Глава I. ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ И УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В данной главе формулируется общее понятие инвариантности физических систем и рассматриваются такие тесно связанные с ним математические вопросы, как понятие группы, матричное исчисление, свойства трехмерной ортогональной группы, векторное исчисление и векторный анализ, тензорное исчисление и тензорный анализ. С такой точки зрения анализируются основные положения и уравнения ньютоновой механики, максвелловской электродинамики, механики сплошных сред и релятивистской электродинамики.

§1. Преобразования инвариантности

1. В конце 19 в. Ф.Клейн сформулировал свою знаменитую Эрлангенскую программу, согласно которой всякую геометрическую теорию следует формулировать в терминах инвариантов некоторой совокупности отображений пространства в себя. Так, эвклидова геометрия порождается множеством трехмерных вращений, дополненных трансляциями и инверсией пространства. То же относится и к любой физической теории, что особенно подчеркивал уже Д.Гильберт в 1900 г., сформулировавший одну из своих проблем как проблему инвариантной аксиоматизации физики. Особенно ясной плодотворность такого подхода стала в последние 10 – 20 лет в теории элементарных частиц, большинство положительных результатов которой есть следствие некоторой постулируемой инвариантности.

2. Исходным понятием соответствующего анализа является основное в физике понятие <u>элементарного события</u>, которое неопределимо, но под которым интуитивно подразумевается всякое явление, происходящее в данной точке пространства в данный момент времени. Для описания множества событий нужно задать их пространственные положения, а для этого мы должны располагать системой координат (чаще всего декартовой), т.е. совокупностью твердых тел и часами. Система координат совместно с приданными ей часами называется <u>системой отсчета</u>. В заданной системе отсчета S множество событий отображается в множество точек вещественного четырехмерного пространства $\mathbb{R}^4$:

$$X = (t; \vec{r}) = (t; x, y, z) \equiv (x^0; x^1, x^2, x^3) .$$

Систему отсчета в принципе можно выбирать произвольным образом, переходя от исходной S к любой другой S', т.е. вводя отображение

$$g: \ S \mapsto S'.$$

При этом изменяются

а) координаты событий,

б) геометрические и физические величины,

в) уравнения, описывающие геометрические соотношения и физические законы.

3. Остановимся сначала на преобразовании координат событий. Обозначим координаты какого–то фиксированного события в системах S' и S через X' и X соответственно. Тогда получим диаграмму, вводящую оператор, который переводит точку X в точку X', причем мы будем его обозначать той же буквой g т.к. это не приведет ни к каким недоразумениям:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d] & S' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "g"] & X' \end{tikzcd}$$

$$g: \ X \to X' \ , \quad \text{или} \quad X' = gX .$$

Особенно важными являются следующие преобразования систем отсчета.

а). Параллельный перенос (трансляция) системы координат на вектор $\vec{a}$:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}, \quad t' = t .$$

б). Сдвиг начала отсчета времени на величину τ :

$$\vec{r}' = \vec{r}, \quad t' = t - \tau .$$

в). Вращение системы координат относительно ее начала:

$$\vec{r}' = \Omega\vec{r}, \quad t' = t , \quad \text{причем} \quad \Omega : \vec{O} \mapsto \vec{O}' \quad \text{и} \quad \left(\Omega\vec{r}\right)^2 = \vec{r}^{\,2} .$$

Отметим важный частный случай – повороты на углы φ относительно фиксированной оси (скажем, оси Oz):

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' &= z \end{aligned}\right\} , \quad t' = t .$$

Интересно сделать здесь формальную подстановку $\varphi = i\alpha$, считая углы поворота чисто мнимыми. Вводя также мнимую координату $\tilde{y} = iy$ придем к преобразованиям <u>гиперболических поворотов:</u>

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \ \text{ch}\ \alpha + \tilde{y}\ \text{sh}\ \alpha \\ \tilde{y}' &= x\ \text{sh}\ \alpha + \tilde{y}\ \text{ch}\ \alpha \end{aligned}\right\} .$$

Они сохраняют не обычную длину $l^2 = x^2 + y^2$, а так называемый <u>интервал</u>

$$s^2 = x^2 - \tilde{y}^2$$

Подобные преобразования играют фундаментальную роль в теории относительности.

г). Отражение координатных осей относительно начала (пространственная инверсия)

$$\vec{r}' = -\vec{r}, \quad t' = t$$

д). Обращение времени:

$$\vec{r}' = \vec{r}, \quad t' = -t$$

е). Переход от системы отсчета S к системе S', движущейся относительно S со скоростью $\vec{v} = \text{const}$. Он осуществляется:

а) в классической физике – преобразованиями Галилея,

б) в релятивистской физике – преобразованиями Лоренца.

4. Множество преобразований каждого из перечисленных классов обладает следующими свойствами.

а) В нем естественным образом вводится операция умножения

$$g_2 g_1 = g_3$$

состоящая в последовательном применении преобразований g_1 и g_2, что приводит к элементу g_3 из того же класса.

б). Умножение, очевидно, ассоциативно:

$$\left(g_1 g_2\right) g_3 = g_1 \left(g_2 g_3\right)$$

в). Существует единичный элемент e такой, что

$$eg = ge = g$$

г). Каждому преобразованию g отвечает обратное преобразование g^{-1}, возвращающее систему в исходное положение:

$$g^{-1} g = g g^{-1} = e$$

Таким образом, с математической точки зрения множество преобразований данного класса образует <u>группу</u> G. Группы перечисленных выше преобразований носят следующие названия.

а). Группа пространственных трансляций $\mathbb{R}^3$.

б). Группа временных сдвигов $\mathbb{R}$.

в). Группа трехмерных вращений $SO(3)$: частный случай – группа поворотов $SO(2)$: еще более частный случай – группа гиперболических поворотов $SO(1,1)$

г). Группа пространственной инверсии P_i.

д). Группа временной инверсии T_i.

е). Группа преобразований
 а) Галилея,
 б) Лоренца.

5. Группы г) – д) обладают двумя элементами – инверсией j и единицей e, т.е. являются конечными группами второго порядка. Группы а) – в) бесконечны – каждая из них содержит континуальное множество элементов. Все перечисленные группы, кроме группы вращений и группы Лоренца, коммутативны (абелевы), т.е. для любой пары их элементов

$$g_1 g_2 = g_2 g_1$$

Заметим, что объединяя разные классы преобразований, мы будем получать новые, более широкие группы. Так, преобразования в) – г) дают трехмерную ортогональную группу $O(3)$, а если их дополнить преобразованиями а), то возникнет евклидова группа $E(3)$, или группа движений трехмерного евклидова пространства. Пять первых классов совместно с преобразованиями Лоренца образуют полную неоднородную группу Лоренца, или группу Пуанкаре Π, а совместно с преобразованиями Галилея – полную неоднородную группу Галилея Γ и т.д.

6. Поговорим теперь о преобразовании физических величин при изменении системы отсчета. Формально исследование общей структуры теории сводится к отысканию <u>инвариантов</u> (неизменных величин), или более общо – <u>ковариантов</u>, заданной группы G. Пусть имеется некоторая физическая величина F, значения f которой лежат в каком-то пространстве. Тогда понятие коварианта вводится следующим образом. При преобразовании системы отсчета возникает изображенная диаграмма, которая вводит операторы $T(g)$: $f' = T(g)f$

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "g"] \arrow[d] & S' \arrow[d] \\
f \arrow[r, "T(g)"] & f'
\end{tikzcd}$$

Переходя от S к S'' сначала в два этапа через S', а затем непосредственно, получим приведенную диаграмму, из которой

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[rrrr, "T(g_1)"] \arrow[dddrr, "T(g_2 g_1)"'] & & & & f' \arrow[dddll, "T(g_2)"] \\
& S \arrow[ul] \arrow[rr, "g_1"] \arrow[dr, "g_2 g_1"'] & & S' \arrow[ur] \arrow[dl, "g_2"] & \\
& & S'' \arrow[d] & & \\
& & f'' & &
\end{tikzcd}$$

$$f'' = T(g_2)T(g_1)f = T(g_2 g_1)f ,$$

откуда

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$$

Таким образом, множество линейных операторов $T(g)$, действующих в пространстве значений f физической величины F реализует представление рассматриваемой группы преобразований. Ковариантами и называются объекты с подобными трансформационными свойствами. Отыскание их сводится к отысканию всех представлений данной группы G и составляет одну из основных задач теории групп. Ясно, что инварианты суть частный случай ковариантов, возникающий, когда $T(g) = I, \forall g \in G$.

7. Конечно, всегда можно перейти к любой новой системе отсчета (например, вращающейся), отчего физическое содержание теории (но не описание данного явления) не изменится. Однако среди всевозможных преобразований систем отсчета можно выделить один особенно важный класс.

Определение. Преобразования инвариантности – это такие преобразования систем отсчета, относительно которых все уравнения, описывающие геометрические соотношения и физические законы, ковариантны, т.е. не меняют своей формы.

Как показывает опыт, для замкнутых физических систем все перечисленные преобразования в подавляющем большинстве случаев суть преобразования инвариантности. Это обстоятельство отражает соответственно

а). Однородность пространства.
б) . Однородность времени.
в). Изотропность пространства.
г). Симметрию между правым и левым.
д). Обратимость времени.
е). Принцип относительности
  а) Галилея,
  б) Эйнштейна.

Исключение составляют лишь системы слабо взаимодействующих частиц, для которых нарушается симметрия между правым и левым (1956 г.) и обратимость времени (1964 г.).

8. Если рассматривается незамкнутая система, т.е. система, помещенная во внешнее поле, то часть свойств симметрии пространства – времени оказывается потерянной, и теория перестает быть инвариантной относительно соответствующих преобразований. Примером может служить частица в однородном электрическом поле, которое выделяет в пространстве определенное направление, а значит нарушает его изотропность. При анализе соответствующих проблем следует иметь в виду, что применяется следующее

Соглашение. Внешние поля считаются «вмороженными» в систему координат, так что их компоненты в системах S и S' совпадают, формально не преобразуясь.

9. Чтобы пояснить естественность этого соглашения, перейдем от пассивной точки зрения, которой мы до сих пор придерживались и согласно которой меняется вспомогательный математический объект – система отсчета, к активной точке зрения. А именно, будем совершать преобразования над самой физической системой. Теперь мы сдвигаем ее как целое, поворачиваем, заставляем двигаться с постоянной скоростью и т.д., не затрагивая окружение, т.е. внешние поля, и смотрим, происходят ли изменения в характере движения. Возвращаясь к пассивной точке зрения, мы видим, что принятое соглашение оказывается вполне оправданным.

Несмотря на физичность активной точки зрения, мы в дальнейшем при анализе свойств инвариантности будем придерживаться все же пассивной точки зрения, как более общей: всякому преобразованию физической системы отвечает некоторое эквивалентное преобразование системы отсчета, но обратное верно не всегда. Вот простые примеры:

а). Поворот тела на угол φ и поворот системы координат вокруг той же оси на угол $-\varphi$ эквивалентны.

б). Движение тела со скоростью $\vec{V}$ эквивалентно движению системы отсчета со скоростью $-\vec{V}$.

в) . Формально можно рассматривать операцию обращения времени (пассивная точка зрения), но реально заставить тело двигаться вспять во времени мы не в состоянии.

10. Существует еще два важных класса преобразований, которые отличаются от преобразований инвариантности, но формально описываются точно так же, т.е. на языке теории групп.

а). Преобразования симметрии, совмещающие физическую систему, например, кристалл или многоатомную молекулу, с собой. В первом случае особо важную роль играют трансляции, но уже не произвольные, а образующие очевидное дискретное множество. Во втором случае6 преобразования симметрии сводятся к вполне определенным поворотам и отражениям относительно некоторых плоскостей; здесь группы симметрии содержат, как правило, конечное число элементов. Преобразования симметрии чрезвычайно важны для квантовой механики, так как их анализ позволяет получить обширную информацию о свойствах кристаллов и молекул. Этим преобразованиям посвящена почти треть учебника Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица «Квантовая механика».

б). Негеометрические преобразования , не допускающие наглядного толкования и осуществляемые в некоторых фиктивных пространствах. В последние 15 лет они чрезвычайно широко применяются в теории элементарных частиц (изоспиновая симметрия, унитарная симметрия, модель кварков и т.д.), чем и обусловлены все основные ее успехи в последнее время. Мы к этим проблемам еще вернемся, но ближе к концу курса.

А сейчас, чтобы конструктивно двигаться дальше, нам следует развить необходимый математический аппарат, и прежде всего изложить элементы матричного исчисления и рассмотреть инварианты и коварианты трехмерной ортогональной группы. Это позволит наиболее естественным и последовательным образом сформулировать основные положения и уравнения классической физики – механики и электродинамики.

В о п р о с ы и з а д а ч и.

1. Привести примеры групп.
   а) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ по отношению к сложению.
   б). Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ по отношению к сложению.
   в). Множество радиус-векторов точек из $\mathbb{R}^3$ по отношению к сложению.
   г). Группа окружности $\mathbb{U}$ - множество чисел вида $e^{i\varphi}$ с $\operatorname{Im}\varphi = 0$ по отношению к перемножению.
   д). Циклическая группа $\mathbb{U}_n$ - множество корней n -й степени из единицы по отношению к перемножению.
   е). Группа перестановок S_n, состоящая из элементов

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Пример перемножения:

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \equiv g_3$$

2.. Доказать единственность групповой единицы e .

3. Доказать единственность элемента g^{-1}, обратного к данному элементу g .

4. Привести тривиальные примеры представлений группы G .

а) .Единичное (тривиальное, или скалярное) представление:

$$T: \ g \mapsto I, \ \forall g \in G .$$

б). Векторное представление:

$$T: \ g \mapsto g, \ \forall g \in G .$$

5. Указать наиболее естественные представления группы трансляций :

$$T_k: \ g_a \mapsto e^{ika} I, \ k \in R .$$

6. Указать наиболее естественные представления группы поворотов $\mathbb{U}$:

$$T_n: \ g_\varphi \mapsto e^{ik\varphi} I, \ n \in Z .$$

7. Пусть задано некоторое множество функций $\psi(x)$ и пусть совершается преобразование системы координат

$$g: \ s \to s' \ \Rightarrow \ \vec{r}' = g\vec{r}.$$

Показать, что множество операторов $T(g)$, определяемых равенством

$$\psi'(\vec{r}) \equiv T(g)\psi(\vec{r}) = \psi(g^{-1}\vec{r})$$

Реализует представление исходной группы. Что нарушится, если в приведенной формуле g^{-1} Заменить на g ?

Р е ш е н и е

$$T(g_2 g_1)\psi(\vec{r}) \equiv T(g_3)\psi(\vec{r}) = \psi(g_3^{-1}\vec{r}) = \psi\left[(g_2 g_1)^{-1}\vec{r}\right]$$

и

$$T(g_2)T(g_1)\psi(\vec{r}) = T(g_2)\psi(g^{-1}\vec{r}) \equiv T(g_2)\chi(\vec{r}) = \chi(g_2^{-1}\vec{r}) \overset{(!)}{=} \psi(g_1^{-1}g_2^{-1}\vec{r}) = \psi\left[(g_2 g_1)^{-1}\vec{r}\right],$$

Откуда

$$T(g_2 g_1) = T(g_2)T(g_1).$$

8. Получить оператор сдвига, переводящий $\psi(x)$ в $\psi(x+a)$. Ответ:

$$\psi(x+a) = e^{a\frac{d}{dx}}\psi(x).$$

Попытаться наметить возможные связи с импульсом.