§17. Тензоры и действия над ними.

Из предыдущего изложения должно быть ясным, сколь важную роль играет понятие инвариантной теории и анализ ковариантов соответствующей группы, т.е. величин, преобразующихся по различным ее представлениям. Пока мы ограничивались исследованием группы вращений и ее простейших ковариантов – скаляров и векторов. Не выходя еще за рамки этой группы, обратимся к ее ковариантам общего вида, которые называются тензорами. Напомним, прежде всего, основные определения и концепции, связанные с трехмерной ортогональной группой, которые достаточно подробно были изложены в параграфе 3.

Трехмерная ортогональная группа O(3) есть группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$ на себя с сохранением длин радиусов-векторов. Таким образом, она включает преобразования вида

$$X' = \Omega X, \qquad \text{т.е.} \qquad x^{i'} = \Omega^{i'}_{i} x^{i} \tag{17.1}$$

или

$$\tilde{X}' = \tilde{X}\tilde{\Omega}, \qquad \text{т.е.} \qquad x_{i'} = \Omega^{i}_{i'} x_{i} \tag{17.2}$$

причем

$$\tilde{X}'X' = \tilde{X}X, \qquad \text{т.е.} \qquad x_{i'}x^{i'} = x_{i}x^{i} \ . \tag{17.3}$$

В этих формулах X есть вектор из $\mathbb{R}^3$, задаваемый в декартовой системе координат тремя своими компонентами x^i (контравариантными):

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{17.4}$$

а $\tilde{X}$ - вектор сопряженного пространства $\tilde{\mathbb{R}}^3$ с компонентами x_i (ковариантными), численно совпадающими с

$$\tilde{X} = \left(x^1, \quad x^2, \quad x^3\right) \equiv \left(x_1, \quad x_2, \quad x_3\right) \ . \tag{17.5}$$

Условие (17.3) требует, чтобы матрицы $\Omega \in O(3)$ были ортогональными:

$$\tilde{\Omega}\Omega = \Omega\tilde{\Omega} = e \ , \qquad \text{т.е.} \qquad \Omega^{i}_{i'}\,\Omega^{i'}_{j} = \delta^{i}_{j} \ , \tag{17.6}$$

Откуда следует, что

$$\det\ \Omega = +1 \qquad \text{или} \qquad \det\ \Omega = -1 \ . \tag{17.7}$$

В соответствии со знаком определителя все ортогональные преобразования разбиваются на собственные вращения Ω_+ и несобственные вращения Ω_-, включающие пространственную инверсию J. У группы $O(3)$ имеются две важные подгруппы: $\{\Omega_+\} = SO(3)$ и $\{e, J\} = \mathcal{P}_i$. Элементы из разных подгрупп коммутируют, причем всякий элемент из $O(3)$ можно представить в виде произведения некоторого элемента из $SO(3)$ на некоторый элемент из $\mathcal{P}_i$. Таким образом, группа $O(3)$ есть прямое произведение своих указанных подгрупп:

$$O(3) = SO(3) \times \mathcal{P}_i \; . \tag{17.8}$$

Ограничимся пока рассмотрением только собственных вращений, т.е. преобразований из группы $SO(3)$. Выше мы уже рассмотрели простейшие коварианты этой группы – скаляры и векторы. Первые определяются как объекты не меняющиеся при вращениях:

$$\varphi' = \varphi \; . \tag{17.9}$$

Примером скаляра является объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и равный, как известно, их смешанному произведению:

$$V = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{17.10}$$

Вектор определяется как тройка чисел с таким же законом преобразования, как и у радиус-вектора:

$$A' = \Omega A\,, \qquad \text{т.е.} \qquad a^{i'} = \Omega^{i'}_{i} a^{i} \; . \tag{17.11}$$

Очевидным образом вводится также понятие ковариантного вектора $\tilde{A}$ (в декартовых координатах понятия конвариантного и ковариантного векторов фактически совпадают, а потому часто все значки пишут только снизу).

<u>Определение</u>. p раз ковариантный и q раз конвариантный тензор ранга $p + q \equiv n$ есть совокупность 3^n величин, которые при вращении системы координат преобразуются по закону

$$\varphi^{j'_1 \; \cdots \; j'_q}_{i'_1 \; \cdots \; i'_p} = \Omega^{i_1}_{i'_1} .. \Omega^{i_p}_{i'_p} \Omega^{j'_1}_{j_1} ... \Omega^{j'_q}_{j_q} \varphi^{j_1 \; \cdots \; j_q}_{i_1 \; \cdots \; i_p} \tag{17.12}$$

т.е. как произведение компонент p ковариантных и q контравариантных векторов.

Примеры.

1. Тензором нулевого ранга является скаляр.
2. Тензор первого ранга есть вектор.
3. Тензор второго ранга имеет 9 компонент a^i_j (или a_{ij}, или a^{ij})

со следующим законом их преобразования:

$$a_{i'}^{j'} = \Omega_{i'}^{i}\Omega_{j}^{j'}a_{i}^{j} \tag{17.13}$$

В множестве тензоров можно ввести определенные алгебраические операции, которые позволяют по заданным тензорам некоторые новые.

а). Если компоненты тензора $\varphi_{i_1 \; \cdots \; i_p}^{j_1 \; \cdots \; j_q}$ умножить на произвольное вещественное число λ, то мы получим новый тензор той же вариантности, называемый произведением исходного тензора на число:

$$\chi_{i_1 \; \cdots \; i_p}^{j_1 \; \cdots \; j_q} = \lambda\varphi_{i_1 \; \cdots \; i_p}^{j_1 \; \cdots \; j_q} \tag{17.14}$$

б). Если сложить компоненты двух тензоров $\varphi_{i_1 \; \cdots \; i_p}^{j_1 \; \cdots \; j_q}$ и $\psi_{i_1 \; \cdots \; i_p}^{j_1 \; \cdots \; j_q}$ и одинаковой вариантности, то получим тензор, называемый суммой исходных тензоров:

$$\chi_{i_1 \; \cdots \; i_p}^{j_1 \; \cdots \; j_q} = \varphi_{i_1 \; \cdots \; i_p}^{j_1 \; \cdots \; j_q} + \psi_{i_1 \; \cdots \; i_p}^{j_1 \; \cdots \; j_q} \tag{17.15}$$

в). Если перемножить компоненты двух тензоров $\varphi_{i_1 \; \cdots \; i_{p'}}^{j_1 \; \cdots \; j_{q'}}$ и $\psi_{k_1 \; \cdots \; k_{p''}}^{l_1 \; \cdots \; l_{q''}}$, то мы получим новый тензор, $p' + p''$ ковариантный и $q' + q''$ раз контравариантный, который называется произведением исходных тензоров:

$$\chi_{i_1 \; \cdots \; i_{p'} k_1 \; \cdots \; k_{p''}}^{j_1 \; \cdots \; j_{q'} l_1 \; \cdots \; l_{q''}} = \varphi_{i_1 \; \cdots \; i_{p'}}^{j_1 \; \cdots \; j_{q'}} \psi_{k_1 \; \cdots \; k_{p''}}^{l_1 \; \cdots \; l_{q''}} \tag{17.16}$$

г). Если взять тензор $\varphi_{i_1 \; \cdots \; i_p}^{j_1 \; \cdots \; j_q}$ с $p, q \geq 1$, положить один из верхних индексов равным одному из нижних индексов, то мы получим новый тензор, ранга, на две единицы меньше исходного. Этот тензор называется сверткой исходного по заданной паре индексов – например,

$$\chi_{i_1 \; \cdots \; i_{p-1}}^{j_1 \; \cdots \; j_{q-1}} = \varphi_{i_1 \; \cdots \; i_p i}^{j_1 \; \cdots \; j_q i} \tag{17.17}$$

д). Если у компонент тензора $\varphi_{i_1 \; \cdots \; i_p}^{j_1 \; \cdots \; j_q}$ произвести произвольные перестановки верхних индексов и нижних индексов, то получится новый тензор той же вариантности:

$$\chi_{i_1 \; \cdots \; i_p}^{j_1 \; \cdots \; j_q} = \varphi_{\mathcal{P}'\{i_1 \; \cdots \; i_p\}}^{\mathcal{P}''\{j_1 \; \cdots \; j_q\}} \tag{17.18}$$

Наличие операций (а) – (б) показывает, что множество тензоров фиксированной вариантности (p, q) образует линейное пространство – его размерность равна, очевидно, 3^n. Наличие операций (д) и (б) позволяет образовать из заданного тензора новые тензора, симметричные и антисимметричные по любой совокупности равнозначных (верхних либо нижних) индексов – в частности, по всем индексам. Заметим, что в рассматриваемом трехмерном случае максимальный ранг нетривиального полностью антисимметричного тензора только с верхними или только с нижними индексами равен 3. Действительно, уже у полностью антисимметричного тензора четвертого ранга по крайней мере два индекса совпадают, а значит в силу свойства антисимметрии все его компоненты обращаются в нуль.

Тензоры обладают следующими важными свойствами.

е). Свойство симметрии тензора по некоторой совокупности индексов есть инвариантное свойство.

ж). Свойство антисимметрии тензора по некоторой совокупности индексов есть инвариантное свойство.

з). Двойная свертка тензора, симметричного по паре индексов, с тензором, антисимметричным по соответствующей паре индексов, равна нулю.

и). Если величины $\varphi_{i_1\ \dots\ i_k\, ik+1\ \dots\ i_p}^{j_1\ \dots\ j_l\, j_{l+1}\ \dots\ j_q}\psi_{j_1\ \dots\ j_l\, m_1\ \dots\ m_{q-1}}^{i_1\ \dots\ i_k\, n_1\ \dots\ n_{p-1}}$ образуют тензор при любом тензоре $\psi_{\dots}^{\dots}$, то $\varphi_{\dots}^{\dots}$ также образует тензор.

Свойства (е) – (ж) показывают, что тензоры ранга n, симметричные или антисимметричные по некоторым совокупностям индексов, образует инвариантные полпространства в линейном пространстве всех тензоров данной вариантности. Относительно их размерностей можно сказать следующее.

к). Размерность подпространства полностью симметричных тензоров ранга n равна

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

л). Размерность подпространства тензоров ранга n, антисимметричных по какой-то паре индексов, равна 3^{n-1}, а антисимметричных по тройке индексов 3^{n-3}; если же антисимметрия имеет место по четырем или большему числу индексов, то размерность соответствующего подпространства равна единице (все компоненты подобных тензоров обращаются в нуль).

Докажем для примера свойства (г), (е) и (а).

(г).

$$\chi_{i_1'\ \dots\ i_{p-1}'}^{j_1'\ \dots\ j_{q-1}'} \equiv \varphi_{i_1'\ \dots\ i_{p-1}'\, i'}^{j_1'\ \dots\ j_{q-1}'\, i'} = \Omega_{i_1'}^{i_1}\dots\Omega_{i_{p-1}'}^{i_{p-1}}\underline{\Omega}_{i'}^{i_p}\Omega_{j_1}^{j_1'}\dots\Omega_{j_{q-1}}^{j_{q-1}'}\underline{\Omega}_{j_1}^{i'}\varphi_{i_1\ \dots\ i_p}^{j_1\ \dots\ j_q} =$$

$$= \Omega_{i_1'}^{i_1}\dots\Omega_{i_{p-1}'}^{i_{p-1}}\Omega_{j_1}^{j_1'}\dots\Omega_{j_{q-1}}^{j_{q-1}'}\delta_{j_q}^{i_p}\varphi_{i_1\ \dots\ i_p}^{j_1\ \dots\ j_q} = \Omega_{i_1'}^{i_1}\dots\Omega_{i_{p-1}'}^{i_{p-1}}\Omega_{j_1}^{j_1'}\dots\Omega_{j_{q-1}}^{j_{q-1}'}\varphi_{i_1\ \dots\ i_{p-1}i}^{j_1\ \dots\ j_{q-1}i} =$$

$$= \Omega_{i_1'}^{i_1}\dots\Omega_{i_{p-1}'}^{i_{p-1}}\Omega_{j_1}^{j_1'}\dots\Omega_{j_{q-1}}^{j_{q-1}'}\chi_{i_1\ \dots\ i_{p-1}}^{j_1\ \dots\ j_{q-1}}$$

(е).

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{i_1'i_2'\dots} &= \Omega_{i_1'}^{i_1}\Omega_{i_2'}^{i_2}\dots\varphi_{i_1,i_2\dots} \\ \varphi_{i_2'i_1'\dots} &= \Omega_{i_2'}^{i_2}\Omega_{i_1'}^{i_1}\dots\varphi_{i_2i_1\dots} \end{aligned}\right\} -$$

$$\varphi_{i_1'i_2'\dots} - \varphi_{i_2'i_1'\dots} = \Omega_{i_1'}^{i_1}\Omega_{i_2'}^{i_2}\dots\left(\varphi_{i_1,i_2\dots} - \varphi_{i_2i_1\dots}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_{i_1'i_2'} - \varphi_{i_2'i_1'}$$

$$\left(\varphi_{i_1,i_2\dots} = \varphi_{i_2i_1\dots}\right)$$

(з). Для доказательства этого свойства достаточно ограничиться тензорами второго ранга. Имеем:

$$\left.\begin{array}{r}\varphi_{ij}=\varphi_{ji}\\ \psi^{ij}=-\psi^{ji}\end{array}\right\}\Rightarrow \varphi_{ij}\psi^{ij}=-\varphi_{ij}\psi^{ji}=-\varphi_{ji}\psi^{ji}=-\varphi_{ij}\psi^{ij}=0$$

Сформулируем, наконец, без доказательства еще одно свойство тензоров, указывающее на определенную их «универсальность».

м). Всякое представление группы вращений $SO(3)$ является одним из тензорных представлений.

Напомним, что представлением T группы G называется отображение $g\to T(g)$ ее элементов g в множество линейных операторов $T(g)$, действующих в некотором линейном пространстве векторов φ, которое обладает основным свойством

$$T(g_1g_2)=T(g_1)T(g_2) \tag{17.19}$$

В нашем случае роль соответствующих линейных пространств играют пространства тензоров заданной вариантности, а роль операторов $T(g)$ - композиции матриц Ω и $\tilde{\Omega}$ в надлежащем их числе.

Среди всех тензоров выделенную роль играют <u>инвариантные тензоры ,</u> из которых независимыми в группе $SO(3)$ являются два: - символ Кронекера δ_i^j, отвечающий неизменности длины, и символ Леви-Чевита $\mathcal{E}_{ijk}$ или обратный ему $\mathcal{E}^{ijk}$, отвечающий инвариантности объема. Последний антисимметричен по любой паре индексов и нормирован условием $\mathcal{E}_{123}=+1$. Таким образом, его нетривиальные компоненты равны

$$\mathcal{E}_{123}=\mathcal{E}_{312}=\mathcal{E}_{231}=+1,\quad \mathcal{E}_{213}=\mathcal{E}_{321}=\mathcal{E}_{132}=-1 \tag{17.20}$$

Инвариантность символа Кронекера следует из сохранения скалярного произведения двух векторов:

$$\left(\vec{A},\vec{B}\right)=a_ib^i=\delta_i^ja^ib_j$$

и из свойства (и). Инвариантность символа Леви-Чевита вытекает из сохранения объема, точнее смешанного произведения трех векторов (17.10), которое, как нетрудно сообразить, можно представить в форме

$$\vec{A}\vec{B}\vec{C}=\mathcal{E}_{ijk}a^ib^ic^k \tag{17.21}$$

Инвариантным также является тензор δ_{ij} и обратный ему δ^{ij}. Они играют роль <u>метрических тензоров</u> в $\mathbb{R}^3$ и в $\tilde{R}^3$ соответственно, ибо длины радиусов-векторов выражаются через них как

$$X^2\equiv\tilde{X}X=x_ix^i=x^i\delta_{ij}x^j=x_i\delta^{ij}x_j \tag{17.22}$$

Очевидно, что эти тензоры осуществляют переход от пространства $\mathbb{R}^3$ к сопряженному ему и наоборот, позволяя опускать и поднимать индексы:

$$x_i = \delta_{ij} x^j \quad \text{и} \quad x^i = \delta^{ij} x_j \tag{17.23}$$

Инвариантность двух основных тензоров δ_i^j и $\mathcal{E}_{ijk}$ легко проверяется и непосредственно. Действительно, имеем

$$\delta_{i'}^{j'} = \Omega_{i'}^{i} \Omega_{j}^{j'} \delta_i^j = \Omega_{i'}^{i} \Omega_{i}^{j'} = \left(\tilde{\Omega}\Omega\right)_{i'}^{j'} = \delta_{i'}^{j'}$$

Для единственной же нетривиальной компоненты символа Леви-Чевита получаем

$$\mathcal{E}_{1'2'3'} = \Omega_{1'}^{i} \Omega_{2'}^{j} \Omega_{3'}^{k} \mathcal{E}_{ijk} = \pm \sum_{i \neq j \neq k} \Omega_{1'}^{i} \Omega_{2'}^{j} \Omega_{3'}^{k} = \det \Omega = +1 = \mathcal{E}_{123} \ ,$$

где использовано определение детерминанта матрицы.

Символ Леви-Чевита обладает следующим чрезвычайно важным свойством

$$\mathcal{E}_{ijk} \mathcal{E}^{imn} = \delta_j^m \delta_k^n - \delta_j^n \delta_k^m \tag{17.24}$$

Доказывается оно путем привлечения соображений инвариантности и рассмотрения двух наиболее простых частных случаев. Производя в (17.24) свертку по индексам j и m получим

$$\mathcal{E}_{ijk} \mathcal{E}^{ijn} = 2\delta_k^n \equiv 2!\, \delta_k^n \tag{17.25}$$

Свертывая обе части (17.25) по оставшейся паре индексов, будем считать

$$\mathcal{E}_{ijk} \mathcal{E}^{ijk} = 6 \equiv 3! \tag{17.26}$$

& 18.Псевдотензоры.

Перейдем теперь от рассмотрения группы собственных вращений $SO(3)$ к анализу представлений полной ортогональной группы $O(3)$. Как мы видели, они есть прямое произведение $SO(3)$ на группу пространственной инверсии $\mathcal{P}_i$ с элементами e и J, где

$$J_i^j = -\delta_i^j \tag{18.1}$$

В теории групп показывается, что все представления прямого произведения двух групп исчерпываются тензорными произведениями групп-сомножителей. Термин «тензорное произведение» представлений требует разъяснения, но в нашем случае его смысл будет совершенно прозрачен....

Итак, при переходе от SO(3) к O(3) достаточно проанализировать поведение тензоров лишь относительной пространственной инверсии J с матрицей (18.1).

Очевидно, что у группы $\mathcal{P}_i$, как и вообще у всякой группы, имеется тривиальное представление , сводящееся к умножению всех величин просто ' на $+1$. В связи с этим возникает следующее понятие.

<u>Определение 1.</u> Тензором группы $O(3)$ называется совокупность величин $\varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$, которые при преобразованиях из группы $O(3)$ преобразуются по закону (17.12).

<u>Теорема.</u> При пространственной инверсии компоненты тензоров четного ранга не меняются, а нечетного ранга – меняют свой знак.

Доказательство

$$\varphi^{j'_1 \dots j'_q}_{i'_1 \dots i'_p} = J^{i_1}_{i'_1} \dots J^{i_p}_{i'_p} J^{j'_1}_{j_1} \dots J^{j'_q}_{j_q} \varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = (-1)^p (-1)^q \delta^{i_1}_{i'_1} \dots \delta^{i_p}_{i'_p} \delta^{j'_1}_{j_1} \dots \delta^{j'_q}_{j_q} \varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = (-1)^n \varphi^{j'_1 \dots j'_q}_{i'_1 \dots i'_p}$$

В частности, скаляр является абсолютным инвариантом, компоненты вектора меняют знак, компоненты тензора второго ранга не меняются, компоненты тензора третьего ранга изменяют знак и т.д.

Группа $\mathcal{P}_i$ есть конечная группа, состоящая из двух взаимно коммутирующих элементов e и J. В теории групп показывается, что в такой ситуации имеется всего два неприводимых представления, которые оба одномерны (сводятся к умножению на число), причем первое из них тривиальное и было уже учтено. еще имеется всего лишь одна возможность, отвечающая антисимметричному представлению группы, т.е. умножению всех величин на -1. Отсюда следующее понятие.

<u>Определение 2.</u> Псевдотензором группы $O(3)$ называется совокупность величин $\varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$, которые при собственных вращениях преобразуются по закону (17.12), но при несобственных вращениях приобретают дополнительный фактор -1.

Иными словами, закон преобразования псевдотензора имеет вид

$$\varphi^{j'_1 \dots j'_q}_{i'_1 \dots i'_p} = \Omega^{i_1}_{i'_1} \dots \Omega^{i_p}_{i'_p} \Omega^{j'_1}_{j_1} \dots \Omega^{j'_q}_{j_q} \varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \det \Omega \qquad (18.2)$$

Таким образом, при инверсии компоненты псевдотензора умножаются на $(-1)^{n+1}$, т. е. при инверсии компоненты псевдотензора четного ранга изменяют знак, а нечетного ранга – не меняются (ситуация противоположна случаю тензоров). В частности, при инверсии псевдоскаляр меняет знак, компоненты псевдовектора (или аксиального вектора) не меняются, компоненты псевдотензора второго ранга меняют знак, компоненты псевдотензора третьего ранга неизменны и т.д.

Символ Леви-Чевита по самому своему определению инвариантен относительно всех ортогональных преобразований, а потому он есть антисимметричный псевдотензор третье го ранга. В рассматриваемом контексте символы $\mathcal{E}_{ijk}$ и $\mathcal{E}^{ijk}$ весьма важны, так как любой псевдотензор можно представить в виде некоторого их произведения со свертками на истинный тензор.

Определение. Говорят, что псевдотензор, полученный путем максимального свертывания символа Леви-Чевита с данным тензором, :дуален последнему.

Примеры.

1. Величина

$$\tilde{\varphi} = \mathcal{E}_{ijk}\varphi^{ijk} = \frac{1}{6}\mathcal{E}_{ijk}\varphi^{[ijk]} \tag{18.3}$$

является псевдоскаляром. Частный случай – смешанное произведение

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \mathcal{E}_{ijk}a^i b^j c^k = \frac{1}{6}\mathcal{E}_{ijk}a^{[i}b^j c^{k]} \tag{18.4}$$

задающее объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

2. Величины

$$\tilde{\varphi}_i = \mathcal{E}_{ijk}\varphi^{jk} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijk}\varphi^{[jk]} \tag{18.5}$$

Образуют псевдовектор (аксиальный вектор). Частный случай – векторное произведение

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right]_i = \mathcal{E}_{ijk}a^j b^k = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijk}\left(a^j b^k - a^k b^j\right) \tag{18.6}$$

3. Величины

$$\tilde{\varphi}_{ijk} = \mathcal{E}_{ijk}\varphi \tag{18.7}$$

Образуют антисимметричный псевдотензор третьего ранга с одной нетривиальной компонентой $\tilde{\varphi}_{123} = \mathcal{E}_{123}\varphi$, являющейся скаляром. Частный случай – сам символ Леви-Чевита $(\varphi = 1)$.

Операция дуализации применима и к псевдотензорам – при этом возникают обычные тензоры.

4. Величины

$$\varphi_{ijk} = \mathcal{E}_{ijk}\tilde{\varphi} \tag{18. 8}$$

образуют антисимметричный тензор третьего ранга с единственной нетривиальной компонентой $\varphi_{123} = \mathcal{E}_{123}\tilde{\varphi}$, являющейся псевдоскаляром.

Из этого и первого примеров видно, что элемент объема в $\mathbb{R}^3$ можно задавать или антисимметричным тензором третьего ранга dS^{ijk} или дуальным ему (псевдо) скаляром $d\tau$. Это замечание будет чрезвычайно существенным при построении тензорной алгебры в рамках специальной теории относительности, основной группой которой является четырехмерная псевдо-ортогональная группа $O(1,3)$.

5. Величины

$$\varphi_{ij} = \mathcal{E}_{ijk}\tilde{\varphi}^{k} \tag{18. 9}$$

Образуют антисимметричный тензор второго ранга, дуальный к псевдовектору $\tilde{\vec{\varphi}}$. Если поднять один из его индексов с помощью метрического тензора / см. (17. 23)/, то придем к матрице

$$\varphi_i^j = \delta^{jk}\varphi_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\varphi}_z & -\tilde{\varphi}_y \\ -\tilde{\varphi}_z & 0 & \tilde{\varphi}_x \\ \tilde{\varphi}_y & -\tilde{\varphi}_x & 0 \end{pmatrix} \tag{18. 10}$$

В частности, векторному произведению дуален антисимметричный тензор

$$\varphi_{ij} = \mathcal{E}_{ijk}\left[\vec{a}\vec{b}\right]^k = a_i b_j - a_j b_i \tag{18. 11}$$

Действительно,

$$\mathcal{E}_{ijk}\left[\vec{a}\vec{b}\right]^k = \mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}^{klm}a_l b_m = \mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}^{lmk}a_l b_m = \left(\delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l\right)a_l b_m = a_i b_j - a_j b_i$$

6. Антисимметричному псевдотензору третьего ранга дуален скаляр

$$\mathcal{E}_{ijk}\tilde{\varphi}^{ijk} = \mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}^{ijk}\varphi = 3!\varphi \tag{18. 12}$$

В частности, согласно (17.26), символу Леви-Чевита дуально число 6.

§19. Свойства тензоров второго ранга.

Рассмотрим тензоры второго ранга, которые после скаляров и векторов играют в физических приложениях: наиболее важную роль. Начнем для определенности с тензора φ_{ij}, два раза ковариантного

Он инвариантным образом разбивается на симметричную и антисимметричную части:

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\varphi_{ij} + \varphi_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(\varphi_{ij} - \varphi_{ji}\right) \equiv S_{ij} + A_{ij} \qquad (19.\ 1)$$

Выясним геометрический смысл антисимметричной части A_{ij}, для чего воспользуемся тождеством

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}^{kmn}A_{mn} \qquad (19.\ 2)$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}^{kmn}A_{mn} = \frac{1}{2}\left(\delta_i^m\delta_j^n - \delta_i^n\delta_j^m\right)A_{mn} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right) = A_{ij}$$

Это тождество позволяет записать тензор A_{ij} в виде

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijk}\tilde{a}^k \qquad (19.\ 3)$$

где $\tilde{\vec{a}}$ - псевдовектор, дуальный к A_{ij}:

$$\tilde{a}^k = \mathcal{E}^{kmn}A_{mn} \qquad (19.\ 4)$$

Если рассматривать теперь A_{ij} как матрицу линейного преобразования

$$y^i = A_{ij}x^j$$

то последнее, с точностью до тривиального множителя, сведется к векторному умножению произвольного вектора $\vec{x}$ на псевдовектор $\tilde{\vec{a}}$.

$$\vec{y} = \frac{1}{2}\left[\vec{x}, \tilde{\vec{a}}\right] \tag{19. 5}$$

Действительно,

$$y^i = A_{ij}x^j = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijk}\tilde{a}^k x^j = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijk}x^j\tilde{a}^k = \frac{1}{2}\left[\vec{x}, \tilde{\vec{a}}\right]_i$$

Геометрический смысл симметричной части. Состоит в том, что она однозначным образом задает некоторую центральную поверхность второго порядка:

$$S_{ij}x^i x^j = \pm 1 \tag{19. 6}$$

(если бы слева стоял антисимметричный тензор A_{ij}, то квадратичная форма тождественно обращалась бы в нуль). Квадратичную форму слева подходящим преобразованием системы координат всегда можно диагонализовать, т.е. Привести к каноническому виду. В зависимости от ее сигнатуры уравнение определяет или эллипсоид, или однополостный гиперболоид, или двуполостный гиперболоид.

Из симметричного тензора можно выделить еще одну ковариантную часть, соответствующую скаляру:

$$S_{ij} = \left(S_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}S_k^k\right) + \frac{1}{3}\delta_{ij}S_k^k \equiv \hat{S}_{ij} + \delta_{ij}S \tag{19. 7}$$

где

$$S_m^n = \delta^{nl}S_{lm} \tag{19. 8}$$

Смысл такого разбиения состоит в том, что след тензора $\hat{S}_{ij}$ равен нулю, причем понимается это утверждение следующим образом:

$$\hat{S}_k^k = 0 \tag{19. 9}$$

где один из индексов поднят по формуле (19.8).

В теории групп разбиение произвольного тензора второго ранга φ на инвариантные части $\hat{S}_{ij}$, A_{ij} и $\delta_{ij}S$ соответствует разложению 9-мерного тензорного представления группы вращений на неприводимые представления размерностей 5 (симметричный тензор с нулевым шпуром), 3 (антисимметричный тензор или вектор) и 1 (скаляр).

Из каждого тензора второго ранга с помощью инвариантных символов δ и ε можно образовать три (и только три) независимых инварианта. Мы их выпишем для смешанного тензора φ_i^j, а в остальных случаях они будут получаться путем предварительного поднятия или опускания одного из индексов. Вот эти инварианты:

$$I_1 = \delta_i^j \varphi_j^i \equiv \varphi_i^i \equiv \mathrm{Sp}(\varphi) = \varphi_1^1 + \varphi_2^2 + \varphi_3^3 \tag{19.10}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}^{imn}\varphi_m^j\varphi_n^k = \begin{vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_2^2 & \varphi_3^2 \\ \varphi_2^3 & \varphi_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_3^1 \\ \varphi_1^3 & \varphi_3^3 \end{vmatrix} \tag{19.11}$$

$$I_3 = \frac{1}{6}\mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}^{lmn}\varphi_l^i\varphi_m^j\varphi_n^k = \begin{vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 & \varphi_3^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 & \varphi_3^2 \\ \varphi_1^3 & \varphi_2^3 & \varphi_3^3 \end{vmatrix} \tag{19.12}$$

Следует обратить внимание на последнее выражение, которое дает нам инвариантный способ записи детерминанта квадратной матрицы порядка 3×3. Она допускает очевидное обобщение на случай произвольной квадратной матрицы $n\times n$ - здесь символы $\mathcal{E}$ следует снабдить n значками и взять n надлежащих сомножителей φ.

Указанные инварианты можно получить следующим простым способом, допускающим обобщение на пространства $\mathbb{R}^n$ с любым n. Запишем для матрицы φ характеристический многочлен

$$\mathcal{P}_3(\lambda) = \left|\varphi_i^j - \lambda\delta_i^j\right| \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{19.13}$$

В силу инвариантного определения детерминанта (19.12) он не зависит от выбора системы координат, т.е. Является инвариантным. Раскроем детерминант и возьмем коэффициенты при разных степенях λ - они и будут искомыми инвариантами. В многочлене $\mathcal{P}_3(\lambda)$ имеется 4 коэффициента, один из которых (при λ^3) равен 1, - получаем как раз 3 инварианта. В частности, полагая в (19.13) λ=0, сразу получим инвариант (19.12).

Заметим, что имеется еще один очевидный инвариант

$$I = \varphi_i^j \varphi_j^i \tag{19.14}$$

Он выражается через первые два. Действительно,

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\delta_i^m \delta_k^n - \delta_j^n \delta_k^m\right) \varphi_m^j \varphi_n^k = \frac{1}{2}\left(\varphi_m^m \varphi_n^n - \varphi_m^n \varphi_n^m\right) = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - I\right)$$

Откуда

$$I = I_1^2 - 2I_2 \tag{19.15}$$

Отметим также, что для антисимметричного тензора I_1 =0. В частности для него мы имеем

$$I_2 = -\frac{1}{2} I = -\frac{1}{2}\varphi_i^j \varphi_j^i = \frac{1}{2}\varphi_{ij}\varphi^{ij} \tag{19.16}$$

§20. Основные понятия тензорного анализа.

Если в каждой точке $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ задан тензор вариантности (p,q), то говорят, что мы имеем тензорное поле $\varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}(\vec{r})$. Понятия непрерывности и дифференцируемости тензорного поля определяются покомпонентно. Из заданного тензорного поля можно построить ряд других тензорных полей. Основным при этом является дифференциальный оператор «набла»:

$$\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \partial_i \tag{20.1}$$

Рассмотрим наиболее важные случаи, имея в виду, что дифференцирование по координате с верхним (нижним) индексом равнозначно появлению дополнительного нижнего (верхнего) индекса, что отражено уже в (20.1).

1. <u>Градиент</u> тензорного поля φ определяется как тензор ранга $n+1$:

$$\left(\mathrm{grad}\ \varphi\right)_{i_1 \ \dots \ i_p}^{j_1 \ \dots \ j_q} = \nabla_i \varphi_{i_1 \ \dots \ i_p}^{j_1 \ \dots \ j_q} = \frac{\partial \varphi_{i_1 \ \dots \ i_p}^{j_1 \ \dots \ j_q}}{\partial x^i} \tag{20.2}$$

Наиболее важный частный случай дает градиент скалярного поля:

$$\left(\mathrm{grad}\ \varphi\right)_i = \nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \tag{20.3}$$

2. <u>Дивергенции</u> тензорного поля φ вводятся как тензоры ранга $n-i$:

$$\left(\mathrm{div}\ \varphi\right)_{i_1 \ \dots \ i_p}^{j_1 \ \dots \ j_{\alpha-1} j_{\alpha+1} \ \dots \ j_q} = \nabla_i \varphi_{i_1 \ \dots \ i_p}^{j_1 \ \dots \ j_{\alpha-1}\, i\, j_{\alpha+1} \ \dots \ j_q} = \frac{\partial \varphi_{i_1 \ \dots \ i_p}^{j_1 \ \dots \ j_{\alpha-1}\, i\, j_{\alpha+1} \ \dots \ j_q}}{\partial x^i} \tag{20.4}$$

Произвольному тензорному полю ранга n отвечает n различных дивергенций, а потому нужно следить за расположением индексов. Определение (20.4) однозначно лишь при условии симметрии исходного тензора. Наиболее важные частные случаи – дивергенция векторного поля

$$\left(\mathrm{div}\ \vec{a}\right) = \nabla_i a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} = \left(\vec{\nabla}, \vec{a}\right) \tag{20.5}$$

И дивергенция симметричного тензора второго ранга:

$$\left(\mathrm{div}\ S\right)^j = \nabla_i S^{ij} = \frac{\partial S^{ij}}{\partial x^i} \tag{20.6}$$

3. Тензорному полю φ можно сопоставить псевдотензорные поля того же ранга – <u>роторы:</u>

$$\left(\mathrm{rot}\ \varphi\right)_{i_1 \ \dots \ i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \ \dots \ i_p}^{j\, j_1 \ \dots \ j_q} = \mathcal{E}^{jkl} \frac{\partial \varphi_{i_1 \ \dots \ i_{\alpha-1}\, l\, i_{\alpha+1} \ \ \ i_p}^{j_1 \ \dots \ j_q}}{\partial x^k} \tag{20.7}$$

Разберем это определение для наиболее важного случая – для ротора векторного поля.

Естественнее всего ротор векторного поля определить как антисимметричный тензор второго ранга:

$$\left(\mathrm{Rot}\ \vec{a}\right)^{ij} = \nabla^i a^j - \nabla^j a^i = \frac{\partial a^j}{\partial x_i} - \frac{\partial a^i}{\partial x_j} \tag{20.8}$$

Как это и делается в сто, где основным пространством является $\mathbb{R}^4$. Однако в случае $\mathbb{R}^3$ такой тензор эквивалентен псевдовектору, и под ротором обычно понимают величину, дуальную к (20.8):

$$\left(\mathrm{rot}\ \vec{a}\right)_k = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{kij}\left(\mathrm{Rot}\ \vec{a}\right)^{ij} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{kij}\left(\frac{\partial a^j}{\partial x_i} - \frac{\partial a^i}{\partial x_j}\right) = \mathcal{E}_{kij}\frac{\partial a^j}{\partial x_i}$$

Или

$$\left(\mathrm{rot}\ \vec{a}\right)^i = \mathcal{E}^{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x^j} \tag{20.9}$$

4. Для тензорных полей имеют место интегральные теоремы, аналогичные тем, которые доказываются в векторном анализе. В частности, справедлива обобщенная теорема Гаусса-Остроградского

$$\oint_\Sigma \varphi^{j_1\ \dots\ j_q}_{i_1\ \dots\ i_{p-1} i}\, dS^i = \int_V \frac{\partial \varphi^{j_1\ \dots\ j_q}_{i_1\ \dots\ i_{p-1} i}}{\partial x^i_i}\, d\tau \tag{20.10}$$

В двух наиболее простых и важных частных случаях она дает:

$$\oint_\Sigma\left(\vec{a}, d\vec{S}\right) = \oint_\Sigma a_i d\vec{S}^i = \int_V \frac{da_i}{dx_i} d\tau = \int \mathrm{div}\ \vec{a}\ d\tau \tag{20.11}$$

и

$$\oint_\Sigma \varphi_{ij} dS^j = \int_V \frac{d\varphi_{ij}}{dx_j} d\tau \tag{20.12}$$

Справедливы также утверждения, аналогичные теореме стокса, но пока они нам не потребуются. На анализе этих проблем мы еще остановимся при описании математического аппарата СТО.

§21. Примеры вычислений.

1. Раскроем прямое векторное произведение:

$$\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right] = \mathcal{E}_{ijk}a^j\left[\vec{b}\vec{c}\right]^k = \mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}^{kmn}a^jb_mc_n = \left(\delta_i^m\delta_j^n - \delta_i^n\delta_j^m\right)a^jb_mc_n =$$
$$= b_i\left(a^jc_j\right) - c_i\left(a^jb_j\right) = b_i\left(\vec{a}\vec{c}\right) - c_i\left(\vec{a}\vec{b}\right)$$

2. Найдем дивергенцию от ротора векторного поля:

$$\text{div rot }\vec{a} = \frac{\partial\left[\vec{a}\vec{b}\right]_i}{\partial x_i} = \mathcal{E}_{ijk}\frac{\partial\left(\dfrac{\partial a_k}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i} = \mathcal{E}_{ijk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i x_j} = 0\ ,$$

где на последнем этапе учтено равенство нулю свертки симметричного тензора с антисимметричным.

3. Раскроем дивергенцию векторного произведения:

$$\text{div }\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \frac{\partial\left[\vec{a}\vec{b}\right]_i}{\partial x_i} = \mathcal{E}_{ijk}\frac{\partial\left(a^jb^k\right)}{\partial x_i} = \mathcal{E}_{ijk}b^k\frac{\partial a^j}{\partial x_i} - \mathcal{E}_{ijk}a^j\frac{\partial b^k}{\partial x^i} =$$
$$= b^k\mathcal{E}_{ijk}\frac{\partial a^j}{\partial x_i} - a^j\mathcal{E}_{kij}\frac{\partial b^k}{\partial x^i} = b^k\left(\text{rot }\vec{a}\right)_k - a^j\left(\text{rot }\vec{b}\right)_j =$$
$$= \left(\vec{b}, \text{rot }\vec{a}\right) - \left(\vec{a}, \text{rot }\vec{b}\right)$$

Задачи

1. Доказать, что всякий тензор преобразуется по некоторому представлению группы $O(3)$.
2. Доказать свойства (а) – (л) из §17.

3. Доказать основное свойство (17.24) символа Леви-Чевита.
4. Пользуясь тензорным формализмом, доказать соотношения:

   a) $\left(\left[\vec{a}\vec{b}\right],\left[\vec{c}\vec{d}\right]\right)=\left(\vec{a}\vec{c}\right)\left(\vec{b}\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\vec{d}\right)\left(\vec{b}\vec{c}\right)$;

   b) $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\ \varphi=0$;

   c) $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \vec{a}=\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \vec{a}-\nabla^2\vec{a}$;

   d) $\mathrm{grad}\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\left[\vec{a},\mathrm{rot}\ \vec{b}\right]+\left[\vec{b},\mathrm{rot}\ \vec{a}\right]+\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)\vec{b}+\left(\vec{b},\vec{\nabla}\right)\vec{a}$

5. Для тензора второго ранга мы имели разложение

$$\varphi_{ij}=S_{ij}+A_{ij}\equiv\frac{1}{2}\left(\varphi_{ij}+\varphi_{ji}\right)+\frac{1}{2}\left(\varphi_{ij}-\varphi_{ji}\right)$$

Доказать, что в общем случае для тензора третьего ранга

$$\varphi_{ijk}\neq S_{ijk}+A_{ijk}$$

Доказательство

Пусть

$$\varphi_{ijk}=S_{ijk}+A_{ijk}$$

тогда

$$\varphi_{jki}=S_{jki}+A_{jki}=S_{ijk}+A_{ijk}=\varphi_{ijk}$$

Но, в общем случае это не так. Полученное равенство еще не является необходимым. Должно выполняться также следующее условие:

$$\varphi_{jik}=S_{jik}+A_{jik}=S_{ijk}-A_{ijk}$$

§22. Динамика частицы

В качестве простого приложения тензорного исчисления чуть переформулируем уравнения классической динамики материальной точки.

второй закон Ньютона $m\vec{a}=\vec{F}$ в компонентах записывается как

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2}=F^i \quad \text{или} \quad m\frac{dv^i}{dt}=F^i\ , \tag{22.1}$$

Откуда сразу видна его ковариантность по отношению к преобразованиям из группы $O(3)$. Если силовое поле потенциально, то

$$\vec{F}=-\text{grad } u \quad \text{или} \quad F^i=-\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{22.2}$$

Умножая обе части (22.1) на v_j и свертывая по индексам, получим

$$m\frac{dv^i}{dt}V_i\equiv\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^i}{2}v^i\right)\equiv\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2}=F^iv_i\equiv\left(\vec{F}\vec{v}\right)$$

Т.е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\left(F,\vec{v}\right)\equiv\left(\vec{F},\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \tag{22.3}$$

Вводя кинетическую энергию частицу $T=\frac{mv^2}{2}$ и элементарную работу силы $dA=\left(\vec{F},d\vec{r}\right)$, придем к теореме живых сил.

$$dT=dA \tag{22.4}$$

Инвариантной относительно ортогональных преобразований. Для потенциального стационарного поля сил из (22.4) и (22.2) имеем

$$dT=dA=F^idx_i=-\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i=-du$$

Откуда следует закон сохранения энергии:

$$d\left(T+u\right)=0\ \Rightarrow T+u=\text{const} \tag{22.5}$$

умножая уравнение (22.1) с индексом k на координату x^j, умножая затем то же уравнение с индексом j на x^k и производя вычитание, получим

$$mx^j\frac{dv^k}{dt}-mx^k\frac{dv^j}{dt}=x^jF^k-x^kF^j$$

Или, после вынесения произвольной по времени,

$$\frac{d}{dt}\left\{x^j\left(mv^k\right)-x^k\left(mv^j\right)\right\}=x^jF^k-x^kF^j \tag{22.6}$$

Чтобы выяснить смысл этого результата, свернем обе части (22.6) с символом $\mathcal{E}_{ijk}$:

$$\frac{d}{dt}\left\{\mathcal{E}_{ijk}\left(x^jmv^k-x^kmv^j\right)\right\}=\mathcal{E}_{ijk}\left(x^jF^k-x^kF^j\right)$$

Вспоминая определение векторного произведения, придем к теореме об изменении момента импульса частицы:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r},m\vec{v}\right]=\left[\vec{r},\vec{F}\right] \tag{22.7}$$

§23. Уравнения движения жидкости

Рассматриваем движение жидкости в области, где отсутствует ее источники и стоки. Тогда закон сохранения массы дает

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau=-\oint_\Sigma\left(\rho\vec{v},d\vec{S}\right)$$

Применяя теорему гаусса и пользуясь произвольностью области интегрирования, получаем уравнение непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt}+\operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right)=0 \tag{23.1}$$

В частности, для несжимаемой жидкости $\rho=\text{const}$, а потому

$$\operatorname{div}\vec{v}=0 \tag{23.2}$$

Второй закон Ньютона для малого элемента жидкости записывается в обычной форме:

$$\Delta m\cdot a^i=\Delta F^i \tag{23.3}$$

На выделенный объем действуют как обычные объемные силы (скажем гравитационные)

$$\Delta F^i_{об}=\int_{\Delta V} f^i d\tau \tag{23.4}$$

так и поверхностные силы со стороны окружающей жидкости. Для достаточно малого элемента поверхности можно считать, что сила пропорциональна его площади, так что в общем случае для поверхностной силы имеем

$$dF^{i}_{пов} = T^{ij} dS_{j} \tag{23.5}$$

Откуда

$$dF^{i}_{пов} = \oint\limits_{\Delta\Sigma} T^{ij} dS_{j} = \int\limits_{\Delta V} \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^{j}} d\tau \Rightarrow f^{i}_{пов} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^{j}} \tag{23.6}$$

так как $dF^{i}_{пов}$ и dS_{j} – векторы, то из (23.5) следует, что величины T^{ij} образуют тензор второго ранга, называемый <u>тензором напряжений</u>. В механике доказывается, что этот тензор симметричен:

$$T^{ij} = T^{ji} \tag{23.7}$$

(см. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Механика сплошных сред, стр. 642)

Для выяснения смысла тензора напряжений положим, что вектор $d\vec{S}$ параллелен оси $x_{i} \equiv x$, т.е., площадка перпендикулярна этой оси. Тогда получим

$$dF^{1} = T^{11} dS_{1}, \quad dF^{2} = T^{21} dS_{1}, \quad dF^{3} = T^{31} dS_{1} \tag{23.8}$$

Отсюда видно, что T^{ij} есть поверхностная сила, отнесенная к единице площадки и действующая в j -м направлении на площадку, перпендикулярную i -й оси.

Диагональные элементы тензора T^{ij} задают поверхностные силы растяжения и сжатия (нормальное давление), а недиагональные – силы сдвигов, т.е. Касательные напряжения, обусловленные вязкостью.

Подставляя теперь в (23.3) выражение для левой части

$$\Delta m \cdot a^{i} = \int\limits_{\Delta V} \rho a^{i} d\tau = \int\limits_{\Delta V} \rho \frac{dv^{i}}{dt} d\tau$$

И учитывая, что

$$\frac{dv^i}{dt}=\frac{\partial v^i}{\partial t}+\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}=\frac{\partial v^i}{\partial t}+\frac{\partial v^i}{\partial x^j}v^j=\frac{\partial v^i}{\partial t}+\left(\vec{v},\vec{\nabla}\right)v^i$$

А также силы (23.4) и (23.5), мы в силу произвольности объема интегрирования получим общее уравнение гидродинамики:

$$\frac{dv^i}{dt}+\left(\vec{v},\vec{\nabla}\right)v^i=\frac{1}{\rho}\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}+\frac{1}{\rho}f^i \tag{23.9}$$

По определению, в идеальной жидкости отсутствует трение, т.е. Касательные напряжения, поэтому в любой системе координат тензор напряжений должен быть диагональным. Но это возможно лишь в случае, когда он пропорционален символу Кронекера:

$$T^{ij}=-p\delta^{ij} \tag{23.10}$$

Величина p называется давлением. Знак минус указывает, что давление направлено внутрь элемента объема жидкости. Подставляя (23.10) в общее уравнение гидродинамики (23.9), получим уравнение Эйлера

$$\frac{d\vec{v}}{dt}+\left(\vec{v},\vec{\nabla}\right)\vec{v}=\frac{1}{\rho}\vec{f}-\frac{1}{\rho}\text{grad } p \tag{23.11}$$

Совместно с уравнением непрерывности (23.1) и с уравнением состояния вещества $p=f\left(\rho\right)$ оно полностью описывает движение идеальной жидкости.

В случае реальной жидкости следует учитывать наличие сил трения, которые приводят к появлению касательных напряжений. При прямолинейном течении жидкости вдоль оси $x_1\equiv x$ в плоскостях x_1x_2 возникает единственное касательное напряжение, которое дается эмпирическим законом Ньютона

$$T^{21}=\mu\frac{dv^1}{dx_2}=\mu\frac{dv_x}{dy} \tag{23.12}$$

На произвольный случай оно обобщается следующим образом:

> Компоненты тензора напряжений T^{ij} суть линейные функции градиента скорости $\frac{\partial v^i}{\partial x_j}$, которые в статике и в идеальной жидкости сводятся к нормальным давлениям.

Это положение, совместно со свойством симметричности тензора T^{ij}, задает его однозначным образом:

$$T^{ij} = -p\delta^{ij} + \mu\left(\frac{dv^i}{dx_j} + \frac{dv^j}{dx_i}\right) + \lambda\delta^{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \qquad (23.13)$$

Где эмпирические коэффициенты μ и λ называются коэффициентами вязкости – они являются константами, характеризующими жидкость.

Мы рассмотрим лишь случай несжимаемой жидкости, когда

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \equiv \operatorname{div}\,\vec{v} = 0$$

В этом случае (23.13) превращается в

$$T^{ij} = -p\delta^{ij} + \mu\left(\frac{dv^i}{dx_j} + \frac{dv^j}{dx_i}\right) \qquad (23.14)$$

Что дает

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = -\frac{\partial p}{\partial x^j}\delta^{ij} + \mu\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x_j} + \mu\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x_i} =$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x_j} + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^j}\right) = -\left(\operatorname{grad}\, p\right)^i + \mu\nabla^2 v^i$$

Подставляя это выражение в общее уравнение гидродинамики, придем к уравнению Навье-Стокса

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = \frac{1}{\rho}\vec{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\, p + \nu\nabla^2\vec{v} \qquad \left(\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}\right) \qquad (23.15)$$

Оно является основой анализа движения реальной жидкости, которому посвящены многочисленные физические и математические исследования – последние в особенности в связи с проблемой турбулентности.

Задачи

1. Вычислить момент сил, действующих на поверхность капли жидкости и сделать отсюда вывод о симметричности тензора напряжений.

Решение

Задаем момент сил не вектором (аксиальным), а антисимметричным тензором. Имеем:

$$M^{ik} = \int \left(F^i x^k - F^k x^i\right)\, d\tau = \int \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} x^k - \frac{\partial T^{kj}}{\partial x^j} x^i \right) d\tau =$$
$$= \int \frac{\partial}{\partial x^j}\left(T^{ij} x^k - T^{kj} x^i\right) d\tau - \int \left(T^{ij} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} - T^{kj} \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right) d\tau =$$
$$= \int \frac{\partial}{\partial x^j}\left(T^{ij} x^k - T^{kj} x^i\right) d\tau - \int \left(T^{ij}\delta^k_j - T^{kj}\delta^i_j\right) d\tau =$$
$$= \oint \left(T^{ij} x^k - T^{kj} x^i\right) dS_j - \underbrace{\int \left(T^{ik} - T^{ki}\right) d\tau}_{=0} \quad \Rightarrow \quad T^{ik} = T^{ki}$$

2. Получить с помощью «тяжелой артиллерии» формулу для гидростатического давления.

Решение

из общего уравнения динамики получаем условие равновесия

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} + f^i = 0$$

Граничное условие на свободной поверхности требует компенсации внешних и внутренних напряжений:

$$dF^i_0 = T^{ij}\Big|_{\overline{\Sigma}} dS_j$$

В жидкости имеются только нормальные напряжения:

$$T^{ij} = -p\delta^{ij}$$

Причем при наличии только поля тяжести

$$f^i = \rho g^i$$

Поэтому общие уравнения статики превращаются в

$$\left.\begin{aligned} -\operatorname{grad} p + \rho\vec{g} = 0 \\ -p_0\vec{n} = -p\big|_{\Sigma}\vec{n} \end{aligned}\right\}$$

Направляя ось z вниз и выбирая начало координат на поверхности, получаем задачу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dz} = \rho g \\ p\big|_{z=0} = p_0 \end{aligned}\right\}$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$p = \rho g z + c$$

Из граничного условия $c = p_0$, так что окончательно

$$p = p_0 + \rho g z$$

§ 24. Уравнения Максвелла в тензорной форме

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{24.1}$$

И перепишем их в тензорной форме. Такая процедура позволит сделать нам далеко идущие выводы.

ясно, что уравнения Максвелла ковариантны относительно группы вращений $SO(3)$. Кроме того, из самих определений напряженностей:

$$\vec{F}_e = e\vec{E}, \qquad \vec{F}_m = \frac{e}{c}\left[\vec{v}\vec{H}\right] \tag{24.2}$$

Явствует, что $\vec{E}$ - обычный вектор, но $\vec{H}$ - аксиальный вектор. Учитывая это обстоятельство, легко сразу убедиться в ковариантности уравнений (24.1) и относительно пространственной инверсии, т.е. Относительно полной ортогональной группы $O(3)$.

Однако удобнее от псевдовеличин перейти к обычным тензорам, для чего введем антисимметричный тензор второго ранга H^{ij}, дуальный аксиальному вектору $\vec{H}$:

$$H^{ij} = \mathcal{E}^{ijk} H_k = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y \\ -H_z & 0 & H_x \\ H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{24.3}$$

Начинаем переписывать уравнения Максвелла. Вспоминая определение ротора, имеем:

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{E}^{ijk} \dfrac{\partial H_k}{\partial x^j} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E^i}{\partial t} = \dfrac{4\pi}{c} j^i \\ \dfrac{\partial E^i}{\partial x^i} = 4\pi\rho \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} \mathcal{E}^{ijk} \dfrac{\partial E_k}{\partial x^j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H^i}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial H_k}{\partial x_k} = 0 \end{array}\right\} \tag{24.4}$$

С учетом (24.3) первое из уравнений принимает вид

$$\frac{\partial H^{ij}}{\partial x^j} - \frac{1}{c}\frac{\partial E^i}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j^i \tag{24.5}$$

Второе уравнение остается без изменений. Умножив третье на $\mathcal{E}_{mni}$, получим

$$\mathcal{E}_{mni}\mathcal{E}^{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x^j} + \frac{1}{c}\mathcal{E}_{mni}\frac{\partial H^i}{\partial t} = \left(\delta^j_m \delta^k_n - \delta^k_m \delta^j_n\right)\frac{\partial E_k}{\partial x^j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\left(\mathcal{E}_{mni} H^i\right)}{\partial t} =$$
$$= \left(\frac{\partial E_n}{\partial x^m} - \frac{\partial E_m}{\partial x^n}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial H_{mn}}{\partial t} = 0$$

или

$$\frac{\partial E^i}{\partial x_j}-\frac{\partial E^j}{\partial x_i}+\frac{1}{c}\frac{\partial H^{ij}}{\partial t}=0 \qquad (24.6)$$

Наконец, воспользовавшись тождеством (19.3)

$$H_{ij}=\frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijk}H^k$$

Перепишем последнее из уравнений (24.4) в виде

$$\frac{\partial H_k}{\partial x_k}=\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\mathcal{E}_{kij}H^{ij}\right)}{\partial x_k}=\frac{1}{2}\mathcal{E}_{kij}\frac{\partial H^{ij}}{\partial x_k}=\frac{\partial H^{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial H^{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial H^{ki}}{\partial x^j}=0 \qquad (24.7)$$

Собирая (24.5) – (24.7), придем к следующей записи уравнений Максвелла в тензорной форме:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H^{ij}}{\partial x^j}-\frac{1}{c}\frac{\partial E^i}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j^i\\ \frac{\partial E^i}{\partial x^i}=4\pi\rho\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial E^i}{\partial x_j}-\frac{\partial E^j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial H^{ij}}{\partial t}\\ \frac{\partial H^{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial H^{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial H^{ki}}{\partial x^j}=0\end{aligned}\right\} \qquad (24.8)$$

Откуда сразу очевидна их ковариантность по отношению к преобразованиям из полной ортогональности группы $O(3)$.

Покажем теперь, что в действительности уравнения Максвелла обладают более широкой группой инвариантности, чем $O(3)$. Для этого введем пока чисто формально 4-мерное пространство векторов

$$x^r=\left(x^1,x^2,x^3;x^4\right)=\left(x,y,z;\ ict\right)_1 \qquad (24.9)$$

(греческие индексы пробегают значения от 1 до 4, а латинские – от 1 до 3). Кроме того, введем 4-рядную квадратную матрицу

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}=F^{\mu\nu} \tag{24.10}$$

Она содержит все компоненты напряженностей и обобщает матрицу (24.3), включающую только магнитное поле. В новых обозначениях уравнения (24.8) переписываются как

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j}+\frac{\partial F^{i4}}{\partial x^4}\equiv\frac{\partial F^{i\nu}}{\partial x^\nu}=\frac{4\pi}{c}j^i \\ &\frac{\partial F^{4i}}{\partial x^i}\equiv\frac{\partial F^{4\nu}}{\partial x^\nu}=4\pi(-i\rho) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial F^{ij}}{\partial x_4}+\frac{\partial F^{j4}}{\partial x_i}+\frac{\partial F^{4i}}{\partial x_j}=0 \\ &\frac{\partial F^{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial F^{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial F^{ki}}{\partial x_j}=0 \end{aligned}\right\} \tag{24.11}$$

Если ввести «4-мерный ток»

$$j^\mu=\left(j^1,j^2,j^3;j^4\right)\equiv\left(j_x,j_y,j_z;\ ic\rho\right) \tag{24.12}$$

То окончательно уравнения Максвелла запишутся в следующей симметричной форме:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=\frac{4\pi}{c}j^\mu \\ &\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0 \end{aligned}\right\} \tag{24.13}$$

их можно записать еще более элегантно, если ввести величину, дуальную к $F^{\mu\nu}$:

$$\tilde{F}_{\mu\nu}=\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\lambda\rho} \tag{24.14}$$

Тогда вместо (24.13) получим

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=\dfrac{4\pi}{c}j^{\nu}\\ \dfrac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=0\end{array}\right\} \tag{24.15}$$

Впрочем, этой форме записи мы пользоваться не будем.

если величины $\vec{x}$ и $\vec{j}$ интерпретировать как векторы в 4-мерном пространстве $\mathbb{R}^4$, а $F^{\mu\nu}$ -как соответствующий антисимметричный тензор второго ранга, то мы увидим, что уравнения Максвелла оказываются автоматически ковариантными относительно 4-мерных вращений, образующих группу $O(4)$.

если говорить более точно, то полученная группа несколько отличается от $O(4)$, поскольку соответствующие преобразования оставляют инвариантной квадратичную форму

$$x_p x^p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 \tag{24.16}$$

Которая не является положительно определенной. Они отвечают «вращениям» в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве индекса (3,1). Такие преобразования описываются псевдоортогональными матрицами порядка 4x4, образующими группу $O(3,1)$, к которой мы скоро вернемся.

пока же по-прежнему будем пользоваться пространством векторов с мнимой четвертой компонентой, которое формально является евклидовым. Поэтому условие ортогональности записывается в обычном виде

$$\tilde{\Omega}\Omega = I \qquad \text{или} \qquad \sum_{\lambda=1}^{4}\left(\Omega_{\lambda}^{\mu}\Omega_{\lambda}^{\nu}\right)=\delta_{\mu}^{\nu} \tag{24.17}$$

Вся специфика преобразований находит свое отражение в том, что матричные элементы Ω_i^j и Ω_4^4, преобразующие вещественные компоненты 4-вектора в вещественные, или мнимую в мнимую, являются вещественными. Матричные же элементы Ω_i^4 и Ω_i^4, преобразующие вещественные компоненты в мнимые и наоборот, должны быть чисто мнимыми.

§ 25. Преобразования Лоренца

Сделаем теперь фундаментальное физическое предположение:

> Введенные в конце 24 линейные преобразования имеют не формальный характер, а отвечают преобразованиям координат событий из одной системы отсчета в другую, произвольно повернутую относительно исходной и движущуюся относительно нее с постоянной скоростью $\vec{V}$.

примерно так их открыл Лоренц, а затем исследовал Пуанкаре, почему эти преобразования и называются преобразованиями Лоренца. Инвариантность относительно них квадратичной формы (24.16) составляет содержание второго постулата Эйнштейна о независимости скорости света от системы отсчета, в которой она измерена, что вытекает из результатов опыта Майкельсона.

вращение систем координат уже изучены, и мы ограничимся наиболее простым и наиболее важным случаем, к анализу которого сводится и общее рассмотрение. Итак, считаем, что оси обеих систем параллельны, что при $t = 0$ их начала совпадают и что движение происходит вдоль общей оси Oz. В этом случае в общих преобразованиях

$$x^{\mu'} = \Omega^{\mu'}_{r} x^{r} \tag{25.1}$$

Координаты $x_1 = x$ и $x_2 = y$ не меняются, причем в силу равноправности всех точек они не должны входить и в преобразованные x_3 и x_4. В результате (25.1) сводится к

$$x^{\alpha} = \Omega^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}; \qquad \alpha, \beta = 3, 4 \tag{25.2}$$

Т.е. Собственно преобразования Лоренца («бусты») задаются матрицей

$$\Omega^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^{3}_{3} & \Omega^{4}_{3} \\ 0 & 0 & \Omega^{3}_{4} & \Omega^{4}_{4} \end{pmatrix} \tag{25.3}$$

Получим их тремя разными способами.

А) <u>прямой вывод</u>

условие ортогональности (24.17) сводится в данном случае к равенствам

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\Omega_{\alpha}^{\beta}\Omega_{\alpha}^{\gamma}=\delta_{\beta}^{\gamma} \tag{25.4}$$

Или, в развернутой форме,

$$\left.\begin{aligned}\Omega_3^3\Omega_3^3+\Omega_4^3\Omega_4^3=1\\ \Omega_3^4\Omega_3^4+\Omega_4^4\Omega_4^4=1\\ \Omega_3^3\Omega_3^4+\Omega_4^3\Omega_4^4=0\end{aligned}\right\} \tag{25.5}$$

Систему уравнений замыкает требование, чтобы начало движущейся системы координат $\left(x^{3'}=0\right)$ в момент времени t имело $x^3=Vt$:

$$0=x^{3'}=\Omega_3^3x^3+\Omega_4^3x^4=\Omega_3^3Vt+\Omega_4^3\left(ict\right)=\left(V\Omega_3^3+ic\Omega_4^3\right)t$$

Из которого

$$\Omega_4^3=+i\beta\Omega_3^3\ , \qquad \beta=\frac{V}{c} \tag{25.6}$$

Подстановка (25.6) в первое уравнение (25.5) дает

$$\left(\Omega_3^3\right)^2-\beta^2\left(\Omega_3^3\right)^2=1$$

Откуда и из (25.6)

$$\Omega_3^3=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \qquad \Omega_4^3=+\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{25.7}$$

Оставшиеся матричные элементы находятся из второго и третьего уравнений (25.5). Последнее из них дает

$$\Omega_3^4=-\frac{\Omega_4^3}{\Omega_3^3}\Omega_4^4=-i\beta\Omega_4^4$$

И после подстановки во второе уравнение (25.5) получаем

$$\Omega_4^4=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{и} \qquad \Omega_3^4=-\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{25.8}$$

таким образом, для преобразований Лоренца имеем

$$\left.\begin{aligned} x^{3'} &= \Omega^3_3 x^3 + \Omega^3_4 x^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x^3 + \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x^4 \\ x^{4'} &= \Omega^4_3 x^3 + \Omega^4_4 x^4 = -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x^3 + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x^4 \end{aligned}\right\} \tag{25.9}$$

Переходя к обычным обозначениям

$$\left(x^3, x^4\right) = \left(z, ict\right)\ , \qquad \beta = \frac{V}{c}$$

И производя тривиальные сокращения множителей, окончательно получим

$$x' = x, \quad y' = y \tag{25.10}$$

$$z' = \frac{z - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ , \qquad t' = \frac{t - \dfrac{V}{c^2} z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Б). <u>Поворот в евклидовой плоскости</u>

Двумерные преобразования (25.2) сохраняют квадратичную форму

$$x_\alpha x^\alpha = \left(x_3\right)^2 + \left(x_4\right)^2 \tag{25.11}$$

а потому представляют собой поворот в евклидовой плоскости:

$$\left.\begin{aligned} x'_3 &= x_3 \cos\varphi + x_4 \sin\varphi \\ x'_4 &= -x_3 \sin\varphi + x_4 \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{25.12}$$

Для отыскания неизвестного угла φ достаточно рассмотреть точку O, для которой

$$x_3 = 0, \quad x'_3 = -Vt' \equiv i\frac{V}{c} x'_4 \tag{25.13}$$

Подстановка (25.13) в (25.12) дает

$$\left.\begin{aligned} i\frac{V}{c}x_4' &= x_4\sin\varphi \\ x_4' &= x_4\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (25.14)$$

откуда

$$\mathrm{tg}\ \varphi = i\frac{V}{c} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\ \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\ ; \quad \sin\varphi = \cos\varphi\cdot\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (25.15)$$

Таким образом,

$$x_3' = \frac{x_3 + i\frac{V}{c}x_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x_4' = \frac{-i\frac{V}{c}x_3 + x_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (25.16)$$

что полностью совпадает с преобразованиями Лоренца (25.10).

в). Поворот в псевдоевклидовой плоскости

Если перейти к вещественной временной координате, то преобразования Лоренца будут сохранять квадратичную форму

$$(x_3)^2 - (x_0)^2 = \mathrm{inV} \qquad (25.17)$$

так что им будет отвечать гиперболический поворот

$$\left.\begin{aligned} x_3' &= x_3\mathrm{ch}\varphi + x_0\mathrm{sh}\varphi \\ x_4' &= x_3\mathrm{sh}\varphi + x_0\mathrm{ch}\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (25.18)$$

Угол φ находится в точности так же, как и в предыдущем случае, и мы вновь приходим к преобразованиям Лоренца.

Их следствия многообразны и чрезвычайно глубоки – они изучаются в СТО. В частности, уравнения Максвелла ковариантны относительно преобразований Лоренца, а уравнения механики не ковариантны и требуют модификации, которая была произведена Эйнштейном.

§ 26. Инварианты электромагнитного поля

Как мы видели, в СТО компоненты напряженности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ образуют антисимметричный тензор второго ранга $F^{\mu\nu}$ по отношению к группе $O(4)$. Этот тензор в явном виде задается матрицей (24.10).

Найдем его инварианты как коэффициенты характеристического многочлена

$$P_n(\lambda) = \left|F^{\mu\nu} - \lambda\delta^{\mu\nu}\right| \qquad (26.1)$$

(см. §19). Раскрывая определитель, направляем ось Oz по $\vec{H}$ и выбирая плоскость yOz так, чтобы в ней лежал вектор $\vec{E}$:

$$\vec{H} = (0,0,H_z)\ ;\ \vec{E} = (0,E_y,E_z) \qquad (26.2)$$

Тогда с учетом (24.10) имеем:

$$\left|F^{\mu\nu} - \delta^{\mu\nu}\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & H_z & 0 & 0 \\ -H_z & -\lambda & 0 & -iE_y \\ 0 & 0 & -\lambda & -iE_z \\ 0 & iE_y & iE_z & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -iE_y \\ 0 & -\lambda & -iE_z \\ iE_y & iE_z & -\lambda \end{vmatrix} - H_z \begin{vmatrix} -H_z & 0 & -iE_y \\ 0 & -\lambda & -iE_z \\ 0 & iE_z & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\left(-\lambda^3 + \lambda E_y^2 + \lambda E_z^2\right) - H_z\left(-\lambda^2 H_z + H_z E_z^2\right) =$$

$$= \lambda^4 + \lambda^2\left(H_z^2 - E_y^2 - E_z^2\right) - H_z^2 E_z^2 = \lambda^4 + \lambda^2\left(\vec{H}^2 - \vec{E}^2\right) - \left(\vec{E},\vec{H}\right)^2$$

Итак, электромагнитное поле обладает двумя инвариантами

$$I_1 = \vec{H}^2 - \vec{E}^2\ , \qquad I_2 = \left(\vec{E}\vec{H}\right)^2 \qquad (26.3)$$

которые в тензорных обозначениях записываются как

$$I_1 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (26.4)$$

и

$$I_2 = -\frac{1}{4!}\mathcal{E}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\mathcal{E}_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}F^{\mu_1\nu_1}F^{\mu_2\nu_2}F^{\mu_3\nu_3}F^{\mu_4\nu_4} = -\det F \qquad (26.5)$$

Из существования инвариантов (26.3) следует, в частности, что свойство модулей векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а также свойство их ортогональности суть свойства, инвариантные относительно преобразований Лоренца.

§ 27.Группа Лоренца

Итак, мы получили, что в частном случае взаимной ориентации координатных осей систем отсчета S и S' и вектора скорости их относительного движения, переход от S к S' осуществляют «чистые» преобразования Лоренца, часто называемые теперь БУСТАМИ:

$$X' = \Lambda_{\parallel}^{z}\left(\vec{V}\right)X \tag{27.1}$$

В явном виде они выглядят следующим образом:

$$x' = x,\quad y' = y,\quad z' = \frac{z - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ ,\quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{27.2}$$

Пусть теперь оси координат по-прежнему параллельны, но скорость имеет произвольное направление, заданное полярными углами θ, φ в системе S. Тогда преобразование Лоренца можно записать как

$$X' = \Lambda_{\parallel}\left(\vec{V}\right)X; \qquad \Lambda_{\parallel}\left(\vec{V}\right) = \Omega(\theta,\varphi)\ \Lambda_{\parallel}^{z}\left(\vec{V}\right)\Omega^{-1}(\theta,\varphi) \tag{27.3}$$

где $\Omega(\theta,\varphi)$ - матрица вращения, совмещающего направление скорости вдоль оси z с конечным направлением. Таким образом, запись (27.3) означает, что сначала мы делаем скорость $\vec{V}$ параллельной оси z, затем совершаем буст, а в конце восстанавливаем направление скорости.

В общей ситуации предварительно нужно повернуть оси координат посредством матрицы Ω', чтобы сделать их параллельными, а затем осуществить только что описанное преобразование. В результате для произвольного преобразования Лоренца имеем

$$X' = \Lambda X; \qquad \Lambda = \Lambda_{\parallel}\left(\vec{V}\right)\Omega' = \Omega\ \Lambda_{\parallel}^{z}\left(\vec{V}\right)\Omega^{-1}\Omega' \tag{27.4}$$

Сюда можно включить также дискретные операции – инверсию координатных осей и обращение времени. Наконец, можно отказаться от предположения, что в начальный момент $t = t' = 0$ начала координат O и O' совпадают. Чтобы свести задачу к предыдущей, теперь требуется совершить сдвиг по времени на величину τ и пространственную трансляцию на вектор $\vec{a}$. В итоге получим преобразования

$$X' = \prod X = \Lambda X - A\ , \qquad A \equiv \left(\vec{a}, ic\tau\right) \tag{27.5}$$

Называемые полными преобразованиями Пуанкаре. Ими и исчерпываются все допустимые в СТО преобразования систем отсчета.

Таким образом, если нерелятивистская механика есть схема, инвариантная относительно группы Галилея, то здесь можно сказать следующее:

<u>СТО есть теория, группой инвариантности которой является полная группа Пуанкаре</u>

(хотя о том, что это группа мы еще не говорили)

Отличительные особенности бустов состоят в том, что

а). они суть линейные и однородные преобразования;

б). они оставляют инвариантной индефенитную квадратичную форму

$$S^2\left(x\right) = c^2t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \tag{27.6}$$

Кроме того, совокупность бустов образует коммутативную группу с законом композиции

$$\Lambda_{\parallel}^{z}\left(V_2\right)\Lambda_{\parallel}^{z}\left(V_1\right) = \Lambda_{\parallel}^{z}\left(\frac{V_1 + V_2}{1 + \dfrac{V_1 V_2}{c^2}}\right) \tag{27.7}$$

эквивалентному релятивистскому закону сложений скоростей.

ДОКАЗАТЬ ОБА ЭТИХ УТВЕРЖДЕНИЯ!

Исследуем теперь структуру множества преобразований Лоренца общего вида. Введем с этой целью обозначение $x^0 \equiv ct$ и рассмотрим пространства $\mathbb{R}^4$ и $\tilde{\mathbb{R}}^4$ векторов X и $\tilde{X}$ соответственно

$$X=\begin{pmatrix}ct\\x\\y\\z\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\;;\quad \tilde{X}=\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)\equiv\left(\tilde{x}_0,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3\right)\in\tilde{\mathbb{R}}^4 \tag{27.8}$$

(заметим, что и у <u>координат</u> x_μ ставится тильда – это окажется удобным в дальнейшем, при установлении связи с общепринятыми обозначениями). Введем также фундаментальную квадратичную форму – интервал события X:

$$S^2(x)=c^2t^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(x^0\right)^2-\left(x^1\right)^2-\left(x^2\right)^2-\left(x^3\right)^2- \tag{27.9}$$

которую кратко можно записать как

$$S^2(X)=\tilde{x}_\mu g^\mu_\nu x^\nu=\tilde{X}gX \tag{27.10}$$

где

$$g=\begin{pmatrix}1&&&0\\&-1&&\\&&-1&\\0&&&-1\end{pmatrix} \tag{27.11}$$

<u>Определение</u>. Множество всех линейных однородных преобразований

$$x^{\mu'}=\Lambda^{\mu'}_{\mu}x^\mu\;,\quad \tilde{x}_{\mu'}=\Lambda^{\mu}_{\mu'}\,\tilde{x}_\mu\quad\text{или}\quad X'=\Lambda X\;,\quad \tilde{X}'=\tilde{X}\tilde{\Lambda}$$

оставляющих инвариантным интервал (27.10), называется <u>множеством преобразований Лоренца.</u>

Из требования интервала имеем

$$S'^2=\tilde{X}'gX'=\tilde{X}\tilde{\Lambda}g\Lambda X=S^2=\tilde{X}gX$$

откуда $\quad \tilde{\Lambda}g\Lambda=g \quad$ или $\quad \Lambda g\tilde{\Lambda}=g \qquad (27.12)$

Таким образом, преобразования Лоренца реализуются <u>псевдоортогональными</u> матрицами индекса (1,3). Элементарно доказывается, что их совокупность образует группу, обозначаемую как $O(1,3)$, или, короче, как L.

Почти везде в литературе вместо векторов сопряженного пространства $\tilde{\mathbb{R}}^4$, которые мы обозначаем как $\tilde{X}$, вводят векторы X^*:

$$X^* = \tilde{X}g \quad \text{или} \quad x_\mu = \tilde{x}_\mu g^\mu_\nu \tag{27.13}$$

Очевидно, что

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \;, \qquad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \tag{27.14}$$

где элементы $g^{(\mu\nu)}_{\mu\nu}$ такие же, как в (27.11). Таким образом, рассматривают пространства $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^{4*}$, векторами которых являются

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;;\; X^* = \left(x^0, -x^1, -x^2, -x^3\right) \equiv \left(x_0, x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{R}^{4*} \tag{27.15}$$

Интервал теперь записывается как

$$S^2(x) = \tilde{x}_\mu g^\mu_\nu x^\nu = x_\nu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu \tag{27.16}$$

так что $g_{\mu\nu}$ $\left(g^{\mu\nu}\right)$ является метрическим тензором в $\mathbb{R}^4$ (в $\mathbb{R}^{4*}$).

Однако пока мы не будем придерживаться старых обозначений, которые более удобны при исследовании структуры группы Лоренца. Перечислим сначала ее <u>связные компоненты</u>, т.е. подмножества преобразований Лоренца, элементы которых можно получить друг из друга непрерывным образом. Будем действовать последовательно.

а). Вся группа L называется полной группой Лоренца.

б).Взяв определитель от обеих частей (27.12), сразу получим

$$\det \Lambda = \pm 1 \tag{27.17}$$

В соответствии с этим L разбивается на две компоненты L_+ и L_-:

$$L = L_+ \bigcup L_- \qquad 27.18)$$

Первая из них является подгруппой и называется <u>общей</u> группой Лоренца. Преобразования из L_- включают отражения, не сводящиеся к вращениям.

в). Из условия $\tilde{\Lambda} g \Lambda = g$ следует

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^1 & \Lambda_0^2 & \Lambda_0^3 \\ \Lambda_1^0 & . & . & . \\ \Lambda_2^0 & . & . & . \\ \Lambda_3^0 & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & & \\ 0 & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_0^2 & \Lambda_0^3 \\ \Lambda_0^1 & . & . & . \\ \Lambda_0^2 & . & . & . \\ \Lambda_0^3 & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

или, взяв левый верхний элемент,

$$\left(\Lambda_0^0\right)^2 - \left(\Lambda_0^1\right)^2 - \left(\Lambda_0^2\right)^2 - \left(\Lambda_0^3\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\Lambda_0^0\right)^2 \geq 1$$

так что

$$\Lambda_0^0 \geq 1 \qquad \text{или} \qquad \Lambda_0^0 \leq 1 \tag{27.19}$$

В результате получаем разбиение L на две компоненты $\mathrm{L}^{\uparrow}$ и $\mathrm{L}^{\downarrow}$

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}^{\uparrow} \bigcup \mathrm{L}^{\downarrow} \tag{27.20}$$

Первая из них есть подгруппа L, называемая ортохронной группой Лоренца. Преобразования из $\mathrm{L}^{\downarrow}$ включают обращение времени.

г). Взяв попарные пересечения компонент, мы и получим все связные компоненты группы Лоренца, которая есть их объединение:

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_+^{\uparrow} \bigcup \mathrm{L}_+^{\downarrow} \bigcup \mathrm{L}_-^{\uparrow} \bigcup \mathrm{L}_-^{\downarrow} \tag{27.21}$$

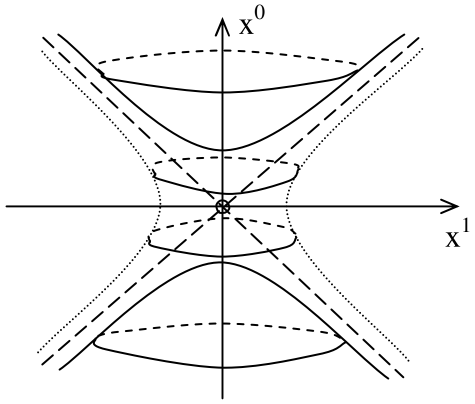
Подгруппой из них является только компонента

$$\mathrm{L}_+^{\uparrow} = \mathrm{L}_+ \bigcap \mathrm{L}^{\uparrow} \tag{27.22}$$

называемая собственной группой Лоренца. Она не включает ни пространственных отражений, ни обращения времени. Общий вид всякого собственного преобразования Лоренца задает формула (27.4).

Рассмотрим теперь поверхности транзитивности подгрупп группы Лоренца. Это такие поверхности в $\mathbb{R}^4$, которые переходят в себя при всех преобразованиях из рассматриваемого класса. В качестве пояснения заметим, что для группы $\mathrm{O}(3)$ таковыми являются всевозможные сферы с общим центром в начале координат.

Относительно всякого преобразования $\Lambda \in L$ форма $S^2(x)$ есть инвариант, а потому множество всех поверхностей транзитивности распадается на четыре больших класса:



1). $S^2 = 0$ – световой конус,

2). $S^2 = a^2$ – двуполостные гиперболоиды,

3). $S^2 = -a^2$ – однополостные гиперболоиды,

4). $X = 0$ – начало координат.

При ортохронном преобразовании Лоренца нет дискретной операции, обращающей время, так что $L_+^{\uparrow}$ и $L^{\uparrow}$ имеют следующие поверхности транзитивности:

1а). $S^2 = 0$, $x^0 > 0$ – верхний световой конус;

1б). $S^2 = 0$, $x^0 < 0$ – нижний световой конус;

2а). $S^2 = a^2$, $x^0 > 0$ – верхние полы гиперболоидов;

2б). $S^2 = a^2$, $x^0 < 0$ – нижние полы гиперболоидов;

3). $S^2 = -a^2$ – однополостные гиперболоиды;

4). $X = 0$ – начало координат.

Каждой поверхности транзитивности отвечает определенный знак интервала. Если $S^2 > 0$, то интервал называется <u>времениподобным</u>, если $S^2 < 0$, то интервал – <u>пространственноподобный</u>, а если $S^2 = 0$, то он <u>изотропный</u> (нулевой, светоподобный).

Физический смысл времениподобного интервала – событие может быть связано с нулевым событием сигналом с $v < c$,т.е., оно находится с ним в причинно-следственном отношении; внутренность верхнего конуса – абсолютное будущее, внутренность нижнего конуса – абсолютное прошлое. В случае пространственноподобного интервала для связи события с началом координат требуется сверхсветовой сигнал, и оно не может находиться с ним в причинно-следственном отношении. Если интервал изотропный, то событие связывается с нулевым световым сигналом.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что бусты образуют группу и получить групповой закон композиции.

2. Выяснить физический смысл интервалов разного типа.
3. Показать, что если интервал между событиями времениподобный, то найдется такая система координат, в которой события одноместны.
4. Показать, что если интервал пространственноподобный, то найдется такая система отсчета, в которой события одновременны.
5. Показать, что в случае времениподобного интервала временной порядок следования события абсолютен, а в случае пространственноподобного интервала порядок следования событий во времени можно обратить.
6. Показать, что для событий, связанных изотропным интервалом, понятия разновременности и разноместности абсолютны.