инерции чисто кинематическое – они связаны с преобразованием ускорения из ИСО в неинерциальную систему отсчета.

Для выяснения смысла обобщенного импульса (7.43) перепишем его в форме

$$\vec{p} = m(\vec{v} + [\vec{\omega}\vec{r}]). \quad (7.49)$$

Вспоминая закон преобразования скорости при переходе из ИСО во вращающуюся систему отсчета:

$$\vec{v}_0 = \vec{v} + [\vec{\omega}\vec{r}], \quad (7.50)$$

мы заключаем, что обобщенный импульс есть не что иное, как обычный импульс частицы, движущейся в ИСО со скоростью \vec{v}_0 и вычисленный в этой системе. Иными словами, импульс p частицы во вращающейся системе отсчета совпадает с ее же импульсом $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$ в ИСО. Вместе с ними совпадают также компоненты импульсов

$$\vec{L}_0 + [\vec{r}\vec{p}_0] \quad \text{и} \quad \vec{L} = [\vec{r}\vec{p}], \quad (7.51)$$

поскольку, очевидно, $\vec{r} = \vec{r}_0$.

Рассмотрим теперь выражение (7.44) для обобщенной энергии \tilde{E} . Прежде всего замечаем, что \tilde{E} отличается от E слагаемым

$$E_u = -\frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2, \quad (7.52)$$

называемым *центробежной энергией*. Как и силы инерции, она имеет чисто кинематическое происхождение, но имеет, если можно так сказать, более глубокий смысл. Дело в том, что, как будет ясно из следующего параграфа, во вращающейся системе отсчета обычная энергия E не сохраняется (!), но зато обобщенная энергия, т.е. обычная энергия, дополненная центробежной, удовлетворяет закону сохранения.

Выясним, как преобразуется энергия частицы при переходе из ИСО во вращающуюся систему отсчета. Для этого выразим из (7.50) «относительную» скорость частицы \vec{v} и подставим ее в (7.44)

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2} [\vec{\omega}\vec{r}]^2 + U = \\
&= \frac{m(\vec{v}_0 - [\vec{\omega}\vec{r}])^2}{2} - \frac{m}{2} [\vec{\omega}\vec{r}]^2 + U = \\
&= \frac{m\vec{v}_0^2}{2} - m(\vec{v}_0, [\vec{\omega}\vec{r}]) + \frac{m}{2} [\vec{\omega}\vec{r}]^2 - \frac{m}{2} [\vec{\omega}\vec{r}]^2 + U = \\
&= \left\{ \frac{m\vec{v}_0^2}{2} + U \right\} - m([\vec{r} \vec{v}_0], \vec{\omega}) = (T_0 + U) - (\vec{\omega}, \vec{L}_0).
\end{aligned}$$

Вспоминая, что $\vec{L}_0 = \vec{L}$, мы окончательно получаем

$$\tilde{E} = E_0 - (\vec{\omega}, \vec{L}). \quad (7.53)$$

Эта формула задает закон преобразования энергии частицы при переходе от ИСО к равномерно вращающейся системе отсчета. Неинвариантность энергии и приводит к тому, что во вращающейся системе отсчета сохраняется не обычная энергия, а обобщенная, дополненная центробежной энергией.

Впрочем, в данном контексте термины «обобщенная» энергия и «обычная» энергия не совсем удачны – они вызывают ложные ассоциации.

Пример 3. Пусть из каких-то соображений (неважно каких) известно, что лагранжиан частицы имеет вид

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + e(\vec{v}, \vec{A}) - e\varphi, \quad (7.54)$$

где e – внутренняя характеристика частицы, а φ и \vec{A} – заданные функции координат и времени. Разовьем соответствующий лагранжев формализм.

Обобщенные координаты – обычные координаты $\{x, y, z\} = \vec{r}$, обобщенные скорости – компоненты обычной скорости $\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\} = \vec{v}$. Сразу будем пользоваться векторной символикой, причем нам потребуются две формулы из векторного анализа:

$$\text{grad}(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}, \vec{\nabla})\vec{a} + [\vec{a}, \text{rot } \vec{b}] + [\vec{b}, \text{rot } \vec{a}] \quad (*)$$

и

$$\frac{d\vec{a}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{a}. \quad (**)$$

Для обобщенного импульса получаем:

$$\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + e\vec{A} \equiv \vec{p}_0 + e\vec{A}, \quad (7.55)$$

где $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$ – обычный импульс частицы. Для обобщенной энергии имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &\equiv p_i \dot{q}_i - L \equiv (\vec{p}, \vec{v}) - L = (m\vec{v} + e\vec{A}, \vec{v}) - L = \\ &= m\vec{v}^2 + e(\vec{v}, \vec{A}) - \frac{m\vec{v}^2}{2} - e(\vec{v}, \vec{A}) + e\varphi,\end{aligned}$$

т.е.

$$\tilde{E} = \frac{m\vec{v}^2}{2} + e\varphi.$$

Этот результат можно было выписать сразу, заметив, что в лагранжиане (7.54) первый член обладает структурой T_2 , второй – структурой T_1 , а третий – структурой U (или T_0).

Уравнения Лагранжа общего вида в векторном формализме имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0. \quad (7.56)$$

Чтобы расписать их, делаем соответствующие заготовки. С помощью формулы (***) получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\vec{v}} \right) = \frac{d}{dt} (m\vec{v} + e\vec{A}) = m\dot{\vec{v}} + e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e(\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{A}. \quad (7.57)$$

Далее, с помощью формулы (*) имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = e(\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{A} + e[\vec{v}, \text{rot } \vec{A}] - e\vec{\nabla} \varphi. \quad (7.58)$$

Подстановка (7.57-58) в (7.56) дает

$$\left\{ m\dot{\vec{v}} + e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e(\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{A} \right\} - \left\{ e(\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{A} + e[\vec{v}, \text{rot } \vec{A}] - e\vec{\nabla} \varphi \right\} = 0.$$

После перегруппировки членов получаем следующие уравнения:

$$m\dot{\vec{v}} = e \left(-\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + e[\vec{v}, \text{rot } \vec{A}]. \quad (7.59)$$

Введем теперь вместо φ и \vec{A} два новых векторных поля:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (7.60)$$

Тогда уравнения Лагранжа (7.59) примут следующий окончательный вид:

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (7.61)$$

Теперь становится совершенно ясным, каков же смысл функции Лагранжа (7.54). Она отвечает частице с массой m и зарядом e , движущейся во внешнем электрическом поле \vec{E} и магнитном поле \vec{B} . При этом φ и \vec{A} суть потенциалы электрического и магнитного полей соответственно, связанные с самими полями формулами (7.60).

К этому примеру мы еще неоднократно будем возвращаться – в классической механике, в электродинамике, в релятивистской классической механике и в квантовой механике.

§8. Лагранжев формализм и законы сохранения

Теперь мы намерены вновь вернуться к законам сохранения и обсудить их связь со свойствами симметрии пространства – времени (внешнего поля), на этот раз в рамках лагранжева формализма. Кое-что об этом можно сказать сразу.

Определение. Если функция Лагранжа не содержит явно обобщенную координату q , то эта координата называется *циклической*.

Теорема. Обобщенный импульс p_q , соответствующий циклической координате q , сохраняется.

Доказательство

Если координата q – циклическая, то, по определению,

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (8.1)$$

Но тогда из соответствующего уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (8.2)$$

следует

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0,$$

т.е.

$$p_q \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = Const, \quad (8.3)$$

что и утверждалось.

Этот простой результат приводит к выводу, важному с практической точки зрения: обобщенные координаты следует выбирать так, чтобы среди них было как можно больше циклических. Тогда решение задачи существенно упростится, ибо часть уравнений Лагранжа превратится в законы сохранения, т.е. уравнения второго порядка по времени заменятся уравнениями первого порядка.

Но что означает цикличность координаты? Независимость функции Лагранжа от q , т.е. ее неизменность при преобразовании

$$q' = q + \delta q.$$

Неизменность же некой величины отвечает наличию у рассматриваемой системы какого-то свойства симметрии. Эти соображения и позволяют выбирать обобщенные координаты наиболее удобным способом. Они должны отвечать симметрии задачи – если она трансляционная, то хороши декартовы координаты, если цилиндрическая – то цилиндрические, если сферическая – то сферические и т.п.

Имея в виду дальнейшие обобщения, рассмотрим проблему связи законов сохранения со свойствами симметрии пространства – времени (в нашем случае одной частицы –

внешнего поля) несколько более подробно. Но прежде чем переходить к этому анализу, сформулируем и докажем теорему о сохранении (обобщенной) энергии свободной частицы.

Теорема. Обобщенная энергия сохраняется тогда и только тогда, когда функция Лагранжа не зависит явно от времени.

Доказательство

Найдем полную производную по времени от обобщенной энергии

$$\vec{E} = p_i \dot{q}_i - L. \quad (8.4)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{E}}{dt} &= \frac{d}{dt}(p_i \dot{q}_i) - \frac{dL}{dt} = \\ &= \dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} = \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned}$$

где мы учли определение обобщенного импульса и приняли во внимание уравнения Лагранжа. Итак,

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (8.5)$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

В частности, обобщенная энергия сохраняется во всех трех примерах из предыдущего параграфа, если только потенциальная энергия (в последнем случае скалярный потенциал φ) не содержит времени.

Однако, вернемся к основной нашей проблеме. Проведенное выше рассмотрение подсказывает следующее определение.

Определение. Пространство-время (фактически внешнее поле) симметрично относительно преобразования

$$q'_i = q_i + \delta q_i, \quad \dot{q}'_i = \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, \quad t' = t + \delta t, \quad (8.6)$$

если функция Лагранжа инвариантна относительно этого преобразования:

$$\begin{aligned} \delta L &\equiv L(\{q_i + \delta q_i\}, \{\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i\}, t + \delta t) - \\ &- L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Это определение полностью совпадает с соответствующим определением из §5, с тем единственным отличием, что в нем теперь вместо потенциальной энергии фигурирует функция Лагранжа. Такой подход гораздо более последователен, ибо функция Лагранжа полностью определяет уравнения движения, в том числе и их «кинетические члены», в отличие от потенциальной энергии, которая задает только внешнее воздействие – силы.

Инвариантность же функции Лагранжа эквивалентна ковариантности уравнений движения, в полном соответствии с самым общим понятием преобразований симметрии.

Преобразуем теперь условие симметрии (8.7), записав его в более конструктивной форме. Имеем:

$$\begin{aligned}
\delta L &\equiv L(\{q_i + \delta q_i\}, \{\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i\}, t + \delta t) - L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \\
&= \left[L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right] - L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \\
&= \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = \\
&= \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = \\
&= \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = \\
&= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t.
\end{aligned}$$

В силу уравнений Лагранжа первый член обращается в нуль, и мы приходим к следующему окончательному условию симметрии:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \frac{d\tilde{E}}{dt} \delta t = 0. \quad (8.8)$$

Рассмотрим наиболее важные частные случаи преобразований симметрии.

а) Однородность времени

Однородность времени означает инвариантность функции Лагранжа относительно преобразования

$$\delta q_i = 0, \quad \delta t = \delta \tau. \quad (8.9)$$

В этом случае общее условие симметрии (8.8) сводится к требованию

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (8.10)$$

Распишем его левую часть:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{dL}{dt} - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = \\
&= \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i = \\
&= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i.
\end{aligned}$$

Учитывая, что последний член равен нулю в силу уравнений Лагранжа из (8.10), заключаем, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0. \quad (8.11)$$

Таким образом, однородность времени приводит к закону сохранения

$$p_i \dot{q}_i - L \equiv \tilde{E} = Const. \quad (8.12)$$

Иными словами, вследствие однородности времени сохраняется величина \tilde{E} , которую уже раньше мы назвали обобщенной энергией. Этим, кстати, оправдывается смысл введения данного понятия, которое на первый взгляд представляется достаточно искусственным.

б) Однородность пространства

Пусть пространство обладает свойством однородности по какому-то направлению, которое мы выберем в качестве оси z , так что одной из обобщенных координат, скажем, будет декартова координата q_3 . Однородность пространства означает неизменность функции Лагранжа при соответствующем сдвиге, т.е. при преобразовании вида:

$$\delta q_1 = \delta q_2 = 0, \quad \delta z = \delta a, \quad \delta t = 0. \quad (8.13)$$

Подстановка этих выражений в (8.8) с учетом независимости δa от t приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = 0.$$

Но оно эквивалентно закону сохранения компоненты p_z обычного импульса:

$$p_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = Const. \quad (8.14)$$

Если пространство однородно по всем направлениям, то будет сохраняться вектор импульса частицы \vec{p} :

$$\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m\vec{v} = Const, \quad (8.15)$$

ибо в этой ситуации соотношение (8.14) выполняется при произвольном выборе оси z . Формально этот закон сохранения следует из (8.8) при подстановке в него выражений

$$\delta x_1 = \delta a_1, \quad \delta x_2 = \delta a_2, \quad \delta x_3 = \delta a_3, \quad (8.16)$$

где δa_i – компоненты произвольного (но малого) вектора $\overline{\delta a}$, на который производится трансляция системы (частицы). Действительно, в этом случае (8.8) записывается как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta a_i \right) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}, \delta \vec{a} \right) \equiv \frac{d}{dt} (\vec{p}, \overline{\delta a}) = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \overline{\delta a} \right) = 0, \quad (8.17)$$

откуда, в силу произвольности $\overline{\delta a}$, и следует (8.16).

Таким образом, однородность пространства приводит к сохранению обычного импульса.

в) Изотропность пространства

Пусть теперь пространство обладает частичной изотропностью, т.е. все направления, перпендикулярные некоторой оси, равноправны. Это означает неизменность лагранжиана относительно поворотов вокруг этой оси, которую мы примем за ось z цилиндрических координат. Иными словами, лагранжиан должен быть инвариантным относительно преобразования вида

$$\delta q_1 \equiv \delta \rho = 0, \quad \delta q_2 \equiv \delta \varphi = \delta \alpha, \quad \delta a_3 \equiv \delta z = 0, \quad \delta t = 0. \quad (8.18)$$

Подстановка (8.18) с учетом независимости $\delta \alpha$ от t приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0. \quad (8.19)$$

Но оно эквивалентно закону сохранения обобщенного импульса p_φ , который, как мы убедились в примере 1 из §7, совпадает с компонентой L_z обычного момента импульса:

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \dot{\varphi} = L_z = \text{Const}. \quad (8.20)$$

Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны тем, которые привели нас от (8.14) к (8.15). Они приводят к тому, что из полной изотропности пространства следует сохранение всех компонент L_i момента импульса, т.е.

$$L_i = \text{Const} \Leftrightarrow \vec{L} = \text{Const}. \quad (8.21)$$

Чтобы не складывалось впечатление о том, что сохранение момента импульса обусловлено частным выбором арифметизации пространства цилиндрическими координатами, проведем соответствующую формальную выкладку в декартовых координатах. Это тем более полезно, что выкладка сама не укажет, какова же та комбинация координат и скоростей, которая сохраняется в силу изотропности пространства и которую мы называем моментом импульса. Итак, повернем частицу вокруг произвольной оси на произвольный, (но малый) угол $\delta \alpha$, т.е. совершим преобразование

$$\delta x_i = \left[\overline{\delta \alpha}, \vec{r} \right]_i, \quad \delta t = 0. \quad (8.22)$$

Подстановка этих выражений в (8.8) дает:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta a_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \left[\overline{\delta \alpha}, \vec{r} \right]_i \right) \equiv \frac{d}{dt} (\vec{p}, \left[\overline{\delta \alpha}, \vec{r} \right]) = \frac{d}{dt} (\left[\vec{r}, \vec{p} \right], \overline{\delta \alpha}) = \left(\frac{d}{dt} \left[\vec{r}, \vec{p} \right], \overline{\delta \alpha} \right) = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности $\overline{\delta\alpha}$,

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = 0, \quad (8.23)$$

что и приводит к искомому закону сохранения

$$[\vec{r}, \vec{p}] \equiv \vec{L} = Const, \quad (8.24)$$

являющемуся следствием изотропности пространства.

Итак, мы видим, что связь свойств симметрии пространства – времени с законами сохранения прослеживается в лагранжевом формализме достаточно просто. При этом соответствующие выкладки оказываются в общем-то гораздо более естественными, чем в ньютоновом формализме. Утверждение общего характера о существовании связи между инвариантностью функции Лагранжа относительно *произвольного* преобразования обобщенных координат и времени называется *теоремой Нетер*. Ее конструктивная формулировка и доказательство требуют введения ряда дополнительных понятий, а потому мы на них останавливаться не будем, ограничившись рассмотренными выше наиболее важными частными случаями.

§9 Уравнения Гамильтона

Напомним, что пока мы занимаемся механикой лишь одной свободной частицы. Поэтому обобщенными координатами у нас являются три величины q_1, q_2, q_3 , от которых требуется лишь то, чтобы они однозначно задавали положение частицы в пространстве. Однако, как уже неоднократно упоминалось, фактически все сформулированные выше результаты справедливы и в гораздо более общих ситуациях – для движения частицы со связями, для движения системы свободных частиц, для движения системы частиц со связями и даже для немеханических систем. Имея в виду это замечание, мы не будем ограничивать значения индекса i , обобщенных координат значениями 1, 2, 3. Тогда и все последующие результаты будут справедливы в указанных более общих ситуациях.

До сих пор наше рассмотрение ограничивалось рамками ньютонова и лагранжева формализмов. Как мы убедились, последний зачастую оказывается чрезвычайно удобным, хотя по духу он родственен ньютонову формализму. Имея в виду дальнейшие обобщения, резюмируем *суть лагранжева формализма*.

Состояние механической системы задается обобщенными координатами $\{q_i\}$ и обобщенными скоростями $\{\dot{q}_i\}$. Вся динамика сосредоточена в функции Лагранжа

$$L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t), \quad (9.1)$$

которая в чисто механических задачах представляет собой разность кинетической и потенциальной энергий, записанную в обобщенных координатах и обобщенных скоростях:

$$L = T - U. \quad (9.2)$$

Справедлив принцип наименьшего действия

$$\delta S = 0 \quad \text{при} \quad \delta q_i(t_i) = \delta \dot{q}_i(t_i) = 0, \quad (9.3)$$

где действие S определяется как функционал

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\}, t) dt. \quad (9.4)$$

Из принципа наименьшего действия вытекают уравнения движения системы – уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (9.5)$$

инвариантные относительно *точечных преобразований*

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(\{q_i\}, t). \quad (9.6)$$

Кстати, множество упорядоченных наборов $\{q_i\}$ часто называют *конфигурационным пространством* данной системы. Оно имеет размерность l , где l – число степеней свободы системы: для свободной частицы $l = 3$. Если увеличить размерность этого пространства на единицу, включив в число координат и время t , то получим *расширенное конфигурационное*

пространство. Используя такой язык, можно сказать, что уравнения Лагранжа инвариантны относительно отображений конфигурационного пространства в себя.

Если теперь внимательно посмотреть на лагранжев формализм, обнаружится, что с эстетической и математической точек зрения он обладает некоторыми изысками.

1. Состояние системы задается величинами q_i и \dot{q}_i , коих имеется $2l$ штук, тогда как в качестве неизвестных в уравнениях движения фигурирует лишь l функций $q_i = q_i(t)$.

2. Уравнения движения инвариантны относительно лишь точечных преобразований, не включающих обобщенных скоростей, т.е. и в этом отношении часть параметров состояния подвергается дискриминации.

3. Уравнения Лагранжа суть обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка по времени, тогда как математики предпочитают иметь дело с системами уравнений первого порядка, поскольку они их досконально изучили.

Этими формальными обстоятельствами и был инициирован переход от лагранжева к *гамильтонову формализму*, который обладает большим изяществом, а потому иногда именуется *каноническим формализмом*. Для нас он будет представлять не просто академический или какой-то самостоятельный интерес. Дело просто в том, что такие фундаментальные разделы современной физики, как статистическая механика и квантовая механика, строятся как раз на базе гамильтонова формализма, а потому им необходимо овладеть в рамках уже классической механики.

В гамильтоновом формализме:

1. Состояние системы задается обобщенными координатами $\{q_i\}$ и обобщенными импульсами

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (9.7)$$

которые считаются независимыми переменными и составляют $2l$ -мерное *фазовое пространство*;

2. Уравнения движения включают в качестве неизвестных функций

$$q_i = q_i(t)$$

и

$$p_i = p_i(t);$$

3. Уравнения движения суть обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка по времени;

4. Уравнения движения инвариантны относительно *канонических преобразований* гораздо более общего вида, чем (9.6):

$$q_i \rightarrow Q_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t), p_i \rightarrow P_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t). \quad (9.8)$$

Разумеется, ничто не покупается задаром. За то, что уравнения Гамильтона обретают первый порядок по времени, приходится платить тем, что число их удваивается по сравнению с числом уравнений Лагранжа. Но, как мы увидим, с практической точки зрения такое

удвоение не приводит ни к каким дополнительным трудностям, а с формальной точки зрения таит в себе большие достоинства.

Переходим теперь к построению гамильтонова формализма. Наша конкретная цель – переформулировать всю классическую механику в терминах обобщенных координат q_i и обобщенных импульсов p_i как независимых параметров состояния. Введем прежде всего следующее фундаментальное для всего формализма в целом понятие.

Определение. Обобщенная энергия \tilde{E} , рассматриваемая как функция обобщенных координат и обобщенных импульсов, называется *функцией Гамильтона*, или *гамильтонианом*, системы:

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \equiv (p_i \dot{q}_i - L) \Big|_{\dot{q}_i = \dot{q}_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t)}. \quad (9.9)$$

Как мы сейчас увидим, гамильтониан определяет всю динамику системы (аналогично лагранжиану в лагранжевом формализме). С этой точки зрения важно, что он, в отличие от функции Лагранжа, имеет самый непосредственный физический смысл, совпадая, по сути дела, с энергией системы.

Самое главное здесь то, что гамильтониан является функцией от $\{q_i\}$ и $\{p_i\}$ и не имеет права содержать обобщенные скорости $\{\dot{q}_i\}$.

Рецепт построения гамильтониана следует из самого его определения.

1. Вводим обобщенные координаты и записываем функцию Лагранжа.
2. Находим обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (9.10)$$

3. Строим обобщенную энергию \tilde{E} как функцию пока $\{q_i\}$ и $\{\dot{q}_i\}$:

$$\tilde{E} = p_i \dot{q}_i - L. \quad (9.11)$$

4. Выражаем с помощью (9.10) обобщенные скорости через обобщенные импульсы:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\{p_i\}, \{q_i\}, t). \quad (9.12)$$

5. Подставляем эти выражения в обобщенную энергию, в результате чего и получается функция Гамильтона.

Примеры

0. Построим гамильтониан для свободной частицы в декартовых координатах. Имеем:

$$L = T - U = \frac{mv^2}{2} - U, \vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v}, \tilde{E} = E = \frac{mv^2}{2} + U;$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}.$$

Подстановка в \tilde{E} выражения для \vec{v} дает нам функцию Гамильтона

$$\boxed{H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}, t)}. \quad (9.13)$$

1. Построим гамильтониан для свободной частицы в цилиндрических координатах. Имеем:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z);$$

$$p_\rho \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}, \quad p_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z};$$

$$\tilde{E} = E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(\rho, \varphi, z).$$

Выражаем обобщенные скорости через обобщенные импульсы:

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

Подставляем эти выражения в обобщенную энергию:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) + U(\rho, \varphi, z). \quad (9.14)$$

2. Построим гамильтониан для свободной частицы во вращающейся системе координат. Вспоминая результаты §7, имеем:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + m(\vec{v}[\vec{r}\vec{\omega}]) + \frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2 - U(\vec{r});$$

$$\vec{p} = m\vec{v} + m[\vec{\omega}\vec{r}];$$

$$\tilde{E} = \frac{m\vec{v}^2}{2} - \frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2 + U(\vec{r});$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{p} - m[\vec{\omega}\vec{r}]}{m} = \frac{\vec{p}}{m} - [\vec{\omega}\vec{r}].$$

Подстановка последнего выражения в предпоследнее дает:

$$H = \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} [\vec{\omega}\vec{r}]^2 - (\vec{p}[\vec{\omega}\vec{r}]) \right\} - \frac{m}{2} [\vec{\omega}\vec{r}]^2 + U(\vec{r}).$$

Приводя подобные члены и осуществляя циклическую перестановку сомножителей в связанном произведении, окончательно имеем:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - (\vec{\omega}[\vec{r}\vec{p}]) + U(\vec{r}). \quad (9.15)$$

Поучительно сравнить полученный результат с формулой (7.53), которая дает нам закон преобразования энергии частицы при переходе от инерциальной системы отсчета к вращающейся.

3. Построим гамильтониан для заряженной частицы, движущейся во внешнем электромагнитном поле. Вспоминая пример 3 из §7, имеем:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + e(\vec{v}\vec{A}) - e\varphi;$$

$$\vec{p} = m\vec{v} + e\vec{A};$$

$$\tilde{E} = \frac{m\vec{v}^2}{2} + e\varphi; \quad \vec{v} = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}.$$

Подстановка последнего выражения в предпоследнее приводит к результату фундаментальной важности:

$$\boxed{H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi}. \quad (9.16)$$

Он будет прокомментирован в классической электродинамике. А в квантовой механике этот результат сразу позволит нам включить в уравнение Шредингера, описывающее поведение микрочастицы, взаимодействие этой частицы с электромагнитным полем.

Итак, мы достаточно подробно ознакомились с понятием функции Гамильтона. Но зачем она нужна? Ответ уже был сформулирован – функция Гамильтона определяет всю динамику системы. Обсудим эту проблему.

Теорема. Уравнениями движения в гамильтоновом формализме являются уравнения Гамильтона, именуемые также каноническими уравнениями:

$$\boxed{\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}}. \quad (9.17)$$

Прежде чем переходить к доказательству этой теоремы, уместно рассмотреть примеры, проясняющие структуру и смысл канонических уравнений.

Примеры

0. Для свободной частицы в декартовых координатах уравнения Гамильтона записываются следующим образом:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m}. \quad (9.18)$$

В первом из них мы узнаем Второй закон Ньютона. Второе уравнение выражает скорость частицы через ее импульс, или наоборот. Если с его помощью записать импульс как

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$$

и подставить результат в первое уравнение, то придем ко Второму закону в его первоначальной формулировке:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{F}. \quad (9.19)$$

Таким образом, уравнения Гамильтона (как и уравнения Лагранжа) ничего существенно нового, разумеется, не содержит. Их преимущества проявляются лишь при анализе общих проблем и в разного рода обобщениях.

1. Для свободной частицы в цилиндрических координатах

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) + U(\rho, \varphi, z),$$

а потому

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m};$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2};$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}.$$

В итоге уравнения Гамильтона записываются как

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_\rho}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} \\ \frac{dp_\varphi}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial \varphi} \\ \frac{dp_z}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{p_\rho}{m} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{p_z}{m} \end{aligned} \right\}. \quad (9.20)$$

Вторая тройка уравнений связывает обобщенные импульсы с обобщенными скоростями. Наиболее сложной структурой обладает самое первое уравнение. Однако после подстановки в него выражений $p_\rho = m\dot{\rho}$ и $p_\varphi = m\dot{\varphi}\rho^2$, получаемых из второй тройки, это уравнение приведет к виду

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad (9.21)$$

уже известному нам из лагранжева формализма.

Этот пример в еще большей степени показывает, что применение гамильтонова формализма при решении конкретных задач совершенно излишне и даже обременительно – для этой цели наиболее приспособлен лагранжев формализм.

2-3. Эти примеры ничего нового нам не сообщают, а потому мы их рассматривать не будем, оставляя на упражнения.

Вернемся теперь к нашей основной теореме и докажем ее. При этом доказательство проведем двумя разными способами.

Доказательство I

Исходим из лагранжева формализма, где основой является лагранжиан L , зависящий от $\{q_i, \dot{q}_i\}, t$. Для его полного дифференциала имеем:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{dL}{dt} dt. \quad (9.22)$$

Вспоминая определение обобщенных импульсов и уравнения Лагранжа, представим (9.22) в форме

$$dL = \dot{p}_i \cdot dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (9.23)$$

Теперь нам нужно от набора переменных $\{q_i, \dot{q}_i\}$ перейти к набору переменных $\{q_i, p_i\}$. Это делается с помощью простого преобразования, известного в математике под названием *преобразования Лежандра* (кстати, оно чрезвычайно широко применяется в термодинамике). В нашем случае оно сводится к переписи второго члена в (9.23) в виде

$$p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i. \quad (9.24)$$

Подставив это выражение в (9.24) и перегруппировав члены, получим

$$d(p_i \dot{q}_i - L) = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (9.25)$$

Поскольку справа стоит дифференциальная форма от dq_i и dp_i , то и слева фигурирует дифференциал от некой функции, зависящей от q_i и p_i . Но в ней мы узнаем не что иное, как гамильтониан, так что (9.25) представляется в форме

$$dH = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (9.26)$$

Отсюда, вспоминая дифференциальное исчисление функций многих переменных, мы и приходим к уравнениям Гамильтона:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (9.27)$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Попутно получен еще один важный результат. Как видно из (9.26),

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (9.28)$$

Вспоминая смысл гамильтониана как (обобщенной) энергии, мы приходим к закону изменения (обобщенной) энергии. В частности, она сохраняется тогда и только тогда, когда $L(H)$ не зависит явно от t (см. §8).

Доказательство II

Исходим вновь из лагранжева формализма, в котором уравнения движения получаются из принципа наименьшего действия

$$\delta S = 0 \quad \text{при} \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \quad (9.29)$$

причем

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) dt. \quad (9.30)$$

Перепишем действие, выразив лагранжиан через обобщенную энергию

$$\tilde{E} = p_i \dot{q}_i - L. \quad (9.31)$$

Тогда получим

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - \tilde{E}) \Big|_{\{q_i, \dot{q}_i\}}^{dt}. \quad (9.32)$$

Исключим теперь обобщенные скорости, введя в качестве переменных q_i и p_i и переходя тем самым к гамильтонову формализму. Вспоминая определение гамильтониана, для действия (9.32) найдем:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H) \Big|_{\{q_i, p_i\}} dt. \quad (9.33)$$

Варьируя действие (9.33), получим

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt = 0. \quad (9.34)$$

Проводя в первом члене интегрирование по частям и отбрасывая внеинтегральное слагаемое (δq_i на концах равны нулю), после перегруппировки членов вместо (9.34) получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right\} dt = 0. \quad (9.35)$$

Поскольку вариации δp_i и δq_i независимы, мы можем сначала рассмотреть случай, когда все $\delta p_i = 0$. Тогда останется лишь второй интеграл, и, в силу основной леммы вариационного исчисления мы получим первый набор уравнений Гамильтона:

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (9.36)$$

С учетом (9.36) соотношение (9.35) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i dt = 0. \quad (9.37)$$

Но здесь мы не можем применить основную лемму вариационного исчисления, поскольку, вообще говоря,

$$\delta p_i(t_1) \neq 0 \quad \text{и} \quad \delta p_i(t_2) \neq 0. \quad (9.38)$$

Зато в силу независимости вариаций δp_i , мы можем все из них, кроме одной, положить равными нулю, так что в соотношении (9.37) можно не подразумевать суммирования по дважды повторяющемуся индексу. Соответствующий интеграл равен нулю при любых t_1 и t_2 , а это может быть лишь в том случае, когда подынтегральное выражение обращается в нуль. Сокращая на $\delta p_i \neq 0$, приходим ко второму набору уравнений Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (9.39)$$

чем и завершается доказательство основной теоремы.

§10. Законы сохранения и скобки Пуассона

Как и всегда, в гамильтоновом формализме возникает вопрос: как находить интегралы движения, не интегрируя предварительно канонические уравнения?

Общий ответ на него мы знаем: разумеется из соображений симметрии. При этом здесь соответствующие результаты формулируются наиболее элегантно и естественным образом. Но, к сожалению, мы их не сможем не только доказать, но даже просто сформулировать, ибо для этого требуется введение довольно тонких математических понятий. Ограничимся лишь несколькими достаточно поверхностными наблюдениями.

Определение. Если функция Гамильтона не содержит явно обобщенную координату q , то эта координата называется *циклической*.

Теорема. Обобщенный импульс p_q , соответствующий циклической координате q , сохраняется.

Доказательство

Утверждение следует из соответствующего уравнения Гамильтона

$$\dot{p}_q = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Заметим, что если q – циклическая координата лагранжиана, то она будет циклической координатой гамильтониана, и наоборот. Так что в этом пункте ничего существенно нового гамильтонов формализм не дает. Но все же какие-то связи между законами сохранения и свойствами симметрии выявляются. При этом наличие симметрии относительно преобразований

$$q'_i = q_i + \delta q_i, \quad p'_i = p_i + \delta p_i, \quad t' = t + \delta t \quad (10.1)$$

теперь формулируется как *инвариантность гамильтониана* относительно этого преобразования:

$$\delta H \equiv H(\{q_i + \delta q_i\}, \{p_i + \delta p_i\}, t + \delta t) - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = 0. \quad (10.2)$$

Примерно такой же характер имеет и следующее простое утверждение.

Теорема. Гамильтониан H сохраняется тогда и только тогда, когда он не зависит явно от времени.

Доказательство

Этот результат фактически уже был получен в процессе вывода уравнения Гамильтона – в виде равнозначного ему соотношения (9.28)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (10.3)$$

Он допускает и непосредственное доказательство, причем более простое и наглядное:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial t},$$

где на втором этапе использованы канонические уравнения Гамильтона.

Как и в предыдущей теореме, здесь прослеживается связь между однородностью времени и сохранением (обобщенной) энергии, с которой по сути дела совпадает гамильтониан.

Перепишем (10.3) в следующей, на первый взгляд достаточно абсурдной форме:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial(-t)} \quad (10.4)$$

и сравним результат с уравнение Гамильтона

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (10.5)$$

Из сравнения (10.4) и (10.5) вытекает возможность такой интерпретации. Расширим фазовое пространство $\{q_i, p_i\}$, рассматривая чисто формально и переменную $-t$ как параметр состояния системы. Тогда гамильтониан H можно будет трактовать как обобщенный импульс, соответствующий этой переменной. Оказывается, что несмотря на сугубо формальный характер подобной процедуры, она является все же достаточно глубокой и осмысленной. В частности, такая трактовка вполне справедлива в СТО, где пространственные координаты и время, с одной стороны, и компоненты импульса и энергии, с другой стороны, выступают на равной основе. Кроме того, в какой-то степени становится понятным, почему в квантовой механике наряду с соотношением неопределенностей координата – импульс:

$$\Delta q \cdot \Delta p \sim \hbar \quad (10.6a)$$

имеет место и соотношение неопределенностей энергия – время:

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar. \quad (10.6 б)$$

И все же время и пространственная координата имеют равную природу несут в физике разную смысловую нагрузку. Поэтому, в частности, соотношение (10.7) трактуется в квантовой механике совсем иначе, чем соотношение (10.6). Об этом будет подробно говориться в соответствующем курсе.

Заметим, что только что рассмотренная теорема фактически формулирует условия, необходимые и достаточные для сохранения (обобщенной) энергии. Но условие $\partial H / \partial t = 0$ полностью эквивалентно условию $\partial L / \partial t = 0$, возникающему в этом пункте в лагранжевом формализме и мы опять ничего существенно нового по сравнению с тем, что уже узнали из §8, не получаем.

Каковы же все-таки преимущества гамильтонова формализма с точки зрения проведения анализа законов сохранения? Об одном из них мы уже упоминали. Он дает наиболее простой и естественный способ формулировки законов сохранения как следствий свойств симметрии, но на этой проблеме мы договорились не останавливаться. Другое преимущество состоит в том, что в гамильтоновом формализме удастся сразу выяснить, сохраняется ли во времени любая заданная физическая величина

$$F = F(\{q_i\}, \{p_i\}, t). \quad (10.7)$$

При этом, в отличие от ньютонова формализма, и даже лагранжева формализма, соответствующая процедура не требует непосредственного привлечения уравнений движения, а сводится к простой алгебраической выкладке. Вот на этой проблеме, чрезвычайно важной для квантовой механики, мы сейчас и остановимся. Основным здесь является следующее понятие.

Определение. Скобкой Пуассона $\{F_1, F_2\}$ физических величин F_1 и F_2 типа (10.7) называется комбинация

$$\{F_1, F_2\} = \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \frac{\partial F_2}{\partial p_i}. \quad (10.8)$$

Прежде чем применять это понятие для решения указанной выше проблемы, следует освоиться с ним. С этой целью сформулируем основные свойства скобок Пуассона и установим несколько результатов, представляющих и самостоятельный интерес (особенно в связи с квантовыми механическими приложениями).

Свойства скобок Пуассона

$$\text{а) Однородность: } \{\alpha F_1, F_2\} = \alpha \{F_1, F_2\}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad (10.9\text{а})$$

$$\text{б) аддитивность: } \{F_1 + F_2, F_3\} = \{F_1, F_3\} + \{F_2, F_3\}; \quad (10.9\text{б})$$

$$\text{в) правило Лейбница: } \{F_1 F_2, F_3\} = F_1 \{F_2, F_3\} + \{F_1, F_3\} F_2; \quad (10.9\text{в})$$

$$\text{г) антисимметричность: } \{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}; \quad (10.9\text{г})$$

$$\text{д) тождество Якоби: } \{F_1 \{F_1, F_3\}\} + \{F_3 \{F_1, F_2\}\} + \{F_2 \{F_3, F_1\}\} = 0. \quad (10.9\text{д})$$

Доказательство свойств (а) – (г) тривиальны – они следуют непосредственно из определения (10.8), и их полезно проверить самостоятельно. Доказательство тождества Якоби (10.9д) весьма громоздко, и мы его проводить не будем.

Теорема. Уравнения Гамильтона допускают следующую симметричную форму записи:

$$\dot{p}_i = \{H, p_i\}; \quad \dot{q}_i = \{H, q_i\}. \quad (10.10)$$

Доказательство

Достаточно вычислить фигурирующие в (10.10) скобки Пуассона и сравнить результаты с правыми частями уравнений Гамильтона (9.17). Имеем:

$$\{H, p_i\} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = 0 - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta_{ik} = -\frac{\partial H}{\partial q_i};$$

$$\{H, q_i\} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta_{ik} - 0 = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

что и требуется.

Определение. Два набора величин $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$, состоящих каждый из l элементов (l – число степеней свободы), называются *канонически сопряженными переменными*, если

$$\{f_i, f_j\} = \{g_i, g_j\} = 0; \quad \{f_i, g_j\} = -\delta_{ij}. \quad (10.11)$$

Теорема. Обобщенные координаты $\{q_i\}$ и обобщенные импульсы $\{p_i\}$ суть канонически сопряженные переменные.

Доказательство

Необходимые соотношения

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0; \quad \{q_i, p_j\} = -\delta_{ij} \quad (10.12)$$

проверяются непосредственно, на основе определения (10.8)

Теорема. Скорость изменения произвольной физической величины типа (10.7) задается формулой

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\}. \quad (10.13)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \equiv \\ &\equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\}, \end{aligned}$$

где на втором этапе использованы уравнения Гамильтона.

Доказанное утверждение полностью решает сформулированную выше проблему непосредственной проверки того, является ли данная физическая величина интегралом движения.

Основной результат. Физическая величина F сохраняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = 0. \quad (10.14)$$

В качестве элементарного приложения установим еще одним способом (третьим) условия сохранения (обобщенной) энергии.

Следствие. Гамильтониан H сохраняется тогда и только тогда, когда он не зависит явно от времени.

Результат сразу следует из условия сохранения (10.14) при $F = H$ с учетом того, что скобка Пуассона любой величины с собой равна нулю:

$$\{F, F\} = 0. \quad (10.15)$$

Вопрос. Из какого свойства (10.9) сразу вытекает последнее равенство?

Особенно элегантно основной результат выглядит в практически наиболее интересных случаях, когда функция F не зависит явно от времени, так что в условии (10.14) остается лишь скобка Пуассона. Ввиду своей важности он заслуживает специальной терминологии, пригодной и к квантовой механике.

Определение. Если

$$\{F_1, F_2\} = 0, \quad (10.16)$$

то говорят, что величины F_1 и F_2 *коммутируют*.

Чем иницировано такое определение? Свойствами (10.9) скобок Пуассона. Дело в том, что сопоставление любым двум величинам F_1 и F_2 некоторой третьей величины $\{F_1, F_2\}$ по правилу (10.8) с математической точки зрения равнозначно введению в множестве всех F операции *умножения* (называемой, кстати, лиевым произведением). Одна из ее характерных особенностей состоит в том, что такое умножение, согласно свойству (10.9г), вообще говоря некоммутативно:

$$\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}. \quad (10.17)$$

Допустим, однако, что наряду с (10.17) имеет место равенство

$$\{F_1, F_2\} = \{F_2, F_1\}. \quad (10.18)$$

Когда это может быть? Очевидно, лишь в том случае, когда $\{F_1, F_2\} = 0$, т.е. когда выполняется (10.16). Столь же очевидно и обратное положение: если справедливо равенство (10.16), то выполняется и (10.18). Именно по этим причинам и является естественным сформулированное выше определение. В итоге мы приходим к следующему утверждению.

Важнейший результат. Физическая величина F , не зависящая явно от времени, сохраняется тогда и только тогда, когда она коммутирует с гамильтонианом:

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Leftrightarrow \{H, F\} = 0.$$

Отметим в связи с обсуждаемой проблематикой следующее утверждение.

Теорема Пуассона. Если F и G – интегралы движения, то $\{F, G\}$ также интеграл движения.

Доказательство

Проведем доказательство лишь для практически наиболее интересного случая, когда F и G не зависят явно от времени (то же относится, разумеется, и к их скобке Пуассона). По условию,

$$\{H, F\} = 0, \quad \{H, G\} = 0, \quad (10.19)$$

и требуется показать, что

$$\{H, \{F, G\}\} = 0. \quad (10.20)$$

Но этот результат сразу получается, если взять тождество Якоби (10.9а) и положить в нем

$$F_1 = F, \quad F_2 = G, \quad F_3 = H: \\ \{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0.$$

Теорема справедлива и в общей ситуации, когда F и G содержат явно время, но мы на доказательстве не останавливаемся.

На первый взгляд может показаться, что теорема Пуассона служит неисчерпаемым источником интегралов движения. Действительно, пусть мы из каких-то соображений нашли два из них – F_1 и F_2 . Тогда, образуя скобку Пуассона $\{F_1, F_2\}$, получим третий интеграл F_3 . Образуя затем $\{F_1, F_3\}$ и $\{F_2, F_3\}$, найдем еще два интеграла F_4 и F_5 , и так далее.

Ясно, однако, что рано или поздно цепочка должна оборваться хотя бы потому, что общее количество первых интегралов ограничено числом l (напомним, что l – число степеней свободы). Но дело даже не в этом. На практике описанная процедура чаще всего вообще не приводит к новым интегралам. В подавляющем большинстве случаев скобка Пуассона $\{F_1, F_2\}$ двух независимых интегралов движения F_1 и F_2 либо равна просто числовой константе (чаще всего нулю), либо представляет собой функцию, выражающуюся через F_1 и F_2 .

Поэтому скобка Пуассона вовсе не снимает проблему отыскания интегралов движения. И как всегда, ведущая роль здесь принадлежит теореме Нетер, устанавливающей связь между законами сохранения и свойствами симметрии.

§11. Действие

Рассмотрим теперь чуть более подробно одну из важнейших величин в классической механике – *действие* S . В лагранжевом формализме мы определили его как интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (11.1)$$

который в гамильтоновом формализме переписывается в виде

$$S = \int_{t_0}^t (p_i \dot{q}_i - H) dt. \quad (11.2)$$

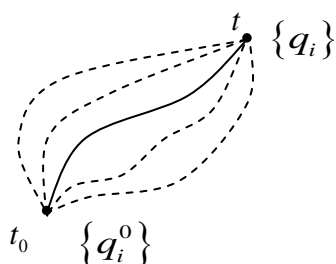
Здесь мы несколько изменили обозначения для пределов интегрирования, записывая вместо t_1 и t_2 , употреблявшихся раньше, t_0 и t . Это совершенно не меняет сути дела, но оказывается более удобным для дальнейшего. Заметим, что действие имеет размерность произведения энергии на время, или обычного импульса на длину:

$$[S] = [E][t] = [p] \cdot [l] \quad (11.3)$$

и измеряется оно обычно в Дж·с (в системе СГС – в эрг·с).

До сих пор действие рассматривалось у нас в следующем аспекте.

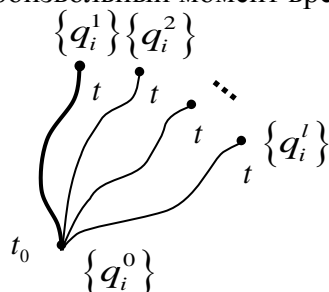
Считается, что моменты времени t_0 и t фиксированы, что положения



$$q_i(t_0) \equiv q_i^0 \quad \text{и} \quad q_i(t) \equiv q_i$$

тоже фиксированы, и сравниваются значения S для всевозможных траекторий, проходящих через указанные точки. Лишь одна из этих траекторий отвечает истинному движению – та из них, для которой функционал S принимает экстремальное значение.

Теперь же будем рассматривать действие в другом аспекте. По-прежнему считается, что момент времени t_0 и положение $q_i(t_0) \equiv q_i^0$ фиксированы. Но сравниваются значения действия для истинных траекторий, начинающихся в указанной точке, но заканчивающихся в произвольный момент времени t в разных точках



$q_i(t) = q_i$. Иными словами, действие рассматривается теперь как функция верхнего предела интегрирования и значений координат в этом верхнем пределе:

$$S = S(\{q_i\}, t). \quad (11.4)$$

В такой постановке задачи для полной производной действия по времени из (11.4) имеем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dS}{dq_i} \dot{q}_i. \quad (11.5)$$

С другой стороны, непосредственно из определения (11.2) можно записать

$$\frac{dS}{dt} = -H + p_i \dot{q}_i. \quad (11.6)$$

Сравнивая (11.6) с (11.5), прежде всего получаем выражения для обобщенных импульсов через функцию действия:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (11.7)$$

Отсюда видно, что действие, понимаемое в смысле (11.4), можно рассматривать как *потенциал* l – мерного вектора обобщенного импульса.

Далее, то же сравнение (11.6) с (11.5) дает нам выражение для гамильтониана через функцию действия:

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (11.8)$$

Но при интерпретации последнего соотношения следует соблюдать осторожность. Дело в том, что действие, согласно (11.4) есть функция координат и времени, тогда как гамильтониан в качестве независимых переменных содержит координаты, время и импульсы:

$$H = H(\{q_i\}, \{p_i\}, t). \quad (11.9)$$

Поэтому, чтобы результат (11.8) был осмысленным, нужно в левой его части все импульсы выразить через координаты и время. Но это достигается очень просто – с помощью формул (11.7). Так что фактически соотношение (11.8) в развернутой форме записывается следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_i}\right\}, t\right) = 0. \quad (11.10)$$

Но тогда оно из простой связи между гамильтонианом и действием превращается в уравнение, в котором само действие является неизвестной функцией. Это уравнение играет фундаментальную роль в высших разделах классической механики и называется *уравнением Гамильтона-Якоби*.

Замечания

1. На самом деле проведенные выше рассуждения не являются абсолютно строгими, так как мы прогнозировали довольно деликатные детали. Но нам эта строгость вовсе ни к чему. Окончательные и важнейшие результаты, которыми мы только и будем пользоваться в квантовой механике – формулы (11.7), (11.8), (11.10) – оказываются правильными.
2. Уравнение Гамильтона-Якоби служит основой еще одного, уже четвертого, формализма классической механики (наряду с ньютоновым, лагранжевым и гамильтоновым формализмами) – *формализма Гамильтона-Якоби*. Дело в том, что с

помощью функции действий S , получаемой путем решения нелинейного уравнения (11.10), оказывается возможным найти зависимость координат q_i и импульсов p_i от времени, т.е. полностью описать движение механической системы. Формализм Гамильтона-Якоби чрезвычайно эффективен и позволяет решать задачи, не поддающиеся исследованию с помощью других методов. Но он достаточно сложен с идейной точки зрения, а потому мы его развивать не будем.

3. Уравнение Гамильтона-Якоби непосредственно не связано с каноническими уравнениями Гамильтона. С математической точки зрения, последние являются ничем иным, как уравнениями характеристик для уравнения (11.10), представляющего собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Пример

Чтобы понять структуру уравнения Гамильтона-Якоби, запишем его в декартовых координатах для свободной частицы, движущейся в заданном внешнем поле. Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z, t). \quad (11.11)$$

Поэтому уравнение (11.10) в данном конкретном случае принимает следующую форму:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + U(x, y, z, t) = 0, \quad (11.12)$$

или, в векторной записи,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 + U(\vec{r}, t) = 0. \quad (11.13)$$

В частности, для одномерного движения частицы уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + U(x, t) = 0. \quad (11.14)$$

В большом классе задач потенциальная энергия, а вместе с ней и гамильтониан, не зависят явно от времени. В этом случае, как мы видели, гамильтониан, т.е. (обобщенная) энергия, сохраняется, и можно записать:

$$H = E, \quad (11.15)$$

где E – константа (значение энергии), определяемая начальными условиями. В этом случае зависимость действия от времени получается сразу из его определения (11.2), которое дает при учете (11.15)

$$S = \int_{t_0}^t p_i \dot{q}_i dt - E(t - t_0) \equiv \int_{t_0}^t p_i dq_i - E(t - t_0). \quad (11.16)$$

Нетривиальной здесь оказывается лишь зависимость действия от координат, которая вся содержится в первом слагаемом (11.16). Именно оно является наиболее важным, а потому заслуживает специального названия.

Определение.

Величина

$$S_0 \equiv \int_{t_0}^t p_i dq_i \quad (11.17)$$

называется *укороченным действием*.

Подстановка в уравнение Гамильтона-Якоби выражения (11.16) для действия с учетом определения (11.17) сразу дает нам уравнение для укороченного действия:

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial S_0}{\partial q_i}\right\}\right) = E. \quad (11.18)$$

В частности, для рассмотренного выше примера мы вместо (11.13) получаем

$$\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}S)^2 + U(\vec{r}) = E. \quad (11.19)$$

В чем же важность для нас понятия укороченного действия и уравнения Гамильтона-Якоби в форме (11.18), или, даже конкретнее, уравнения (11.19)?

1. Рассмотрим движение свободной частицы, для которой

$$S_0 = S_0(\vec{r}). \quad (11.20)$$

Поверхности постоянного укороченного действия задаются уравнениями

$$S_0(\vec{r}) = Const. \quad (11.21)$$

С другой стороны, согласно (11.7), для импульса частицы имеем

$$\vec{p} = \vec{\nabla}S. \quad (11.22)$$

Таким образом, в каждый момент времени импульс частицы, т.е. направление ее движения, перпендикулярен поверхности постоянного укороченного действия.

Но аналогичная ситуация нам известна и из оптики. Здесь имеются определенные поверхности – поверхности волнового фронта, к которым перпендикулярны лучи света, т.е., прямые, вдоль которых он распространяется. Так вот, как показывается в геометрической оптике, здесь также существует некоторая функция $\psi_0(\vec{r})$, называемая укороченным эйконалом и обладающая следующими свойствами:

а) уравнения

$$\psi_0(\vec{r}) = Const \quad (11.23)$$

задают уравнения всевозможных волновых фронтов;

б) волновой вектор \vec{k} , задающий направление распространения света, выражается через укороченный функционал формулой

$$\vec{k} = \vec{\nabla} \varphi_0; \quad (11.24)$$

в) укороченный эйконал ψ_0 подчиняется уравнению, абсолютно идентичному уравнению Гамильтона-Якоби в форме (11.19).

Таким образом,

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА АНАЛОГИЧНЫ!

Это утверждение составляет суть так называемой оптико-механической аналогии Гамильтона. Ее можно продолжить, рассматривая не укороченный, а полный эйконал

$$\psi = \psi(\vec{r}, t), \quad (11.25)$$

которому в механике соответствует полное действие S . Оказывается, что циклическая частота ω связана с эйконалом соотношением

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (11.25)$$

подобным соотношению (11.8) механики. Главное, что здесь усматривается следующая аналогия:

$$\vec{p}, E \leftrightarrow \vec{k}, \omega. \quad (11.26)$$

2. Шредингер поставил следующий естественный вопрос. Если классическая механика есть аналог геометрической оптики, то нельзя ли построить какую-то новую механику, являющуюся аналогом волновой оптики? Такую механику он построил, назвав ее по понятным причинам *волновой механикой*. Так исторически была открыта квантовая механика.

На соответствующую аналогию еще раньше обратил внимание де Бройль, который, отправляясь от соответствия (11.26), приписал частицам, и прежде всего электрону, волновые характеристики \vec{k} и ω . Как же они должны быть связаны с корпускулярными характеристиками \vec{p} и E ? Очевидно, посредством некой фундаментальной константы. Но таковая уже имелась – постоянная Планка \hbar , с помощью которой гипотеза де Бройля формулируется следующим образом. У всякой частицы наряду с корпускулярными имеются и волновые свойства. Они описываются величинами \vec{k}, ω , связанными с \vec{p}, E формулами

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}. \quad (11.27)$$

3. Итак, при построении новой теории микромира появляется новая константа – постоянная Планка \hbar . Но она имеет размерность произведения энергии на время, т.е. размерность действия. Случайно ли это обстоятельство? Уже в 1913 г. в работе Н. Бора было выяснено, что этот факт является весьма глубоким. Н. Бор предположил, что величина \hbar это есть вообще минимально возможная величина действия. Если для данной системы изменение действия гораздо больше \hbar :

$$\Delta S \gg \hbar, \quad (11.29)$$

то справедливы законы классической механики. Если же в каком-то процессе

$$\Delta S \sim \hbar, \quad (11.30)$$

то законы классической механики становятся непригодными, и на движение системы нужно накладывать какие-то дополнительные ограничения.

4. Основываясь на излагаемом в данном параграфе формализме, Н. Бор предложил следующие ограничения. Он рассматривал лишь периодические движения, разлагая их на элементарные гармонические составляющие, каждой из которых отвечает своя обобщенная координата q_i и обобщенный импульс p_i (как это можно сделать, мы увидим в конце нашего курса классической механики). Так вот, Н. Бор высказал гипотезу, что изменение укороченного действия, отвечающего данной гармонике, за период должно быть кратно постоянной Планка (поскольку последняя имеет смысл минимального действия). Вспоминая выражение (11.17) для S_0 , условие квантования Бора можно записать как

$$\Delta S_0^{(i)} \equiv \oint p_i dq_i = n_i h \equiv 2\pi n_i \hbar, \quad (11.31)$$

где суммирование по i в левой части не проводится, интегрирование производится по одному периоду, а n_i – произвольное натуральное число. Впоследствии выяснилось, что условие квантования (11.31) является приближенным, и что оно следует из квантовой механики – в частности, из волновой механики Шредингера, упоминавшейся выше.