

Глава IV. ДИНАМИКА СИСТЕМ ЧАСТИЦ

В данной главе обсуждается наиболее общая задача классической механики – задача об определении движения *системы частиц*. Общее их число в системе будем обозначать буквой N , а отдельные частицы нумеруются индексом $a=1,2,\dots,N$. Сначала будут анализироваться системы свободных частиц, а затем мы введем в рассмотрение *связи*, ограничивающие движение отдельных частиц системы.

§1. Движение системы свободных частиц

Пусть сначала система частиц – *замкнутая*. Согласно принципу детерминированности, ее состояние задается положениями и скоростями отдельных частиц – всего $6N$ величинами

$$X \equiv \{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N\}, \quad \dot{X} \equiv \{\dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N\}. \quad (1.1)$$

Закон движения системы полностью определяется заданием начального состояния

$$X|_{t=t_0} \equiv X_0, \quad \dot{X}|_{t=t_0} \equiv \dot{X}_0 \equiv V_0 \quad (1.2)$$

и записывается в общем виде как

$$X = X(t; X_0, V_0). \quad (1.3)$$

Согласно Второму закону Ньютона, ускорения частиц в любой момент времени однозначно определяются положениями и скоростями частиц в этот же момент времени:

$$\ddot{X} = \mathcal{F}(X, \dot{X}; t), \quad (1.4)$$

или, после введения масс и в более подробной записи,

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N; t). \quad (1.5)$$

Здесь \vec{F}_a – сила, действующая на частицу a со стороны всех прочих частиц замкнутой системы и равная, согласно принципу суперпозиции,

$$\vec{F}_a = \sum_{b \neq a} \vec{F}_{ab}, \quad (1.6)$$

где \vec{F}_{ab} – сила, действующая на частицу a со стороны частицы b .

Незамкнутая система – это такая система частиц, движение которых определяется не только их взаимодействием, но и другими телами, в систему не включенными. При этом состояние движения внешних тел считается заданным. Второй закон Ньютона теперь записывается как

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a^{\text{int}} + \vec{F}_a^{\text{ext}}. \quad (1.7)$$

Здесь \vec{F}^{int} – внутренняя сила, действующая на частицу a со стороны других частиц системы и вычисленная по формуле (1.6); \vec{F}^{ext} – внешняя сила, действующая на частицу a со стороны тел, не включенных в систему. Поскольку движение этих тел задано, внешняя сила зависит эффективно лишь от положения и скорости рассматриваемой частицы, а также, может быть, от времени, чем феноменологически учитывается сам факт движения внешних тел. Таким образом,

$$\vec{F}_a^{\text{ext}} = \vec{F}_a^{\text{ext}}(\vec{r}_a, \dot{\vec{r}}_a, t). \quad (1.8)$$

Основная задача классической механики ставится следующим образом:

|| известны силы, действующие на каждую частицу системы, и
|| требуется найти ее движение.

Основой ее решения служит Второй закон Ньютона:

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \sum_{b \neq a} \vec{F}_{ab}(\vec{r}_a - \vec{r}_b, \dot{\vec{r}}_a - \dot{\vec{r}}_b) + \vec{F}_a^{\text{ext}}(\vec{r}_a, \dot{\vec{r}}_a, t), \quad (1.9)$$

где при записи внутренних сил мы учли ограничения, накладываемые на них полным принципом относительности (см. главу II). Кроме того, считается справедливым Третий закон Ньютона в обычной формулировке:

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}. \quad (1.10)$$

Второй закон Ньютона представляет собой систему $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени относительно $3N$ неизвестных функций $\vec{r}_a = \vec{r}_a(t)$. Чтобы однозначно определить закон движения, к системе уравнений (1.10) нужно присовокупить $6N$ начальных условий

$$\vec{r}_a|_{t=t_0} = \vec{r}_{a0}, \quad \dot{\vec{r}}_a|_{t=t_0} = \vec{v}_{a0}. \quad (1.11)$$

Решая систему дифференциальных уравнений (1.9) с учетом начальных условий (1.11), мы и получим искомый закон движения системы:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(\vec{r}_{10}, \dots, \vec{r}_{N0}; \vec{v}_{10}, \dots, \vec{v}_{N0}; t). \quad (1.12)$$

Однако это легче сказать, чем сделать, поскольку дифференциальные уравнения оказываются настолько сложными (даже для одной частицы), что допускают интегрирование лишь в исключительных случаях. При этом, чтобы решить систему уравнений, требуется выполнить, грубо говоря, $6N$ интегрирований. Как и всегда, задача упрощается, если известны *интегралы движения*

$$\varphi_a(\{\vec{r}_a\}, \{\vec{v}_a\}, t) = \text{const}. \quad (1.13)$$

Если найдено $6N$ интегралов, то задача полностью решена. Однако столь идеальный случай практически никогда не реализуется. Даже в благоприятной ситуации удастся установить лишь L интегралов движения, где $L < 6N$. Зная их, мы не получим полного решения задачи, но все же упростим его, сведя число необходимых интегрирований с $6N$ до $6N - L$ (см. обсуждение этой проблемы в гл. III, §3).

Как уже упоминалось в связи с динамикой одной частицы, среди всех интегралов движения выделяются 7 специальных интегралов, обладающих следующими важнейшими свойствами:

а) они не содержат времени, т.е. имеют вид

$$\varphi_\alpha(\{\vec{r}_a\}, \{\vec{v}_a\}) = Const; \quad (1.14)$$

б) их можно получить, не решая уравнений движения, а исходя из общих теорем динамики;

в) их можно получить, не прибегая даже к общим теоремам динамики, а исходя прямо из фундаментальных свойств симметрии пространства и времени;

г) они обладают свойством аддитивности, по крайней мере, свойством асимптотической аддитивности.

Последнее означает, что если система частиц разбита на две не взаимодействующие друг с другом подсистемы, то значение интеграла движения для всей системы равно сумме значений этого интеграла для отдельных подсистем.

Подобные интегралы движения мы уже назвали в свое время *законами сохранения*. При этом речь идет, конечно, о законах сохранения импульса (3 компоненты), момента импульса (3 компоненты) и механической энергии (1 величина) – всего о семи законах сохранения. Для всех из них, кроме энергии, свойство аддитивности выполняется безоговорочно, и только применительно к энергии следует говорить не просто об аддитивности, а об «асимптотической» аддитивности.

Чтобы больше к этому не возвращаться, отметим следующее обстоятельство. Оказывается, что в самой общей ситуации для замкнутой системы из N частиц существует 7 и только 7 (не больше) законов сохранения. Этот результат является чрезвычайно важным с практической точки зрения.

Замкнутая система двух гравитирующих частиц обладает шестью степенями свободы ($N=2$, $3N=6$), а интегралов имеется 7, хотя и не все они независимы. Это приводит к тому, что задача двух тел в классической механике может быть до конца решена, и мы это решение рассмотрим в последней главе.

Если же взять замкнутую систему из трех гравитирующих частиц, то она будет иметь 9 степеней свободы, тогда как число законов сохранения по-прежнему равно 7. Этот дефицит приводит к тому, что в общей ситуации задача трех тел вообще не разрешима в квадратурах. Это не означает, конечно, что ее нельзя решить в отдельных частных случаях (и такие решения известны) или что ее нельзя решить приближенно (в астрономии разработаны прекрасные приближенные методы анализа проблемы N тел).

Ближайшие параграфы посвящены анализу законов сохранения для систем частиц.

§ 2. Импульс системы свободных частиц

Определение. Векторная величина

$$\vec{p} = \sum_a \vec{p}_a \equiv \sum_a m_a \vec{v}_a \quad (2.1)$$

называется *импульсом* системы частиц.

Теорема 1. Скорость изменения импульса системы свободных частиц равна сумме действующих на нее внешних сил:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_a \vec{F}_a^{ext} \equiv \vec{F}^{ext}. \quad (2.2)$$

Доказательство

Перепишем Второй закон Ньютона (1.9) в виде

$$\frac{d\vec{p}_a}{dt} = \sum_{b \neq a} \vec{F}_{ba} + \vec{F}_a^{ext} \quad (2.3)$$

и складывая эти уравнения, получим

$$\sum_a \frac{d\vec{p}_a}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \sum_a \vec{p}_a \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{a,b \neq a} \vec{F}_{ba} + \sum_a \vec{F}_a^{ext}. \quad (2.4)$$

Поскольку внутренние силы удовлетворяют Третьему закону (1.10), они попарно уничтожаются, и мы приходим к (2.2).

Закон сохранения импульса. Импульс замкнутой системы свободных частиц сохраняется:

$$\vec{p} = Const. \quad (2.5)$$

Это утверждение мгновенно следует из теоремы 1, поскольку в замкнутой системе $\vec{F}^{ext} = 0$. В дальнейшем будет показано, что закон сохранения импульса есть следствие однородности пространства.

Полученные результаты часто формулируют несколько иначе.

Определение. Величина

$$M = \sum_a m_a \quad (2.6)$$

называется *массой системы частиц*, а точка с радиусом-вектором

$$\vec{R} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a} \quad (2.7)$$

– *центром масс* этой системы.

Теорема о движении центра масс.

Центр масс системы свободных частиц движется так, будто в нем сосредоточена вся масса системы и к нему приложены все внешние силы:

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ext}. \quad (2.8)$$

До к а з а т е л ь с т в о

Согласно теореме 1, нам достаточно доказать, что

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\ddot{\vec{R}}. \quad (2.9)$$

Имеем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_a m_a \vec{v}_a = \frac{d^2}{dt^2} \sum_a m_a \vec{r}_a \equiv \sum_a m_a \frac{d^2}{dt^2} \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a} = M\ddot{\vec{R}},$$

что и требуется доказать.

Эквивалентная формулировка закона сохранения импульса

Скорость \vec{U} центра масс замкнутой системы постоянна:

$$\vec{U} = const \Leftrightarrow \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{U}(t - t_0). \quad (2.10)$$

Этот результат оказывается весьма важным, поскольку, как говорилось в гл. II, он оправдывает введение самого *модельного понятия частицы* в классической механике. Ведь всякая «частица» сама из чего-то состоит, представляя собой систему более мелких частиц. Так вот, согласно доказанным утверждениям, этот составной ее характер оказывается совершенно несущественным. Всякую систему частиц, «рассматриваемую издали», можно считать единой частицей. С этой точки зрения понятие замкнутой системы есть обобщение понятия изолированной частицы.

Исследуем теперь трансляционные свойства импульса системы частиц относительно преобразований Галилея.

Теорема. Импульс \vec{p} системы частиц в ИСО S связан с импульсом \vec{p}' этой системы в ИСО S' соотношением

$$\vec{p} = \vec{p}' + M\vec{V}, \quad (2.11)$$

где \vec{V} – скорость S' относительно S .

Доказательство

Имеем

$$\vec{p} \equiv \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a m_a (\vec{v}'_a + \vec{V}) = \sum_a m_a \vec{v}'_a + \vec{V} \sum_a m_a \equiv \vec{p}' + M\vec{V},$$

где мы воспользовались классическим законом сложения скоростей.
Утверждение доказано.

Согласно принципу относительности Галилея, все ИСО равноправны. Но при исследовании динамики замкнутой системы частиц все-таки имеется наиболее удобная ИСО – та, которая связана с ее центром масс. То, что эта система отсчета инерциальна, следует из (2.10). Удобство же ее обусловлено тем, что переход к этой ИСО исключает из рассмотрения в общем-то неинтересное равномерное и поступательное движение замкнутой системы частиц как целого. Подобная система отсчета заслуживает специального названия.

Определение. Поступательно движущаяся система отсчета, связанная с центром масс замкнутой системы частиц, называется *системой центра масс* (СЦМ), или системой центра инерции (СЦИ).

Теорема. Импульс системы частиц в ее СЦМ равен нулю:

$$\vec{p}_{СЦМ} = 0. \quad (2.12)$$

Доказательство

Имеем:

$$\vec{p}_{СЦМ} \equiv \vec{p}' = \sum_a m_a \vec{v}'_a = \frac{d}{dt} \sum_a m_a \vec{r}'_a \equiv \sum_a m_a \frac{d}{dt} \frac{\sum_a m_a \vec{r}'_a}{\sum_a m_a} = M\vec{U}',$$

где \vec{U}' – скорость центра масс в СЦМ. Но эта скорость в своей собственной системе отсчета равна, очевидно, нулю, что и доказывает утверждение.

Важность этой теоремы в том, что она дает независимое и эквивалентное определение СЦИ.

Эквивалентное определение. Система отсчета, в которой

$$\vec{p} = 0, \quad (2.13)$$

называется СЦМ.

Именно этим определением мы воспользуемся в СТО, где исходное определение СЦМ непригодно, ибо в релятивистской физике само понятие центра масс проблематично.

Следствие. Импульс системы частиц равен импульсу ее движения как целого:

$$\vec{p} = M\vec{U}. \quad (2.14)$$

Этот результат вытекает непосредственно из определения центра масс. Но для дальнейшего важнее то, что он следует из теоремы (2.11), если считать, что ИСО S' есть СЦМ. Полагая в этой формуле $\vec{V} = \vec{U}$ и учитывая, что, согласно (2.12), $\vec{p}' = 0$, мы и получим (2.14).

§3. Момент импульса системы свободных частиц

Определение. (Псевдо)векторная величина

$$\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = \sum_a m_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a] \quad (3.1)$$

называется *моментом импульса* системы частиц.

Теорема 2. Скорость изменения момента импульса системы свободных частиц равна сумме моментов действующих на нее внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_a \vec{M}_a^{ext} \equiv \vec{M}^{ext}. \quad (3.2)$$

Доказательство

Умножая каждое из уравнений Второго закона Ньютона

$$\frac{d\vec{p}_a}{dt} = \sum_{b \neq a} \vec{F}_{ab} + \vec{F}_a^{ext} \quad (3.3)$$

слева векторно на \vec{r}_a и складывая результаты, получим

$$\sum_a \left[\vec{r}_a, \frac{d\vec{p}_a}{dt} \right] = \sum_{a,b \neq a} [\vec{r}_a, \vec{F}_{ab}] + \sum_a [\vec{r}_a, \vec{F}_a^{ext}]. \quad (3.4)$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \sum_a \left[\vec{r}_a, \frac{d\vec{p}_a}{dt} \right] &= \frac{d}{dt} \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a] - \sum_a \frac{d\vec{r}_a}{dt}, \vec{p}_a = \\ &= \frac{d\vec{L}}{dt} - \sum_a [\vec{v}_a, m_a \vec{v}_a] = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{aligned}$$

так, что мы получаем левую часть (3.2). Вторая сумма в (3.4) совпадает с правой частью (3.2). Таким образом, осталось доказать, что первая сумма в правой части (3.4) равна нулю. Разбив все слагаемые в этой двойной сумме на пары со взаимно одинаковыми индексами и пользуясь Третьим законом Ньютона (1.10), получим для каждой пары:

$$[\vec{r}_c, \vec{F}_{cd}] + [\vec{r}_d, \vec{F}_{dc}] = [\vec{r}_c, \vec{F}_{cd}] - [\vec{r}_d, \vec{F}_{cd}] = [\vec{r}_c - \vec{r}_d, \vec{F}_{cd}] = [\vec{r}_{cd}, \vec{F}_{cd}] = 0,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Закон сохранения момента импульса

Если суммарный момент внешних сил равен нулю, то момент импульса системы свободных частиц сохраняется:

$$\vec{M}^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const. \quad (3.5)$$

Утверждение сразу следует из (3.2). В частности, оно справедливо для замкнутых систем частиц. Но не только! Система частиц может быть незамкнутой, но момент внешних сил, тем не менее, может оказаться равным нулю. Важнейший пример такого рода дает нам движение системы частиц во внешнем центральном поле. Конкретный пример – движение электронов в поле массивного атомного ядра, которое можно считать неподвижным, а, стало быть, создающим внешнее поле. Полный момент импульса электронной оболочки атома сохраняется.

В дальнейшем будет показано, что закон сохранения момента импульса есть следствие изотропности пространства.

Теперь несколько слов о трансформационных свойствах момента импульса.

Теорема. Момент импульса \vec{L} системы частиц в ИСО S связан с моментом импульса \vec{L}' этой системы в ИСО S' соотношением

$$\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{R}, M\vec{V}] + [\vec{V}, \vec{p}'] t. \quad (3.6)$$

Доказательство

Учитывая классический закон сложения скоростей $\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V}$, а затем преобразование Галилея $\vec{r}_a = \vec{r}'_a + \vec{V}t$, получаем:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_a m_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a] = \sum_a m_a [\vec{r}_a, \vec{v}'_a + \vec{V}] = \sum_a m_a [\vec{r}_a, \vec{v}'_a] + \sum_a m_a [\vec{r}_a, \vec{V}] = \\ &= \sum_a m_a [\vec{r}'_a + \vec{V}t, \vec{v}'_a] + \left[\sum_a m_a \vec{r}_a, \vec{V} \right] = \sum_a m_a [\vec{r}'_a \vec{v}'_a] + \left[\vec{V}, \sum_a m_a \vec{v}'_a \right] t + \\ &+ \left[\frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}, \vec{V} \sum_a m_a \right] = \vec{L}' + [\vec{V}, \vec{p}'] \cdot t + [\vec{R}, M\vec{V}], \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Следствие. Момент импульса системы частиц можно представить в форме

$$\vec{L} = \vec{L}_{CLIM} + [\vec{R}, \vec{p}], \quad (3.7)$$

где \vec{p} – ее полный импульс.

Утверждение сразу следует из (3.6), если:

- а) положить там $\vec{V} = \vec{U}$;
- б) учесть, что, согласно (2.14), $M\vec{U} = \vec{p}$;
- в) учесть, что, согласно (2.12), $\vec{p}' = 0$.

Соотношение (3.7) допускает следующую наглядную интерпретацию:

Момент импульса \vec{L} системы частиц складывается из ее «собственного момента» $\vec{L}_{СЦМ}$ относительно ИСО, где эта система покоится, и из момента $[\vec{R}, \vec{p}]$, связанного с ее движением как целого.

Заметим, что аналогичное утверждение справедливо и для импульса. Это есть просто соотношение (2.14), поскольку «собственный импульс», т.е. импульс в СЦМ, равен нулю кинетической энергии системы частиц. Как будет показано в следующем параграфе, подобный же результат получается и для кинетической энергии системы частиц.

§4. Энергия системы свободных частиц

Определение. Скалярная величина

$$T = \sum_a T_a = \sum_a \frac{m_a \vec{v}_a^2}{2} \quad (4.1)$$

называется *кинетической энергией* системы частиц.

Теорема 3. Изменение кинетической энергии системы свободных частиц равно элементарной работе всех действующих в этой системе сил

$$dT = \delta A. \quad (4.2)$$

Доказательство

Умножая каждое из уравнений Второго закона Ньютона

$$m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \vec{F}_a$$

скалярно на $d\vec{r}_a$, преобразуя левые части так, как это делалось для одной частицы и складывая результаты, мы и получим (4.2), причем элементарная работа δA по определению равна

$$\delta A = \sum_a (\vec{F}_a, d\vec{r}_a). \quad (4.3)$$

Теорема доказана.

Заметим, что, в отличие от законов изменения импульса и момента импульса, в которых внутренние силы не фигурировали, теперь они не уничтожаются, и (4.3) более подробно записывается как

$$\delta A = \delta A^{\text{int}} + \delta A^{\text{ext}} = \sum_{a,b \neq a} (\vec{F}_{ab}, d\vec{r}_a) + \sum_a (F_a^{\text{ext}}, d\vec{r}_a). \quad (4.4)$$

Преобразуем выражение для работы внутренних сил. Для этого учтем, что они считаются подчиняющимися Третьему закону Ньютона, и потому являются центральными:

$$\vec{F}_{ab}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = \vec{F}_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}. \quad (4.5)$$

Но всякие центральные силы потенциальны, т.е.

$$\exists U_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|): \vec{F}_{ab} = -\vec{\nabla}_a U_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) = -\vec{\nabla}_{ab} U_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|). \quad (4.6)$$

Теперь, как и при доказательстве теоремы 2 о моменте импульса, разобьем все слагаемые в двойной сумме в (4.4) на пары со взаимно одинаковыми индексами. Для каждой пары имеем:

$$(\vec{F}_{cd}, d\vec{r}_c) + (\vec{F}_{dc}, d\vec{r}_d) = (\vec{F}_{cd}, d\vec{r}_c - d\vec{r}_d) = (\vec{F}_{cd}, d\vec{r}_{cd}) = -(\vec{\nabla}_{cd} U_{cd}, d\vec{r}_{cd}).$$

Суммируя все такие пары, для работы внутренних сил получим

$$\delta A^{\text{int}} = \sum_{a,b \neq a} (\vec{F}_{ab}, d\vec{r}_a) = -\frac{1}{2} \sum_{c \neq d} (\vec{\nabla}_{cd} U_{cd}, d\vec{r}_{cd}) = -d \left\{ \frac{1}{2} \sum_{a,b \neq a} U_{ab} \right\},$$

или, окончательно,

$$\delta A^{\text{int}} = -dU^{\text{int}} \equiv -d \left\{ \frac{1}{2} \sum_{a,b \neq a} U_{ab} \right\}. \quad (4.7)$$

Таким образом, утверждение теоремы 3, т.е. формула (4.2), *всегда* может быть представлена как

$$dT + dU^{\text{int}} = \delta A^{\text{ext}}. \quad (4.8)$$

Предположим теперь, что все внешние силы потенциальны и стационарны, т.е. консервативны:

$$\exists U_a(\vec{r}_a): \vec{F}_a^{\text{ext}} = -\vec{\nabla}_a U_a(\vec{r}_a). \quad (4.9)$$

Тогда для полной работы внешних сил, фигурирующей в (4.4), получим

$$\delta A^{\text{ext}} = \sum_a (\vec{F}_a^{\text{ext}}, d\vec{r}_a) = -\sum_a (\vec{\nabla}_a U_a, d\vec{r}_a) = -\sum_a dU_a = -d \sum_a U_a,$$

или

$$\delta A^{\text{ext}} = -dU^{\text{ext}} \equiv -d \left\{ \sum_a U_a \right\}. \quad (4.10)$$

В итоге (4.8) переписывается как

$$dT + dU^{\text{int}} + dU^{\text{ext}} = 0. \quad (4.8a)$$

Определение. Величина

$$\begin{aligned} E = T + U &\equiv T + U^{\text{int}} + U^{\text{ext}} \equiv \\ &\equiv \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_{b < a} U_{ab} (|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) + \sum_a U_a(\vec{r}_a) \end{aligned} \quad (4.11)$$

называется *полной механической энергией* системы свободных частиц. Слагаемое T есть *полная кинетическая энергия*, U – *полная потенциальная энергия системы*, U^{int} – потенциальная энергия взаимодействия частиц системы, U^{ext} – потенциальная энергия системы *во внешнем поле*.

Пример. Полная механическая энергия атома с порядковым номером z в таблице Менделеева равна:

$$E = \sum_{a=1}^z \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_{b < a} \frac{e^2}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} - \sum_{a=1}^z \frac{ze^2}{r_a}. \quad (4.12)$$

Закон сохранения энергии. Если внешние силы, действующие на систему свободных частиц, потенциальны (или гироскопические), а внутренние силы подчиняются Третьему закону Ньютона, то полная механическая энергия системы сохраняется.

Закон сохранения механической энергии тесно связан с однородностью времени, о чем мы уже неоднократно говорили при обсуждении динамики одной частицы. Применительно к системам частиц речь об этой проблеме пойдет чуть ниже.

§5. Кинетическая энергия

В данном параграфе мы несколько подробнее обсудим понятие кинетической энергии системы частиц. А именно, выявим ее трансформационные свойства относительно преобразований Галилея и найдем выражение для кинетической энергии твердого тела, которое уже нельзя рассматривать как систему свободных частиц.

Теорема. Кинетическая энергия T системы частиц в ИСО S связана с кинетической энергией этой системы в ИСО S' соотношением

$$T = T' + (\vec{p}', \vec{V}) + \frac{M\vec{V}^2}{2}. \quad (5.1)$$

Доказательство

Имеем

$$\begin{aligned} T &= \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} = \sum_a \frac{m_a (\vec{v}'_a + \vec{V})^2}{2} = \sum_a \frac{m_a \vec{v}'_a{}^2}{2} + \sum_a m_a (\vec{v}'_a, \vec{V}) + \sum_a \frac{m_a \vec{V}^2}{2} = \\ &= T' + \left(\sum_a m_a \vec{v}'_a, \vec{V} \right) + \frac{\vec{V}^2}{2} \sum_a m_a = T' + (\vec{p}', \vec{V}) + \frac{M\vec{V}^2}{2}, \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Теорема Кенига. Кинетическая энергия T системы частиц равна сумме кинетической энергии $T_{\text{ЦМ}}$ их относительного движения и кинетической энергии $MU^2/2$ движения системы как целого:

$$T = T_{\text{ЦМ}} + \frac{M\vec{U}^2}{2}. \quad (5.2)$$

Утверждение мгновенно следует из формулы (5.1), если положить в ней $\vec{V} = \vec{U}$ и учесть, что в СЦМ $\vec{p}' = 0$.

Если система частиц замкнута, то ее потенциальная энергия инвариантна относительно преобразований Галилея, поскольку зависит только от разностей $\vec{r}_a - \vec{r}_b$. В этом случае формулу (5.2) можно записать и для полной механической энергии:

$$E = E_{\text{вн}} + \frac{M\vec{U}^2}{2}. \quad (5.3)$$

Здесь введено обозначение $E_{\text{ЦМ}} = E_{\text{вн}}$, поскольку в данном контексте эта величина называется *внутренней энергией* системы частиц. Она включает кинетическую энергию их относительного движения и потенциальную энергию взаимодействия.

Займемся теперь кинетической энергией *твердого тела*, рассматривая ее как дискретную совокупность большого количества частиц, жестко связанных друг с другом. Тогда можно записать

$$T = \sum \frac{m\vec{v}^2}{2}, \quad (5.4)$$

где ради упрощения формул индекс, нумерующий точки, будет опускаться.

Переходя в СЦМ, мы получим, благодаря теореме Кенига,

$$T = \sum \frac{m\vec{v}'^2}{2} + \frac{M\vec{U}^2}{2}. \quad (5.5)$$

Но в этой системе отсчета твердое тело ведет себя как тело с одной неподвижной точкой, а потому член T' есть кинетическая энергия его вращательного движения. Именно она нас и будет интересовать:

$$T_{ep} = \sum \frac{m\vec{v}'^2}{2}, \quad (5.6)$$

где мы опустили штрих у скоростей.

Вспомним теперь, что распределение скоростей в твердом теле с одной неподвижной точкой задается *формулой Эйлера* (см. гл. I)

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}], \quad (5.7)$$

где $\vec{\omega}$ – *мгновенная угловая скорость*. Подставляя это выражение в (5.6), получим

$$T_{ep} = \sum \frac{m}{2} [\vec{\omega}\vec{r}]^2. \quad (5.8)$$

Представляя квадрат векторного произведения в форме

$$[\vec{\omega}\vec{r}]^2 = \omega^2 r^2 \sin^2 \theta = \omega^2 r^2 (1 - \cos^2 \theta) = \omega^2 r^2 - \omega^2 r^2 \cos^2 \theta = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega}, \vec{r}),$$

получим

$$T_{ep} = \sum \frac{m}{2} \{ \omega^2 r^2 - (\vec{\omega}, \vec{r}) \}. \quad (5.9)$$

Представим полученный результат в тензорной форме записи:

$$\begin{aligned} T_{ep} &= \sum \frac{m}{2} \{ \omega^2 r^2 - (\vec{\omega}, \vec{r})^2 \} = \sum \frac{m}{2} \{ \omega_i \omega_i r^2 - (\omega_i x_i)(\omega_j x_j) \} = \\ &= \sum \frac{m}{2} \{ \omega_i \omega_j \delta_{ij} r^2 - \omega_i \omega_j x_i x_j \} = \\ &= \frac{1}{2} \omega_i \omega_j \sum m (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j). \end{aligned}$$

Определение. Говорят, что совокупность величин

$$I_{ij} = \sum m (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \quad (5.10)$$

образует *тензор инерции* твердого тела.

В итоге доказано следующее утверждение.

Теорема. Кинетическая энергия вращения твердого тела равна:

$$T_{ep} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j. \quad (5.11)$$

Аналогичный результат имеет место и для «собственного» момента импульса \vec{L}_{ep} твердого тела, т.е. для момента импульса тела с одной неподвижной точкой.

Теорема. Компоненты момента импульса, связанного с вращением твердого тела, равны:

$$L_{ep\ i} = I_{ij} \omega_j. \quad (5.12)$$

Доказательство

Для вращательной части момента импульса можно записать

$$\vec{L}_{ep} = \sum m [\vec{r}\vec{v}] = \sum m [\vec{r} [\vec{\omega}\vec{r}]] = \sum m \{r^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{\omega}\vec{r})\}. \quad (5.13)$$

Переходим к тензорным обозначениям:

$$L_{ep\ i} = \sum m \{r^2 \omega_i - x_i (\omega_j x_j)\} = \sum m \{r^2 \omega_j \delta_{ij} - \omega_j x_i x_j\} = \omega_j \sum m (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j).$$

Вспомянув определение (5.10), получим выражение (5.12), и теорема доказана.

Итак, инерционные свойства твердого тела с одной закрепленной точкой характеризуются тензором инерции I_{ij} , матрица которого имеет следующий явный вид:

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Компоненты $I_{11} \equiv I_{xx}$, $I_{22} \equiv I_{yy}$, $I_{33} = I_{zz}$ называют обычно *моментами инерции* относительно осей x, y, z соответственно. Основания для этого следующие. Допустим, что твердое тело может вращаться лишь вокруг одной закрепленной оси – скажем, оси z . Тогда вектор угловой скорости будет иметь компоненты

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega),$$

и в выражении (5.11) для кинетической энергии останется лишь одно слагаемое с $I_{zz} \equiv I$:

$$T_{ep} = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (5.15)$$

Учитывая к тому же, что в данном случае векторы $\vec{\omega}$ и \vec{L} коллинеарны, для момента импульса \vec{L}_{sp} в данном случае получим

$$\vec{L}_{sp} = I\vec{\omega}. \quad (5.16)$$

При этом величина I вычисляется, согласно (5.10), по формуле

$$I = \sum m\rho^2, \quad (5.17)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$ – квадрат расстояния частиц от оси вращения. В (5.15) – (5.17) мы узнаем формулы, хорошо известные из курса общей физики, где I называется просто *моментом инерции*.

Как явствует из определения (5.10), тензор инерции симметричен:

$$I_{ij} = I_{ji}, \quad (5.18)$$

а потому имеет не 9, а всего 6 независимых компонент. Мало того, всякий симметричный тензор второго ранга может быть приведен к *диагональному виду*. Иными словами, путем перехода от x, y, z к подходящим координатным осям η_1, η_2, η_3 тензор инерции можно представить в форме

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Такие оси называются *главными осями*, а величины I_1, I_2, I_3 – *главными моментами инерции*.

Итак, инерционные свойства частицы характеризуются одной величиной – массой m . То же относится к поступательно движущемуся твердому телу, кинетическая энергия которого задается вторым слагаемым в формуле (5.5), содержащим лишь массу M этого тела. Инерционные свойства тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, также полностью характеризуются одним числом, но уже не массой M , а моментом инерции I относительно данной оси. Инерционные свойства твердого тела с одной закрепленной точкой характеризуются шестью числами – независимыми компонентами тензора инерции I_{ij} . В главных осях, связанных с телом, эти 6 чисел сводятся к трем – к главным моментам инерции I_1, I_2, I_3 . При описании же инерционных свойств произвольно движущегося твердого тела приходится пользоваться семью числами, присовокупляя к компонентам тензора инерции массу M , которая входит в выражение для кинетической энергии движения тела как целого.

В заключение данного параграфа отметим, что при практическом вычислении компонент тензора инерции удобно рассматривать твердое тело не как дискретную совокупность частиц, а как *сплошную среду*. Это равнозначно замене суммирования по частицам интегрированием по объему тела. В итоге определение (5.10) тензора инерции трансформируется следующим образом:

$$I_{ij} = \iiint_V \mu(x_1, x_2, x_3) \{ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \delta_{ij} - x_i x_j \} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (5.20)$$

где μ – плотность, обозначаемая обычно через ρ ; но эта буква у нас уже встречалась для обозначения одной из цилиндрических координат. В частности, момент инерции I относительно фиксированной оси z вводимый ранее определением (5.17) теперь записывается как

$$I = \iiint_V \mu(x, y, z)(x^2 + y^2) dx dy dz = \mu \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad (5.21)$$

где вторая форма записи отвечает однородному телу, для которого плотность μ постоянна.

§6. Законы сохранения и свойства симметрии

Анализ, который мы хотим провести для системы свободных частиц, почти буквально совпадает с анализом, проведенным в §5 предыдущей главы для одной свободной частицы. Отличие лишь в том, что теперь мы вправе рассматривать только *замкнутые системы* и говорить о свойствах симметрии самих пространства и времени, без всяких оговорок. При этом справедливость Третьего закона заранее предполагаться *не будет*. Как мы видели, подобный подход при $N=1$ довольно бессодержателен, ибо в этом случае понятие замкнутой системы вырождается в понятие изолированной частицы, для которой и так все известно.

1. Совсем предварительный анализ

Исходный пункт – Второй закон Ньютона

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a^{\text{int}} \equiv \vec{F}_a \quad (6.1)$$

и теоремы об изменении импульса, момента импульса и энергии системы за счет действия внутренних сил:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_a \vec{F}_a, \quad (6.2)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_a \vec{M}_a, \quad (6.3)$$

$$dE = \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (6.4)$$

При записи последнего уравнения мы учли, что внутренние силы являются чисто механическими, т.е. центральными, силами, которые всегда потенциальны.

а) Сохранение импульса

Сместим всю систему как целое на вектор $\overline{\delta\epsilon}$. При этом смещении радиус-вектор каждой частицы приобретает приращение

$$\delta\vec{r}_a = \overline{\delta\epsilon}. \quad (6.5)$$

В силу однородности пространства на такое смещение не требуется затраты работы:

$$\delta A = \sum_a \delta A_a = \sum_a (\vec{F}_a, \delta\vec{r}_a) = \sum_a (\vec{F}_a, \overline{\delta\epsilon}) = \left(\sum_a \vec{F}_a, \overline{\delta\epsilon} \right) = 0.$$

Откуда, в силу произвольности $\overline{\delta\epsilon}$,

$$\sum_a \vec{F}_a = 0. \quad (6.6)$$

Учитывая (6.2), мы сразу приходим к сохранению импульса.

б) Сохранение момента импульса

Повернем систему как целое на произвольный бесконечно малый угол $\overline{\delta\varphi}$:

$$\delta\vec{r}_a = \left[\overline{\delta\varphi}, \vec{r}_a \right]. \quad (6.7)$$

В силу изотропности пространства на такой поворот не требуется затраты работы:

$$\delta A = \sum_a \delta A_a = \sum_a (\vec{F}_a, \delta\vec{r}_a) = \sum_a (\vec{F}_a, [\overline{\delta\varphi}, \vec{r}_a]) = \sum_a ([\vec{r}_a, \vec{F}_a], \overline{\delta\varphi}) = \left(\sum_a \vec{M}_a, \overline{\delta\varphi} \right) = 0.$$

Откуда, благодаря произвольности вектора $\overline{\delta\varphi}$,

$$\sum_a \vec{M}_a = 0. \quad (6.8)$$

Учитывая (6.3), приходим к сохранению момента импульса.

в) Сохранение энергии

В силу однородности времени потенциальная энергия не зависит явно от t , т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0. \quad (6.9)$$

Учитывая (6.4), приходим к сохранению энергии. Закон сохранения энергии выполняется, очевидно, и для незамкнутых систем, находящихся в консервативных внешних полях.

2. Чуть более полный анализ

Сразу учитываем, что внутренние силы, будучи центральными, являются потенциальными, так что Второй закон Ньютона записываем как

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = -\vec{\nabla}_a U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N), \quad (6.10)$$

где индекс a у «набла» означает дифференцирование по координатам частицы с номером a . Понимая наличие симметрии относительно преобразования

$$\vec{r}'_a = \vec{r}_a + \delta\vec{r}_a, \quad t' = t + \delta t \quad (6.11)$$

как неизменность потенциальной энергии U относительно этого преобразования (ср. с формулой (5.25)) из предыдущей главы и проводя выкладки, полностью аналогичные тем, которые нас привели к (5.26), запишем условие симметрии в следующей конструктивной форме:

$$-\sum_a (\vec{F}_a, \delta \vec{r}_a) + \frac{\partial U}{\partial t} \delta t = 0. \quad (6.12)$$

Дальнейшие рассуждения, приводящие к законам сохранения импульса, момента импульса и энергии, полностью идентичны тем, которые проделывались в §5 предыдущей главы, и мы их повторять не будем.

§7 Системы частиц со связями

На основе всего, что говорилось ранее, может сложиться впечатление, что все задачи классической механики сводятся к решению системы дифференциальных уравнений

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \sum_{b \neq a} \vec{F}_{ab} + F_a^{ext}, \quad [a = 1, \dots, N], \quad (7.1)$$

в которых силы считаются известными функциями положений и скоростей частиц, и к которым добавлены начальные условия

$$\vec{r}_a \Big|_{t=t_0} = \vec{r}_{a_0}, \quad \dot{\vec{r}}_a \Big|_{t=t_0} = \vec{v}_{a_0}. \quad (7.2)$$

Для тех задач, которые мы до сих пор рассматривали, это действительно так. Но что это за задачи? В них фигурируют системы *свободных частиц*, т.е. такие системы, в которых движение частиц ничем не ограничено и их положения и скорости в фиксированный момент времени можно задавать произвольным образом.

Но в макроскопическом мире далеко не все механические системы представляют собой совокупности свободных частиц. Зачастую их движение ограничено другими материальными телами.

Определение. Всякое дополнительное условие, ограничивающее движение частиц системы, называется *связью*.

Аналитически связи выражаются некоторыми соотношениями, накладываемыми на координаты и скорости частиц системы:

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N; t) \geq 0, \quad [i = 1, \dots, L < 3N]. \quad (7.3)$$

Реализуются же они в виде жестких поверхностей, нерастяжимых нитей, твердых стержней и т.п.

Примеры

1. Пусть частица подвешена к свободному концу стержня, другой конец которого может вращаться вокруг неподвижной точки. Тогда уравнение связи имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \quad (7.4a)$$

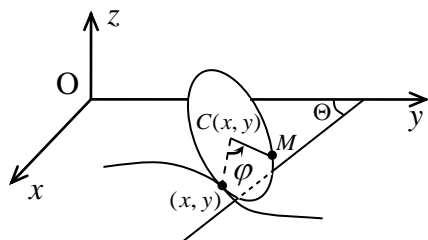
2. Пусть в предыдущем примере второй конец стержня движется по вертикальной прямой по закону $z = a \cos \omega t$. Тогда уравнение связи записывается как

$$x^2 + y^2 + (z - a \cos \omega t)^2 = l^2. \quad (7.4б)$$

3. Пусть частица подвешена к свободному концу нити, другой конец которой закреплен (или частица находится в сферической полости). Тогда уравнение связи выглядит следующим образом:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2. \quad (7.4в)$$

4. Возьмем в качестве тела диск, соединенный жестким горизонтальным стержнем с другим таким же диском, и пусть он катается без скольжения по шероховатой горизонтальной плоскости. Положение нашего диска однозначно задают координаты его



центра (или точки касания с плоскостью), угол φ поворота диска вокруг своей оси и угол θ между осью диска и осью x . Но эти величины не независимы, так как условие отсутствия скольжения дает

$$v = R \cdot \dot{\varphi},$$

где R – радиус диска, а направление скорости \vec{v} перпендикулярно оси диска. Учитывая очевидные равенства

$$\dot{x} = v \cdot \sin \theta, \quad \dot{y} = -v \cdot \cos \theta,$$

придем к следующим, уже дифференциальным, уравнениям связей:

$$dx - R \cdot \sin \theta \cdot d\varphi = 0; \quad dy + R \cdot \cos \theta \cdot d\varphi = 0. \quad (7.4г)$$

Примеры можно преумножить, но мы ограничимся приведенными, тем более, что они хорошо иллюстрируют возникающие здесь возможности.

Связи допускают классификацию по различным признакам, разобраться в которых позволяют нам только что рассмотренные примеры.

Определение. Если связь выражается соотношением, включающим только координаты частиц и время, то она называется *голономной*, в противном случае – *неголономной*.

Все связи, кроме (7.4г) – голономные.

Определение. Если связь не содержит явно времени, то она называется *стационарной*, в противном случае – *нестационарной*.

Все связи, кроме (7.4г/б) – стационарные. Они называются также реономными, а нестационарные связи – склорономными.

Определение. Если связь записывается в виде уравнения, то она называется *двусторонней*, а если в виде неравенства, то *односторонней*.

Все связи, кроме (7.4в) – двусторонние. Они называются также неосвобождающими, а односторонние связи – освобождающими.

Существует еще один важный классификационный признак, который разделяет все связи на *идеальные* и на *реальные*. Грубо говоря, идеальная связь – это гладкая связь, со стороны которой на частицы не действуют силы трения. Более строгое определение будет дано чуть ниже.

Для исследования систем с произвольными связями в классической механике до сих пор не создано каких-то единых методов. Но нас это не должно особенно заботить. Ведь мы изучаем механику не как прикладную дисциплину, а как раздел теоретической физики. В настоящих же физических системах (в молекулах, атомах и тем более в мире элементарных частиц) никаких связей вообще нет – они возникают как итог сугубо макроскопического феноменологического подхода к явлениям. Наша задача скромная – получить самое общее

представление о проблемах, возникающих в классической механике. Поэтому всюду ниже рассматриваются лишь

ГОЛОНОМНЫЕ ДВУСТОРОННИЕ ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ,

которые мы будем именовать просто СВЯЗЯМИ. Они выражаются уравнениями

$$f_i(\vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N; t) = 0, \quad (7.5)$$

и к их числу относятся примеры (7.4а) и (7.4б).

Как же сказывается наличие связей на уравнениях движения системы? Прежде всего, их существование приводит к тому, что на частицы системы действуют некие дополнительные силы, изменяющие их движение.

Определение. Силы \vec{R}_a , действующие на частицы системы со стороны связей, называются *силами реакции связи*.

Эти силы именуются также пассивными (в отличие от обычных – активных), но мы не будем пользоваться этой несколько архаической терминологией. Таким образом, при наличии связей Второй закон Ньютона несколько модифицируется, и уравнения движения (7.1) записываются как

$$m\ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a + \vec{R}_a, \quad [a = 1, \dots, N], \quad (7.6)$$

где \vec{F}_a – совокупность внешних и внутренних сил, действующих на частицу с номером a , а \vec{R}_a – действующая на нее сила реакции связей.

Происхождение сил реакции очевидно – в общем-то, это обычные упругие силы, и если бы нити, поверхности и т.п. рассматривались как обычные тела системы, они ничем не отличались бы от привычных нам сил. Но дело в том, что связь – это некий идеализированный образ воздействия одного тела на другое, получаемое в результате определенного предельного перехода. Силы реакции связей также зависят от состояния движения системы, но заранее не известно, как именно. Таким образом, силы реакции входят в уравнения движения в качестве неизвестных, и они подлежат определению в процессе решения задачи, наряду с отысканием закона движения $\vec{r}_a = \vec{r}_a(t)$.

В этой связи уместно вспомнить многочисленные школьные задачи, в которых требуется определить силы натяжения нитей, силы давления на ось блока и прочее.

В качестве итога мы приходим к выводу, что наличие связей вносят в решение механических задач *две основные трудности*.

1. Не все координаты r_a оказываются независимыми, а потому и не все дифференциальные уравнения движения независимы.

2. Силы, развиваемые связями, априори не заданы – они являются неизвестными величинами, подлежащими определению в процессе решения задачи.

Первоначально построение аналитической механики, т.е. лагранжева и гамильтонова формализмов, и было инициировано попытками преодоления указанных трудностей. Впоследствии соответствующие методы далеко переросли это свое первоначальное предназначение. Как мы уже видели, они оказываются очень полезными уже в механике систем свободных частиц. Но главное даже не в этом – методы аналитической механики можно распространять на немеханические системы, анализируя с их помощью, скажем,

электромагнитное поле. Кроме того, на них базируются статистическая механика и квантовая механика.

Вернемся, однако, к классической механике. Здесь две отмеченные трудности преодолеваются путем синтеза двух важных понятий:

- а) обобщенных координат,
- б) виртуальных перемещений.

К их краткому анализу мы сейчас и переходим.

§8. Обобщенные координаты, виртуальные перемещения

1. Обобщенные координаты

Трудность, связанная с зависимостью декартовых координат частиц, преодолевается путем введения обобщенных координат.

Определение. Если на систему из N частиц наложено L связей, то говорят, что система имеет $3N - L = l$ степеней свободы.

Это означает просто то, что среди $3N$ декартовых координат частиц системы имеется всего l независимых – L из них можно исключить с помощью уравнений связей. Конечно, оставшиеся l независимых декартовых координат можно использовать в качестве параметров, задающих состояние системы, но обычно это оказывается неудобным. Поступают по-другому.

Определение. Обобщенными координатами q_i ($i=1, \dots, l$) называются l независимых переменных, через которые декартовы координаты r_a выражаются так, что уравнения связей удовлетворяются тождественно .

Иными словами, задание обобщенных координат есть задание l независимых параметров q_i и задание $3N$ уравнений преобразования от переменных \vec{r}_a к переменным q_i :

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_1, \dots, q_l; t) . \quad (8.1)$$

При подстановке выражений (8.1) в левые части уравнений связей (7.5) последние обращаются в нуль.

Важно понимать, что в качестве обобщенных координат могут быть взяты любые величины, определяющие конфигурацию рассматриваемой системы в данный момент времени.

Примеры

1. Самый тривиальный пример дают нам сами декартовы координаты свободной частицы.

2. Чуть менее тривиальные примеры – цилиндрические, сферические и т.п. координаты для одной свободной частицы.

3. Опять тривиальный пример – декартовы координаты для системы свободных частиц.

4. Для системы из двух взаимодействующих частиц очень удобными оказываются координаты центра масс и относительные координаты:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 . \quad (8.2)$$

Их мы используем впоследствии для анализа проблемы двух тел.

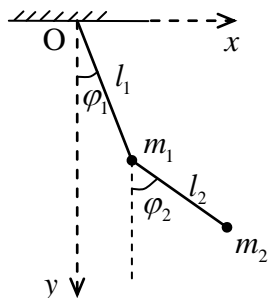
5. У системы со связью (7.4а) две степени свободы ($l = 2$), так как на частицу наложена одна связь. В качестве обобщенных координат удобно взять сферические углы θ и φ :

$$x = l \cdot \sin \theta \cos \varphi, \quad y = l \cdot \sin \theta \sin \varphi, \quad z = l \cos \theta . \quad (8.3)$$

6. У системы со связью (7.4б) тоже две (!) степени свободы, так как на частицу наложена одна связь. Здесь часто возникает путаница – считают, что маятник имеет 3 степени свободы и выбирают в качестве обобщенных координат сферические углы θ и φ , а также координату z точки подвеса. Но движение последней задано (!), и z не является неизвестной функцией времени, т.е. динамической переменной. Обобщенные координаты – θ и φ , и декартовы координаты выражаются через них следующим образом:

$$x = l \sin \theta \cos \varphi, \quad y = l \sin \theta \sin \varphi, \quad z = l \cos \theta + a \cos \omega t. \quad (8.4)$$

7. Следующий пример является в каком-то смысле классическим – его приводят во всех учебниках по механике. Это плоский двойной маятник, изображенный на рисунке.



Число степеней свободы здесь равно 2, а в качестве обобщенных координат естественнее всего выбрать углы φ_1 и φ_2 , связанные с декартовыми координатами частиц соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \varphi_1 \\ y_1 &= l_1 \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} x_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \\ y_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \end{aligned} \right\}. \quad (8.5)$$

8. Электрическая цепь без разветвлений (скажем, свободный колебательный контур) представляет собой немеханическую систему с одной степенью свободы. Обобщенной координатой может служить заряд q на пластинах конденсатора.

9. Еще один пример немеханической системы дает нам электромагнитное поле. Его состояние задается векторами \vec{E} и \vec{B} , являющимися функциями координат и времени. Роль «частиц» играют бесконечно малые пространственные объемы, в которых локализовано поле, а роль их «координат» – значения \vec{E} и \vec{B} в центрах этих объемов. В этом смысле поле представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Наряду с «координатами» $\vec{E}(\vec{r};t)$ и $\vec{B}(\vec{r};t)$ часто пользуются «обобщенными координатами», в качестве каковых выбирают фурье-компоненты поля, равные, скажем, для вектора \vec{E}

$$\vec{f}_E(\vec{k};t) = \int \vec{E}(\vec{r};t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3r, \quad (8.6)$$

или, обратно,

$$\vec{E}(\vec{r};t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \vec{f}_E(\vec{k};t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3r. \quad (8.7)$$

10. В самой механике иногда оказывается удобным использование в качестве обобщенных координат величин, имеющих размерность энергии или действия. Примером могут служить канонически сопряженные переменные действие – угол, часто применяемые в формализме Гамильтона – Якоби.

Итак, первая трудность, возникающая при наличии связей, преодолевается путем перехода от зависимых декартовых к независимым обобщенным координатам.

2. Виртуальные перемещения

Вторую трудность, связанную с появлением в уравнениях движения системы частиц со связями неизвестных сил реакций, позволяет преодолеть введение понятия виртуальных перемещений.

Определение. *Виртуальным перемещением* системы называется произвольное бесконечно малое изменение ее конфигурации, согласующееся со связями, наложенными на систему в данный момент времени t .

Иными словами, все связи в заданный момент времени «замораживаются», и смотрится, куда может переместиться та или иная частица системы при наличии таких «замороженных» связей. Иногда случается так, что действительное перемещение системы за время dt совпадает с одним из виртуальных, а иногда случается, что не совпадает. От чего же это зависит?

Теорема. Если связи стационарны, то действительное перемещение системы за время dt является одним из виртуальных перемещений, в противном случае – не является.

Доказательство

Получим уравнения, которым должны удовлетворять виртуальные перемещения $\delta\vec{r}_a$ и реальные перемещения $d\vec{r}_a$. Пусть в момент времени t конфигурация системы задается координатами $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$, которые подчинены уравнениям связей

$$f_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) = 0. \quad (8.8)$$

По определению виртуальных перемещений координаты $\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N$ должны подчиняться тем же уравнениям в тот же момент времени:

$$f_j(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N; t) = 0. \quad (8.9)$$

Производя здесь разложение Тейлора и отбрасывая нулевой член разложения, равный нулю в силу (8.9), получим уравнения для виртуальных перемещений:

$$\sum_a \left(\frac{\partial f_j}{\partial r_a}, \delta\vec{r}_a \right) = 0. \quad (8.10)$$

Рассмотрим теперь реальное движение системы. Если в момент времени t координаты частиц по-прежнему равны $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$, то в момент времени $t + dt$ они будут равны $\vec{r}_1 + d\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + d\vec{r}_N$. Но связи к этому моменту также изменятся, так что эти приращенные координаты будут удовлетворять уже не уравнениям (8.9), а уравнениям

$$f_j(\vec{r}_1 + d\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + d\vec{r}_N; t + dt) = 0. \quad (8.11)$$

Производя и здесь разложение Тейлора, получим уравнения для реальных перемещений:

$$\sum_a \left(\frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_a}, d\vec{r}_a \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0. \quad (8.12)$$

Сравнение (8.12) с (8.10) и доказывает теорему.

Примеры

5. Пусть одна частица движется по неподвижной поверхности, так что имеется одна связь с уравнением

$$f(\vec{r}) = 0. \quad (8.13)$$

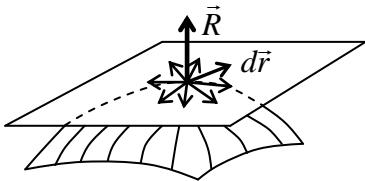
В итоге как виртуальные, так и реальные перемещения будут удовлетворять одному и тому же уравнению:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}, \delta \vec{r} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}, d\vec{r} \right) = 0. \quad (8.14)$$

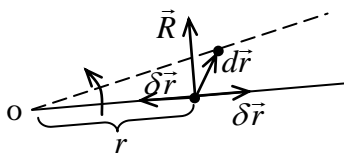
Обозначая компоненты вектора $\partial f / \partial \vec{r} \equiv \vec{\nabla} f$ через A , B и C , перепишем (8.14) в виде

$$A\delta x + B\delta y + C\delta z = 0 \quad \text{и} \quad A dx + B dy + C dz = 0. \quad (8.15)$$

Таким образом, как виртуальные перемещения, так и реальное перемещение, лежат в плоскости, касательной к поверхности в точке, в которой в момент времени t находится частица.



2. Рассмотрим бусинку, которая может перемещаться вдоль прямой проволоки, вращающейся вокруг неподвижной оси с некоторой угловой скоростью (постоянной или переменной, безразлично). Число степеней свободы – 1, обобщенная координата – r .



Различие между виртуальными перемещениями и реальным перемещением сразу очевидно из приведенного рисунка.

Концепция виртуальных перемещений позволяет ввести еще один важный классификационный признак связей, о котором упоминалось в §7.

Определение. Связи называются *идеальными*, если работа сил реакций на виртуальных перемещениях равна нулю:

$$\sum_a (\vec{R}_a, \delta \vec{r}_a) = 0. \quad (8.16)$$

В противном случае связи именуются *реальными*.

Мы договорились уже рассматривать только идеальные связи. Их смысл хорошо иллюстрируют только что приводившиеся примеры.

Примеры

1. В данном примере условие (8.16) записывается как

$$(\vec{R}, \delta\vec{r}) = 0 \quad (8.17)$$

и означает, что сила реакции перпендикулярна поверхности. Это, в свою очередь, есть выражение того факта, что поверхность *гладкая* – сила трения, определяемая как тангенциальная компонента силы реакции, действующей на частицу со стороны поверхности, равна нулю. Поскольку связь здесь стационарная, реальное перемещение является одним из виртуальных, а потому

$$(\vec{R}, d\vec{r}) = 0, \quad (8.18)$$

т.е. работа силы реакции равна нулю и при действительном движении частицы.

2. Идеальность связи в данном случае означает то же, что и в предыдущем примере. А именно, сила реакции направлена перпендикулярно проволоке, которая, тем самым, не создает силу трения. Но теперь уже связь нестационарна, реальное перемещение не входит в число виртуальных, и векторы \vec{R} и $d\vec{r}$ уже не ортогональны (см. рис.). Собственно, в рассматриваемом примере сила реакции – вообще единственная сила, действующая на частицу (считаем, что поля тяжести нет). Именно она совершает работу при действительном движении частицы:

$$\delta A = (\vec{R}, d\vec{r}) > 0. \quad (8.19)$$

В итоге кинетическая энергия частицы под действием силы реакции увеличивается, т.е. частица ускоряется.

Итак, идеальные связи являются просто обобщением понятия гладких поверхностей. Отсутствие реальных связей означает отсутствие трения в системе, хотя подобная интерпретация проходит не всегда. Примером тому может служить твердое тело. Связи между частицами, выражаемые равенствами

$$(\vec{r}_b - \vec{r}_a)^2 \equiv (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2 \equiv l_{ab}^2 = Const, \quad (8.20)$$

идеальны – в том смысле, что работа сил реакций на виртуальных перемещениях равна нулю. Но никаких поверхностей здесь нет, и говорить об отсутствии трения не приходится.

Введение концепции виртуальных перемещений и ограничение классом лишь идеальных связей и позволяет изгнать из рассмотрения неизвестные силы реакции. Делается это очень просто. Возьмем Второй закон Ньютона (7.6):

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a + \vec{R}_a \quad [a = 1, \dots, N], \quad (8.21)$$

умножим каждое из уравнений на виртуальное перемещение $\delta\vec{r}_a$:

$$m_a (\ddot{\vec{r}}_a, \delta\vec{r}_a) = (\vec{F}_a, \delta\vec{r}_a) + (\vec{R}_a, \delta\vec{r}_a) \quad (8.22)$$

(силы реакции еще не исчезли!) и сложим результаты с учетом (8.16):

$$\sum_a m_a (\ddot{\vec{r}}_a, \delta \vec{r}_a) = \sum_a (\vec{F}_a, \delta \vec{r}_a). \quad (8.23)$$

Вот таким именно способом и удастся избавиться от сил реакций.

Но уравнение (8.23) еще не является тем, к чему мы стремимся. Это всего лишь одно соотношение между ускорениями и силами, и оно не может выполнять роль уравнений движения, каковых должно быть l , где l – число степеней свободы. В (8.23) равны соответствующие суммы, но не равны их слагаемые по отдельности, поскольку вариации не являются независимыми. Зато теперь совершенно ясно, как же все-таки отсюда можно извлечь ровно l уравнений движения.

Для этого нужно воспользоваться понятиями обобщенных координат и виртуальных перемещений совместно! А именно, следует записать соотношение (8.23) и перейти в нем от зависимых координат \vec{r}_a и вариаций $\delta \vec{r}_a$ к независимым обобщенным координатам q_i и их вариациям δq_i . Тогда (8.23) представится в форме

$$\sum_i Y_i (\{\ddot{q}_j\}, \{\dot{q}_j\}, \{q_j\}; t) \delta q_i = 0 \quad (8.24)$$

и будет равнозначно, в силу независимости δq_i , l уравнениям

$$Y_i = 0, \quad [i = 1, \dots, l], \quad (8.25)$$

где Y_i – некоторые известные комбинации обобщенных координат, их первых и вторых производных по времени, а также, может быть, и времени.

В целях иллюстрации соответствующей методики мы проведем необходимую процедуру для статического случая.

§9. Статический принцип виртуальных перемещений

Пусть система частиц находится в равновесии, т.е. не движется вообще. Очевидно, что это возможно лишь в том случае, когда суммарная сила, действующая на каждую частицу системы, равна нулю:

$$\vec{F}_a + \vec{R}_a = 0, \quad [a = 1, \dots, N]. \quad (9.1)$$

Умножая каждое из уравнений на $\delta \vec{r}_a$, складывая результаты и учитывая идеальность связей, получим условие равновесия без сил реакций:

$$\boxed{\sum_a (\vec{F}_a, \delta \vec{r}_a) = 0}. \quad (9.2)$$

Это условие называется принципом виртуальных перемещений.

Собственно, мы доказали, что условие (9.2) есть *необходимое* условие равновесия. *Достаточно* ли оно для равновесия системы? Оказывается, что да, достаточно. Но поскольку все наше рассмотрение служит иллюстративным целям, мы доказательство этого утверждения проводить не будем. Ограничимся формулировкой окончательного результата.

Принцип виртуальных перемещений. Для равновесия системы частиц необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_a (\vec{F}_a, \delta \vec{r}_a) = 0.$$

Заметим, кстати, что в средней школе это условие также имеет специальное название – оно именуется «золотым правилом механики».

Как и в общей ситуации, из (9.2) вовсе не следует, что $\vec{F}_a = 0$.

Здесь это видно и непосредственно – ведь условия равновесия в исходной форме гораздо более сложны и гласят, что $\vec{F}_a + \vec{R}_a = 0$. Перейдем, однако, к обобщенным координатам:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_1, \dots, q_l). \quad (9.3)$$

При этом, поскольку мы рассматриваем статическую задачу, уравнения связей и формулы преобразования координат считаются не содержащими времени. Варьирование уравнений (9.3) дает нам связи между декартовыми и обобщенными виртуальными перемещениями:

$$\delta \vec{r}_a = \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (9.4)$$

Подставим эти выражения в (9.2), получим

$$\sum_a \left(\vec{F}_a, \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (9.5)$$

Определение. Величины

$$\sum_a \left(\vec{F}_a, \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \right) \equiv Q_i \quad (9.6)$$

называются *обобщенными силами*.

С учетом этого определения (9.4) переписывается как

$$Q_i \delta q_i = 0, \quad (9.7)$$

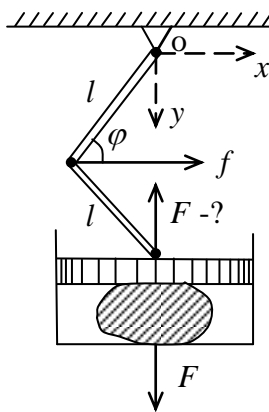
откуда, пользуясь независимостью вариаций δq_i , приходим к следующим окончательным условиям равновесия:

$$Q_i = 0, \quad [i = 1, \dots, l]. \quad (9.8)$$

Заметим, однако, что при решении конкретных задач удобнее пользоваться не этими формулами, а исходным соотношением (9.2), совершая в нем переход к обобщенным координатам непосредственно.

Примеры

1. Найдем, какую силу F развивает пресс, изображенный на рисунке, при приложении извне силы f . Принцип виртуальных перемещений в данном случае записывается как



$$f \delta x_f - F \delta y_F = 0. \quad (9.9)$$

Число степеней свободы – 1, обобщенная координата – угол φ .
Уравнения преобразований имеют вид

$$x_f = -l \cos \varphi, \quad y_F = 2l \sin \varphi. \quad (9.10)$$

Их варьирование дает

$$\delta x_f = l \cdot \sin \varphi \cdot \delta \varphi, \quad \delta y_F = 2l \cos \varphi \cdot \delta \varphi. \quad (9.11)$$

Подставляя эти вариации в (9.9), получим

$$(f \sin \varphi - F \cdot 2l \cos \varphi) l \cdot \delta \varphi = 0,$$

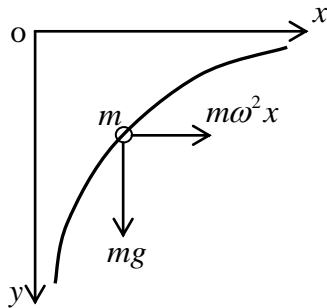
откуда окончательно

$$F = \frac{1}{2} f \operatorname{tg} \varphi. \quad (9.12)$$

2. Гладкая проволоочная гипербола, уравнение которой имеет вид

$$xy = a^2, \quad (9.13)$$

вращается вокруг вертикальной асимптоты (оси y) с постоянной угловой скоростью ω .



На эту гиперболу нанизана бусинка. Найдём положение ее относительного равновесия. Рассмотрение будем проводить в системе отсчета, связанной с гиперболой, которая неинерциальна, а потому, наряду с силой тяжести mg , следует принять во внимание центробежную силу инерции $m\omega^2 x$. Записываем принцип виртуальных перемещений (9.2):

$$mg\delta y + m\omega^2 x\delta x = 0. \quad (9.14)$$

Число степеней свободы – 1, обобщенная координата – x . Выражая y через x с помощью уравнения связи (9.13):

$$y = \frac{a^2}{x}, \quad (9.15)$$

и проводя варьирование, получаем

$$\delta y = -\frac{a^2}{x^2} \delta x, \quad (9.16)$$

Подстановка (9.16) в (9.14) дает

$$\left(-g \frac{a^2}{x^2} + \omega^2 x\right) m\delta x = 0,$$

Откуда приходим к следующему значению x_0 координаты x в положении относительного равновесия:

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{ga^2}{\omega^2}}. \quad (9.17)$$

3. Для какой кривой любая точка будет точкой равновесия?

$$-mg\delta y + m\omega^2 \delta x = 0$$

$$y = f(x)$$

$$\delta y = \frac{dy}{dx} \delta x$$

$$m\left(-g \frac{dy}{dx} + \omega^2 x\right) \delta x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g} x; \quad y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C; \quad \boxed{y = \frac{\omega^2}{2g} x^2}.$$

Допустим теперь, что «активные» силы F_a потенциальны, т.е.

$$\exists U = U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N): \vec{F}_a = -\nabla_a U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}. \quad (9.18)$$

Перейдем к обобщенным координатам и найдем обобщенные силы Q_i . Вспоминая определение (9.6) и учитывая (9.18), будем иметь:

$$Q_i = \sum_a \left(\vec{F}_a, \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \right) = -\sum_a \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}, \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \right),$$

так что

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (9.19)$$

Возвращаясь к условиям равновесия $Q_i = 0$, мы заключаем, что в положении равновесия должны выполняться равенства

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad [i = 1, \dots, l]. \quad (9.20)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Если силы, действующие на частицы, потенциальны, то положения равновесия системы соответствуют таким ее конфигурациям, для которых потенциальная энергия принимает *экстремальные* значения.

Как известно, существует несколько видов равновесия – устойчивое, безразличное и неустойчивое, причем иногда к особому виду относят еще «седлообразное» равновесие, только и свойственное электростатической системе зарядов (теорема Ирншоу). Известно также, что равным видам равновесия отвечают разные типы экстремума потенциальной энергии. Для нас особенно важным будет устойчивое равновесие, поскольку относительно именно такой равновесной конфигурации система совершает малые колебания, рассматриваемые в следующей главе.

Определение. Положение равновесия называется *устойчивым*, если при сообщении точкам системы в этом состоянии достаточно малых скоростей отклонения во все последующие моменты времени будут также достаточно малыми.

При анализе этого понятия обобщенные координаты удобно выбирать следующим образом. Пусть $\{\eta_i\}$ – исходные обобщенные координаты, и $\{\eta_i^*\}$ – их значения, отвечающие равновесной конфигурации.

Введем новые обобщенные координаты

$$q_i = \eta_i - \eta_i^*. \quad (9.21)$$

Их удобство в том, что для равновесной конфигурации значения этих координат равны нулю:

$$q_i^* = 0. \quad (9.22)$$

Теперь мы в состоянии строго определить понятие устойчивого равновесия и проанализируем условия, при которых оно реализуется.

Строгое определение.

Точка $q_i^* = 0$ отвечает устойчивому равновесию, если

$$\exists \delta > 0: \quad |q_i^t| < \varepsilon \quad (\forall |q_i^0| < \delta, \forall |\dot{q}_i^0| < \delta, \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (t_0, +\infty)). \quad (9.23)$$

Теорема Дирихле – Лагранжа.

Для устойчивого положения равновесия консервативной системы достаточно, чтобы экстремум потенциальной энергии для соответствующей конфигурации был *минимумом*.

Доказательство

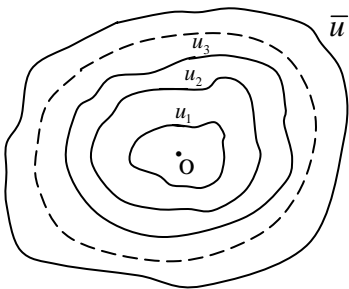
Выберем аддитивную константу в потенциальной энергии так, чтобы ее значение в равновесном состоянии равнялось нулю:

$$U(\{q_i^*\}) \equiv U(0, \dots, 0) = 0. \quad (9.24)$$

Тогда всюду в окрестности нуля потенциальная энергия будет положительной:

$$U(\{q_i\}) > 0. \quad (9.25)$$

Значит, можно построить последовательность включающих друг друга и охватывающих нуль эквипотенциальных поверхностей



$$U(\{q_i\}) = U_\alpha = Const, \quad (9.26)$$

т.е. таких эквипотенциальных поверхностей, что

$$0 < U_1 < U_2 < \dots < \bar{U} < \dots \quad (9.27)$$

Пусть частицам системы в начальный момент времени $t = t_0$ сообщены небольшие отклонения и скорости $\{q_i^0\}$ и $\{\dot{q}_i^0\}$. Покажем, если эти величины достаточно малы, то точка $\{q_i^t\}$ никогда не выйдет за пределы любой наперед заданной эквипотенциальной поверхности $U = \bar{U}$, что и будет означать малость отклонений $\{q_i^t\}$ в любой момент времени $t \in (t_0, +\infty)$.

Выберем начальные координаты $\{q_i^0\}$ и начальные скорости $\{\dot{q}_i^0\}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$T^0 < \frac{\bar{U}}{2}, \quad U^0 < \frac{\bar{U}}{2}. \quad (9.28)$$

Тогда мы получим, что

$$E^0 = T^0 + U^0 < \vec{U}. \quad (9.29)$$

Но в силу закона сохранения энергии $E^t = E^0$ это означает, что во все моменты времени

$$T + U < \vec{U}. \quad (9.30)$$

Поскольку же кинетическая энергия неотрицательна ($T \geq 0$), мы из (9.30) заключаем, что

$$U \equiv U(\{q_i^t\}) < \vec{U}, \quad (9.31)$$

и теорема доказана.

Заметим, что даже само понятие устойчивости положения равновесия, и тем более его анализ, оказывается весьма нетривиальным. Об этом свидетельствует хотя бы тот факт, что существует множество самых различных определений устойчивости (по Лагранжу, по Пуассону, по Лапласу, по Жуковскому – Леви-Чевита, по Якоби, по Бирхгофу и т.д.). Наиболее общим является понятие устойчивости по Ляпунову, которым мы фактически и пользовались.

§10. Общее уравнение динамики

Обратимся теперь к динамическим проблемам, и по первоначально воспользуемся лишь методом виртуальных перемещений, не обращаясь к обобщенным координатам. Как говорилось в конце §8, он позволяет исключить из рассмотрения силы реакции, переходя от уравнений движения в форме Ньютона к соотношению (8.23), которое мы запишем теперь в виде

$$\sum_a (\vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{r}}_a) \delta \vec{r}_a = 0. \quad (10.1)$$

Определение. Соотношение (10.1) называется *общим уравнением динамики*.

Такое название оправдывается тем, что, как мы сейчас увидим, в (10.1) содержатся все положения динамики систем со связями (и, тем более, динамики систем свободных частиц). Правда, при этом не определяются неизвестные силы реакции, но это уже совсем другая задача, решение которой нас, физиков, не интересует.

Исторически соотношение (10.1) было получено и интерпретировано следующим образом. Прежде всего, Даламбер переписал уравнения движения для системы частиц со связями, т.е. уравнения (8.21), в форме

$$\vec{F}_a + \vec{R}_a - m_a \ddot{\vec{r}}_a = 0, \quad [a=1, \dots, N] \quad (10.2)$$

и назвал векторы $-m_a \ddot{\vec{r}}_a$ «силами инерции» (не путать их с силами инерции, возникающими в результате перехода в неинерциальные системы отсчета). Тем самым динамические уравнения движения превратились как бы в статические условия равновесия. В старину эту тривиальную перегруппировку членов почему-то воспринимали очень серьезно и называли уравнения (10.2) *принципом Даламбера*. Затем Лагранж ввел понятие виртуальных перемещений и получил (10.1) точно так же, как мы получали (9.2) в предыдущем параграфе. Поэтому соотношение (10.1) было названо также принципом виртуальных перемещений. В нем, в отличие от статического принципа (9.2), фигурируют не только «активные» силы, но и «силы инерции». Применявшаяся в данном абзаце терминология является устаревшей, и ныне ни в одном сколько-нибудь серьезном учебнике по механике практически не встречается. В учебнике Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица «принцип Даламбера» один раз появляется, но в гораздо более широкой трактовке, чем на самом деле, – как способ решения динамических задач, основывающийся на замене геометрических уравнений связей более физическими, хотя и не известными, силами реакций связей.

Перейдем теперь к извлечению реальных следствий из общего уравнения динамики, которое иногда именуется также принципом Даламбера – Лагранжа.

Теорема 1. Если связи допускают поступательное перемещение системы как целого, то

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (10.3)$$

где \vec{p} – импульс системы, а $\vec{F} \equiv \sum_a \vec{F}_a$ – сумма всех сил, кроме сил реакций.

Д о к а з а т е л ь с т в о

По условию теоремы мы можем положить $\delta\vec{r}_a = \delta\vec{\varepsilon}$. Подставляя эти виртуальные перемещения в (10.1), вынося постоянный вектор $\delta\vec{\varepsilon}$ за знак суммы и пользуясь его произвольностью, получим

$$\sum_a m_a \ddot{\vec{r}}_a = \sum_a \vec{F}_a, \quad (10.4)$$

откуда очевидным образом следует (10.3) (сравн. с выводом (2.2)).

Новым здесь по сравнению с исходными уравнениями движения является то, что при сделанных предположениях относительно связей силы реакции *не участвуют* в изменении полного импульса системы.

Принимая, далее, Третий закон Ньютона, мы из (10.3) получим теорему 1 из динамики систем свободных частиц (см. §2), а затем и теорему о движении центра масс. Если же ограничиться рассмотрением замкнутых систем, то из однородности пространства мы придем к сохранению импульса.

Заметим, что если связи допускают поступательное перемещение системы как целого лишь в одном направлении – скажем, в направлении оси z , – то вместо (10.3) мы получим

$$\frac{dp_z}{dt} = F_z \quad (10.5)$$

со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Теорема 2. Если связи допускают произвольное вращение системы как целого, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (10.6)$$

где \vec{L} – момент импульса системы, а $\vec{M} = \sum_a \vec{M}_a$ – сумма моментов всех сил, кроме сил реакций.

Д о к а з а т е л ь с т в о

По условию теоремы мы можем положить $\delta\vec{r}_a = [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}]$. Подставляя эти виртуальные перемещения в (10.1), производя в смешанном произведении циклическую перестановку сомножителей, вынося постоянный вектор $\delta\vec{\varphi}$ за знак суммы и пользуясь его произвольностью, получим

$$\sum_a [\vec{r}_a, m_a \ddot{\vec{r}}_a] = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{F}_a]. \quad (10.7)$$

Преобразуя левую часть стандартным образом (см. §3), придем отсюда к (10.6).

По поводу теоремы 2 можно сделать абсолютно те же замечания, что и по поводу теоремы 1. В частности, если связи допускают вращение системы как целого лишь вокруг одной оси – скажем, оси z , – то вместо (10.6) мы получим

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (10.8)$$

Теорема 3. Если связи стационарны, то

$$dT = \delta A, \quad (10.9)$$

где T – кинетическая энергия системы, а δA – элементарная работа всех сил, кроме сил реакций.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Поскольку связи стационарны, то действительное перемещение системы является одним из виртуальных, а потому мы можем взять $\delta \vec{r}_a = d\vec{r}_a$. Подстановка этого виртуального перемещения в (10.1) дает

$$\sum_a (m_a \ddot{\vec{r}}_a, d\vec{r}_a) = \sum_a (\vec{F}_a, d\vec{r}_a), \quad (10.10)$$

и, проводя выкладки, полностью аналогичные тем, которые нас привели к формуле (4.2), мы получим (10.9).

Дальнейшие рассуждения проводятся точно так же, как в §4. В частности, для замкнутой системы, или для системы, находящейся в стационарном потенциальном внешнем поле, из однородности времени вытекает закон сохранения энергии.

Итак, отправляясь от общего уравнения динамики и делая некие дополнительные предположения о свойствах связей, мы получили три основные теоремы динамики, в которых не фигурируют силы реакции. Но в общей ситуации, когда связи произвольны, извлечь из общего уравнения динамики сколько-нибудь дополнительную информацию *непосредственно* не удастся. Причина в том, что виртуальные перемещения $\delta \vec{r}_a$ при наличии связей не являются независимыми, и не ясно, как их можно исключить из (10.1) с тем, чтобы получить какие-то дифференциальные уравнения движения.

Способ преодоления этой трудности подсказывает нам анализ все того же статического принципа виртуальных перемещений. Следует в (10.1) перейти от зависимых координат \vec{r}_a к независимым обобщенным координатам q_i . При этом мы получим хорошо уже известные нам уравнения Лагранжа.

§11. Вывод уравнений Лагранжа

Теорема. В случае, когда связи являются голономными, двусторонними и идеальными, а внешние силы – потенциальными, уравнения движения системы частиц в обобщенных координатах служат уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad [i = 1, \dots, l], \quad (11.1)$$

где функция Лагранжа L равна

$$L = T - U, \quad (11.2)$$

причем T и U – кинетическая и потенциальная энергия соответственно, выраженные через обобщенные координаты.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Исходим из общего уравнения динамики (10.1):

$$\sum_a (\vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{r}}_a, \delta \vec{r}_a) = 0 \quad (11.3)$$

и подставляем в него выражения для $\delta \vec{r}_a$ через δq_i :

$$\delta \vec{r}_a = \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \delta q_i. \quad (11.4)$$

В результате получим

$$0 = \sum_a \left(\vec{F}_a, \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \right) \delta q_i - \sum_a \left(m_a \ddot{\vec{r}}_a, \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \right) \delta q_i \equiv Q_i \delta q_i - I_i \delta q_i. \quad (11.5)$$

Первая сумма была уже преобразована в §9, где мы показали, что

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (11.6)$$

и назвали величины Q_i обобщенными силами. Таким образом, вся проблема сводится к надлежащему преобразованию второй суммы, т.е. комбинации

$$I_i \equiv \sum_a m_a \left(\frac{d\vec{v}_a}{dt}, \frac{d\vec{r}_a}{dq_i} \right). \quad (11.7)$$

Прежде всего, вынесем производную по времени за знак суммы:

$$I_i = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a m_a \left(\vec{v}_a, \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \right) \right\} - \sum_a m_a \left(\vec{v}_a, \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \right). \quad (11.8)$$

Дальше нам потребуется выражение для скорости \vec{v}_a через обобщенные скорости \dot{q}_i . Дифференцируя формулы преобразований

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_1, \dots, q_l; t),$$

имеем:

$$\vec{v}_a \equiv \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t}, \quad (11.9)$$

откуда, в частности, видно, что

$$\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial \dot{q}_i} \quad (11.10)$$

и

$$\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}_a}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_a}{\partial q_i \partial t}. \quad (11.11)$$

Кроме того, для производной по времени, входящей во вторую сумму выражения (11.8), имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}_a}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_a}{\partial q_i \partial t},$$

или, с учетом (11.11),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial q_i}. \quad (11.12)$$

Подстановка (11.10) и (11.12) в (11.8) дает:

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a m_a \left(\vec{v}_a, \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} - \sum_a m_a \left(\vec{v}_a, \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial q_i} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_a \left(\frac{m_a \vec{v}_a^2}{2} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_a \left(\frac{m_a \vec{v}_a^2}{2} \right) \equiv \\ &\equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (11.13)$$

где введена кинетическая энергия системы частиц

$$T = \sum_a \frac{m_a \vec{v}_a^2}{2}. \quad (11.14)$$

Подставляя (11.6) и (11.13) в (11.5), запишем общее уравнение динамики в форме, содержащей только обобщенные координаты:

$$0 = \left\{ -\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} \delta q_i. \quad (11.15)$$

Пользуясь теперь независимостью вариаций δq_i , из (11.15) имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} = 0. \quad (11.16)$$

Учтем, далее, что потенциальная энергия U зависит только от обобщенных координат q_i и времени t , но не от обобщенных скоростей \dot{q}_i . Это позволяет переписать (11.16) в виде

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} = 0. \quad (11.17)$$

Осталось ввести функцию Лагранжа $L = T - U$, чтобы прийти к уравнениям Лагранжа (11.1) и тем самым завершить доказательство теоремы.

§12. Аналитическая механика

В предыдущих параграфах при анализе системы частиц со связями мы действовали достаточно традиционными методами. Однако можно было бы остановиться на п.1 из §8, введя обобщенные координаты и вообще не прибегая к понятию виртуальных перемещений. Будем рассуждать следующим образом.

На примере одной свободной частицы мы убедились, что уравнения движения в декартовых координатах можно переписать в форме уравнений Лагранжа, которые оказываются справедливыми и в произвольных криволинейных координатах. Главное же в том, что эти уравнения являются следствиями весьма общего принципа – принципа экстремального действия. Так положим же с самого начала этот принцип в основу построения динамики систем общего вида – систем частиц со связями (правда, вполне определенного вида). Итак, формулируем следующий главнейший динамический постулат классической механики, во многом равнозначный (особенно, если его дополнить принципом относительности) законам Ньютона.

ПРИНЦИП ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ

Всякая механическая система характеризуется лагранжианом

$$L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}; t), \quad (12.1)$$

таким, что уравнения движения суть уравнения экстремалей для функционала действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (12.2)$$

при условии

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0. \quad (12.3)$$

Именно с этого пункта можно начинать систематическое изучение «Механики» Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица. Авторы строят всю классическую механику, отправляясь как раз от принципа экстремального действия и дополняя его общими принципами инвариантности. Следует подчеркнуть, однако, что для первоначального ознакомления с предметом их учебник непригоден, ибо курс теоретической физики Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица предназначен, строго говоря, для физиков-профессионалов.

В нашем курсе формулировкой общего принципа экстремального действия *завершается* анализ основных положений классической механики. Правда, может показаться, что нужно еще развить лагранжев формализм Гамильтона – Якоби для систем частиц со связями. Но в этом нет никакой необходимости. Ведь все эти формализмы развиты для одной свободной частицы, а переход к общему случаю осуществляется совершенно тривиально, чему в немалой степени способствует весьма унифицированная система обозначений. Чтобы осуществить такой переход,

а) достаточно считать, что во всех приводившихся ранее формулах индекс i пробегает значения от 1 до l (а не значения 1,2,3), где l – число степеней свободы;

б) следует учесть, что в функции Лагранжа $L = T - U$

$$T = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \vec{v}_a^2}{2} \quad (12.4)$$

и

$$U = \sum_a U_a + \sum_{a,b < a} U_{ab}, \quad (12.5)$$

где T_a – кинетическая энергия частицы a , U_a – потенциальная энергия частицы a во внешнем поле, а U_{ab} – энергия взаимодействия частиц a и b .

Примеры

1. Для плоского двойного маятника, рассмотренного в §8 (см. пример 7), функция Лагранжа обладает структурой

$$L = T - U = (T_1 + T_2) - (U_1 + U_2) \quad (12.6)$$

и записывается в декартовых координатах как

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1 g y_1 + m_2 g y_2. \quad (12.7)$$

Переход к обобщенным координатам φ_1 и φ_2 осуществляется совершенно стандартным образом с помощью формул преобразования (8.5):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1 \\ y_1 &= l_1 \cos \varphi_1 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \\ y_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \end{aligned} \right\}. \quad (12.8)$$

В итоге после простых выкладок мы получим

$$L = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \{ l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \} + m_1 g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2). \quad (12.9)$$

2. Для многоэлектронного атома с порядковым номером z функция Лагранжа обладает следующей структурой:

$$L = T - U = \sum_a T_a - \sum_a U_a - \sum_{a,b < a} U_{ab}, \quad (12.10)$$

где T_a – кинетическая энергия электрона с номером a , U_a – его потенциальная энергия в электростатическом поле ядра, U_{ab} – энергия электростатического взаимодействия электронов a и b . Записав лагранжиан в виде (12.10), мы на самом деле совершили множество приближений:

а) ядро считается бесконечно тяжелым (реально $M \gg m$), а потому неподвижным, и его кинетическая энергия не входит в L ;

б) скорости электронов считаются весьма малыми (реально $v \sim \alpha c$, где $\alpha = 1/137$), а потому нерелятивистскими;

- в) магнитным взаимодействием электронов с ядром полностью пренебрегается;
г) ядро считается точечным (реально $R \sim 10^{-14} \text{ м}$), а что касается электронов, то в современной физике считается пока их размеры в точности равны нулю.

Совмещая теперь начало координат с неподвижным ядром, для функции Лагранжа атома в декартовых координатах окончательно будем иметь:

$$L = \sum_a \frac{m_a \vec{v}_a^2}{2} + \sum_a \frac{ze^2}{|\vec{r}_a|} - \sum_{a,b < a} \frac{e^2}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} . \quad (12.11)$$

Теперь, чтобы завершить курс классической механики, нам осталось рассмотреть некоторые из наиболее важных ее приложений.