§13. Основные уравнения электродинамики

а). Закон сохранения заряда

Пусть нам задано распределение зарядов в пространстве, характеризуемое их плотностью

$$\rho\left(\vec{r},t\right)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta\tau}\equiv\frac{dq}{d\tau} \tag{13.1}$$

И их движение, характеризуемое плотностью тока

$$\vec{j}\left(\vec{r},t\right)=\rho\left(\vec{r},t\right)\cdot\vec{v}\left(\vec{r},t\right) \tag{13.2}$$

Это есть величина заряда, протекающего в единицу времени через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно вектору скорости.

Следует иметь в виду, что реально заряды распределены дискретно – каждый из них представляет материальную точку. При этом заряд всякого тела кратен элементарному заряду, равному по модулю заряду электрона:

$$e_0=4,8\cdot 10^{10}\text{ ед. СГСЕ.} \tag{13.3}$$

Для одного точечного заряда, помещенного в точку $\vec{r}_0$, имеем

$$\rho\left(\vec{r}\right)=\begin{cases}0, & \vec{r}\neq\vec{r}_0\\ \infty, & \vec{r}=\vec{r}_0\end{cases};\qquad \int\limits_{\mathbb{R}^3}\rho d\tau=e\ ,$$

Где e - величина заряда. Таким образом,

$$\rho\left(\vec{r}\right)=e\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right) \tag{13.4}$$

$$\vec{j}\left(\vec{r}\right)=e\vec{v}\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right) \tag{13.5}$$

Для системы точечных зарядов

$$\rho\left(\vec{r}\right)=\sum_a e_a\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_a\right) \tag{13.6}$$

$$\vec{j}\left(\vec{r}\right)=\sum_a e_a\vec{v}_a\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_a\right) \tag{13.7}$$

Однако, часто функции (13.1) – (13.2) рассматриваются формально как непрерывные, что соответствует замене символа d на символ δ, где $\delta\tau$ - «физически бесконечно малый объем», т.е. объем, в котором содержится достаточно много точечных зарядов, которые считаются распределенными в нем в общем-то равномерно.

В приложениях наряду с введенными локальными характеристиками часто встречаются и глобальные величины типа полного заряда, заключенного в данном объеме:

$$dq = \rho d\tau \qquad \text{или} \qquad dq = \int_V \rho d\tau \tag{13.8}$$

и силы тока:

$$dJ = \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) \qquad \text{или} \qquad J = \int_\Sigma \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) \tag{13.9}$$

Опыт показывает, что имеет место закон сохранения заряда, приводящий к определенной связи между плотностью ρ и током $\vec{j}$. Для ее выявления рассмотрим общую ситуацию, когда имеется некоторая субстанция, распределенная с плотностью ρ, причем движение ее характеризуется плотностью тока $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Пусть также имеются источники этой субстанции (понимаемые алгебраически, т.е. и как «стоки») с интенсивностью $I\left(\vec{r}, t\right)$, понимаемой как количество субстанции, которая создается в единице объема за единицу времени. Изменение количества субстанции в данном объеме обусловлено ее потоком через поверхность (убыль) и действием источников (прибыль):

$$\frac{dq}{dt} = -J + Q \ ,$$

или

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau = -\oint_\Sigma \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) + \int_V I d\tau \tag{13.10}$$

Применяя теорему Гаусса, приходим к локальному закону изменения субстанции

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = I \ . \tag{13.11}$$

Закон сохранения заряда гласит, что алгебраическая сумма всех зарядов Вселенной есть величина постоянная, т.е. отсутствуют их источники и стоки - $I = 0$. В итоге мы приходим к уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \ . \tag{13.12}$$

Для стационарных процессов, когда

$\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ для всех локальных величин f,

получаем

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \ , \tag{13.13}$$

т.е. плотность тока является соленоидальным вектором (отсутствуют источники этого векторного поля, которые в общем случае характеризуются величиной $\partial\rho / \partial t$).

<u>б).. Общие определения</u>.

Движущиеся заряды создают некую материальную среду, называемую электромагнитным полем, и наша цель – охарактеризовать его и составить для соответствующих величин уравнения, их определяюшие.

Электромагнитное поле характеризуется двумя векторами. Один из них – напряженность электрического поля – задает электрическую силу, т.е. силу, действующую уже на покоящиеся заряды. Если обозначить через q величину пробного заряда, то по определению (см. 12)

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \tag{13.14}$$

Другое поле – магнитное – проявляется в его дополнительном воздействии на движущиеся заряды (вдобавок к действию на них электрического поля). Магнитная сила пропорциональна заряду и модулю скорости, причем она перпендикулярна вектору скорости, а потому по определению полагают (см. 12)

$$\vec{F}_m = \frac{q}{c}\left[\vec{v}\vec{H}\right] \tag{13.15}$$

Здесь мы пользуемся старой терминологией, называя вектор $\vec{H}$ напряженностью магнитного поля, а коэффициент пропорциональности $1/c$ фиксирует так называемую гауссову систему единиц.

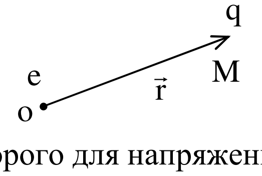
Постулат (принцип суперпозиции). Для поля, создаваемого в данной точке пространства в данный момент времени системой зарядов, имеем

$$\vec{E} = \sum_a \vec{E}_a \ , \quad \vec{H} = \sum_a \vec{H}_a \ . \tag{13.16}$$

Перейдем теперь к последовательному выводу уравнений, которым подчиняются векторы напряженности электрического и магнитного полей. При этом руководящим принципом служит теорема Гельмгольца, согласно которой векторное поле однозначно восстанавливается по своим дивергенции и ротору.

в). Электростатическое поле.

Начнем с электростатического поля, т.е. с поля, создаваемого неподвижными зарядами. Основовой здесь служит закон Кулона



$$\vec{F}_q = \frac{qe}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \ , \tag{13.17}$$

Из которого для напряженности электрического поля неподвижного точечного заряда e, находящегося в начале координат, имеем, в соответствии с определением (13.14),

$$\vec{E}_0 = \frac{e}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \ . \tag{13.18}$$

Учитывая результаты §7 , получаем

$$\operatorname{div}\vec{E}_0 = 4\pi e\delta(\vec{r}) = 4\pi\rho_0\ , \quad \operatorname{rot}\vec{E}_0 = 0\ , \tag{13.19}$$

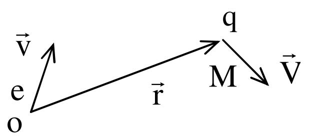
Причем этот результат не зависит, очевидно, от местонахождения заряда. Суммируя все подобные результаты по источникам поля, получим уравнение электростатики

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho\ , \quad \operatorname{rot}\vec{E}_0 = 0\ , \tag{13.20}$$

где существенно использован принцип суперпозиции и линейность операций дифференцирования. В частности, второе из уравнений (13.20) свидетельствует о потенциальности электростатического поля, а второе – о существовании его источников, каковыми являются электрические заряды.

г). Магнитостатическое поле

Рассмотрим теперь магнитостатическое поле, создаваемое в дополнение к электрическому стационарно движущимися зарядами. При этом стационарность понимается в смысле Эйлера – все характеристики системы в данной фиксированной точке пространства не должны зависеть от времени. Начнем с магнитного поля, создаваемого одним точечным зарядом, хотя его движение заведомо не является стационарным в нашем смысле. Основа магнитостатики – закон Ампера, аналогичный закону Кулона:



$$\vec{F}_q = \frac{qe}{c^2}\frac{\left[\vec{V}\left[\vec{v}\vec{r}\right]\right]}{r^3} \tag{13.21}$$

Следует подчеркнуть, что он был установлен путем изучения взаимодействия проводников с током, а потому по сути своей является нерелятивистским. Сравнивая закон (13.21) с определением напряженности магнитного поля (13.15), для вектора этой напряженности, создаваемой точечным зарядом, получаем

$$\vec{H}_0 = \frac{e}{c}\frac{\left[\vec{v}\vec{r}\right]}{r^3}\ . \tag{13.22}$$

В духе теоремы Гельмгольца вычислим дивергенцию и ротор этого поля, рассматривая скорость $\vec{v}$ как постоянный вектор. Имеем

$$\operatorname{div}\vec{H}_0 = \frac{e}{c}\left(\vec{\nabla},\left[\vec{v},\frac{\vec{r}}{r^3}\right]\right) = -\frac{e}{c}\left(\vec{\nabla},\left[\frac{\vec{r}}{r^3},\vec{v}\right]\right) = -\frac{e}{c}\left(\vec{v},\left[\vec{\nabla},\frac{\vec{r}}{r^3}\right]\right) = -\frac{e}{c}\left(\vec{v},\operatorname{rot}\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

Далее,

$$\mathrm{rot}\vec{H}_0=\frac{e}{c}\left(\vec{\nabla},\left[\vec{v},\frac{\vec{r}}{r^3}\right]\right)=\frac{e}{c}\vec{v}\left(\vec{\nabla},\frac{\vec{r}}{r^3}\right)-\frac{e}{c}\frac{\vec{r}}{r^3}\left(\vec{\nabla}_r,\vec{v}\right)=$$
$$=\frac{e}{c}\vec{v}\,\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r^3}-\frac{e}{c}\left(\vec{v},\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}=$$
$$=\frac{e}{c}\vec{v}\cdot 4\pi\delta\left(\vec{r}\right)-\frac{e}{c}\frac{1}{r^3}\left(\vec{v},\vec{\nabla}\right)\vec{r}-\frac{e}{c}\vec{r}\left(\vec{v},\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right)=$$
$$=\frac{4\pi}{c}\cdot e\delta\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{v}-\frac{e}{c}\frac{\vec{v}}{r^3}+\frac{3e\vec{r}}{c}\left(\vec{v},\frac{1}{r^4}\frac{\vec{r}}{r}\right)=$$
$$=\frac{4\pi}{c}\rho\left(\vec{r}\right)\vec{v}-\frac{e}{c}\frac{\vec{v}}{r^3}+\frac{3e\vec{r}}{c}\frac{\left(\vec{v},\vec{r}\right)}{r^5}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}_0-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{e\vec{r}}{r^3}\right)$$

Таким образом, для магнитного поля равномерно движущегося точечного заряда получаем

$$\mathrm{div}\,\vec{H}_0=0 \qquad \text{и} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H}_0=\frac{4\pi}{c}\vec{j}_0-\frac{1}{c}\frac{d\vec{E}_0}{dt} \tag{13.23}$$

Суммируя эти уравнения с учетом принципа суперпозиции, будем иметь

$$\mathrm{div}\,\vec{H}=0 \qquad \text{и} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}-\frac{1}{c}\frac{d\vec{E}}{dt}\ . \tag{13.24}$$

Но в случае стационарного движения зарядов, создающих поле, все производные по времени должны обращаться в нуль, а потому приходим к следующим окончательным уравнениям магнитостатики:

$$\mathrm{div}\,\vec{H}=0 \qquad \text{и} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{13.25}$$

Первое из них свидетельствует о соленоидальности статического магнитного поля, т.е. об отсутствии его источников, а второе говорит о том, что источником завихрения магнитного поля является плотность тока частиц.

д). Электромагнитная индукция.

За счет электростатического поля невозможно создать замкнутый электрический ток, поскольку для соответствующего контура имеем

$$A_{\circlearrowleft}=q\oint\vec{E}_{\text{стат.}}d\vec{l}=0\ , \tag{13.26}$$

Но всегда имеются энергетические потери (например, тепловые). Для этой цели нужны электрические поля (действующие на неподвижные заряды), но нестатического происхождения. Эти поля называются сторонними и описываются напряженностью $\vec{E}_{\text{стор.}}$, а основной их характеристикой в соответствии с результатом (13.26), является ЭДС:

$$\mathcal{E}=\oint\vec{E}_{\text{стор.}}d\vec{l}\ . \tag{13.27}$$

Сторонние поля создаются так называемыми источниками тока, причем Фарадей обнаружил, что их может создавать и переменное магнитное поле. Он сформулировал закон электромагнитной индукции, согласно которому

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \equiv -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \vec{H}d\vec{S} \ , \tag{13.28}$$

Объединяя (13.28) с определением (13.27) и со свойством потенциальности электростатического поля, получим

$$\oint \vec{E}d\vec{l} - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \vec{H}d\vec{S} \ ,$$

Где $\vec{E} = \vec{E}_{стор.} + \vec{E}_{стат.}$, или вспоминая теорему Стокса,

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{13.29}$$

е), Ток смещения.

Итак, при учете переменности магнитного поля получаем уравнения

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{div}\ \vec{E}=4\pi\rho \\ \mathrm{rot}\ \vec{H}=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{array}\right\} (\mathrm{I})\ , \qquad \left.\begin{array}{r} \mathrm{div}\ \vec{H}=0 \\ \mathrm{rot}\ \vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{array}\right\} (\mathrm{II})\ . \tag{13.30}$$

Из второго уравнения имеем

$$\mathrm{div\ rot}\ \vec{H}=0 \quad = \quad \frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\ \vec{j}$$

откуда

$$\mathrm{div}\ \vec{j}=0\ .$$

Однако, согласно закону сохранения заряда должно быть

$$\mathrm{div}\ \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\ .$$

Чтобы снять это противоречие, добавим к току неизвестное пока слагаемое и назовем его пока условно током смещения. Тогда получим

$$\mathrm{rot}\ \vec{H}=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}+\vec{j}_{см.}\right)\ ,$$

И мы имеем

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H}=0 \quad = \quad \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j}+\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j}_{\text{см.}} \ ,$$

откуда

$$\operatorname{div}\vec{j}_{\text{см.}}=-\operatorname{div}\vec{j}=\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\vec{E}\right)=\operatorname{div}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) ,$$

так что

$$\vec{j}_{\text{см.}}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{f}\left(\vec{r},t\right) ,$$

где

$$\operatorname{div}\vec{f}\left(\vec{r},t\right)=0 .$$

Максвелл, исходя из соображений симметрии, высказал гипотезу, что

$$\vec{f}\left(\vec{r},t\right)\equiv 0 , \qquad \text{т.е.} \qquad \vec{j}_{\text{см.}}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} . \tag{13.31}$$

Таким образом вместо последнего уравнения (13.30) получаем

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} . \tag{13.32}$$

Подчеркнем, что название «ток смещения» обусловлено совершенно неинтересными сейчас причинами часто исторического порядка.

ж). Уравнения Максвелла.

Итак, при учете всех изложенных обстоятельств мы приходим к так называемой системе уравнений Максвелла:

$$\boxed{\left.\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{E}&=4\pi\rho\\ \operatorname{rot}\vec{H}&=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\}(\mathrm{I}) , \quad \left.\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{H}&=0\\ \operatorname{rot}\vec{E}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\end{aligned}\right\}(\mathrm{II}).} \tag{13.33}$$

§ 14. Свойства уравнений Максвелла.

Итак, мы получили систему уравнений Максвелла (13.33), позволяющих найти электромагнитное поле, создаваемое зарядами в пустоте, распределение и движение которых задано. Эти уравнения являются основной (главной и единственной) аксиомой классической электродинамики. Их можно записать также в интегральной форме:

$$\left.\begin{aligned}\oint\vec{E}d\vec{S}=4\pi\int\rho d\tau\ ,\\ \oint\vec{H}d\vec{l}=\frac{4\pi}{c}\int\vec{j}d\vec{S}+\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\vec{E}d\vec{S}\end{aligned}\right\}(\mathrm{I})\ ;\quad \left.\begin{aligned}\oint\vec{H}d\vec{S}=0\\ \oint\vec{E}d\vec{l}=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\vec{H}d\vec{S}\end{aligned}\right\}(\mathrm{II}) \qquad (14.1)$$

которая является более общей, поскольку она автоматически содержит граничные условия для случая разрывных плотностей зарядов и токов. Особенно важную роль играет такая запись в электродинамике сплошных сред.

1. Уравнения Максвелла отражают соответственно следующие экспериментальные факты:

   а). закон Кулона и инвариантность заряда (независимость его величины от состояния движения);

   б). закон Ампера и гипотезу Максвелла о токе смещения;

   в) . отсутствие в природе магнитных зарядов;

   г) .потенциальность электростатического поля и закон Фарадея.

Несколько слов о третьем факте. В природе пока действительно не обнаружены магнитные заряды, но имеется естественная тенденция симметризовать уравнения Максвелла по электрическому и магнитному полям, записывая их в виде

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{div}\ \vec{E}=4\pi\rho\\ \mathrm{rot}\ \vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\mathrm{div}\ \vec{H}=4\pi\rho_m\\ \mathrm{rot}\ \vec{E}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\qquad \left(\vec{j}_m\equiv\rho_m\vec{v}\right)\ , \qquad (14.2)$$

где ρ_m - плотность гипотетического «магнитного заряда». В действительности факт его существования был выведен Дираком на основе глубоких квантовомеханических соображений. Он же установил знаменитую связь между электрическим e и магнитным g зарядами так называемого монополя Дирака:

$$\frac{eg}{\hbar c}=\frac{k}{2}\quad \left(k=0,\pm1,\pm2,...\right)\ , \qquad (14.3)$$

откуда для величины магнитного заряда имеем

$$g=\frac{\hbar c}{e}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\frac{\hbar c}{e^2}e\cdot k=\frac{137}{2}e\cdot k=68{,}5\ e\cdot k\,. \qquad (14.4)$$

Монополь Дирака интенсивно ищут, но пока он не обнаружен (и видимо, не будет обнаружен), хотя несколько раз появлялись сообщения об открытии этой частицы. Скорее всего, природа накладывает на его существование какой-то, доселе неизвестный, фундаментальный запрет. Подробности, касающиеся этой интересной проблематики, можно найти в сборнике «Монополь Дирака», М., 1970.

2. Физические величины, входящие в уравнения Максвелла, ведут себя довольно интересно по отношению к преобразованиям из полной ортогональной группы $O(3)$:

   а) . плотность заряда является скаляром (не меняется при инверсии), а плотность тока – вектором (компоненты меняют знак при инверсии);

   б). напряженность электрического поля есть вектор;

в). Напряженность магнитного поля является псевдовектором (не изменяющим компоненты при инверсии), что видно из второго уравнения, в котором справа стоят вектора, а ротор является псевдовекторной операцией;

г). гипотетические плотности магнитного заряда и тока должны быть соответственно псевдоскаляром и псевдовектором.

3. Уравнения Максвелла обладают следующими свойствами.

а). эти уравнения линейны, в чем находит свое выражение принцип суперпозиции.

б). уравнения Максвелла суть уравнения в частных производных, и для выделения их единственного решения следует задавать как начальные, так и граничные условия.

в). Уравнения автоматически содержат закон сохранения заряда:

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right)=0=\operatorname{div}\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}\right)+\operatorname{div}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{E}=\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\left(\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

т.е.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0.$$

г). интересно, что уравнений 8, а неизвестных всего 6, и они кажутся переопределенными. Этот парадокс разрешается тем, что существенными оказываются лишь векторные уравнения, а скалярные играют роль начальных условий. Действительно,

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right)=0=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\left(\vec{H}\right),$$

и

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right)=0=\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{E}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{E}-4\pi\rho\right),$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{H}\right)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{E}-4\pi\rho\right)=0,$$

т.е.

$$\operatorname{div}\vec{H}=f\left(\vec{r}\right), \qquad \operatorname{div}\vec{E}-4\pi\rho=\varphi\left(\vec{r}\right)$$

и уравнения с дивергенциями играют роль начальных условий, согласно которым

$$f\left(\vec{r}\right)=\varphi\left(\vec{r}\right)\equiv 0.$$

д). уравнения Максвелла обладают единственным решением, что будет доказано ниже, при анализе закона сохранения энергии.

3. Для напряженностей можно получить незацепляющуюся систему уравнений второго порядка.

Имеем:

$$\mathrm{rot\ rot}\ \vec{E} = \mathrm{grad\ div}\ \vec{E} - \vec{\nabla}^2\vec{E} = 4\pi \mathrm{grad}\ \rho - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\ \vec{H}\right) = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},$$

откуда

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 4\pi\left(\mathrm{grad}\ \rho + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right). \qquad (14.5)$$

Аналогично,

$$\mathrm{rot\ rot}\ \vec{H} = \mathrm{grad\ div}\ \vec{H} - \vec{\nabla}^2\vec{H} = -\vec{\nabla}^2\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}\ \vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\ \vec{E}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}\ \vec{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

откуда

$$\vec{\nabla}^2\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}\ \vec{j}\ . \qquad (14.6)$$

Дифференциальный оператор

$$\square = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (14.7)$$

Называется <u>оператором Даламбера</u>, или <u>даламберианом.</u> В итоге полученные уравнения (14.5) – (14.6) записываются как

$$\square E = 4\pi\left(\mathrm{grad}\ \rho + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right) \qquad (14.5')$$

и

$$\square \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\ \mathrm{rot}\ \vec{j}\ , \qquad (14.6')$$

и относятся к <u>уравнениям Даламбера.</u>

Выведенные уравнения особенно хороши в той области пространства, где отсутствуют заряды и токи. В этом случае они превращаются в так называемые <u>волновые уравнения</u>

$$\square \vec{E} = 0 \qquad \text{и} \qquad \square \vec{H} = 0\ , \qquad (14.8)$$

которые в своем месте будут решены в явном виде.

<u>§15. Потенциалы электромагнитного поля.</u>

Кажущуюся избыточность информации, которая содержится в уравнениях Максвелла, можно преодолеть, если ввести вместо напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ так называемые потенциалы. Кстати, по-видимому , они имеют более глубокий смысл, и именно в терминах потенциалов обычно формулируется квантовая теория поля.

1. Из соленоидальности магнитного поля $\mathrm{div}\,\vec{H}=0$ вытекает существование векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r},t)$, такого, что

$$\vec{H}=\mathrm{rot}\,\vec{A} \qquad (15.1)$$

Тогда уравнение $\mathrm{div}\,\vec{H}=0$ удовлетворяется автоматически.
Подставляя (15.1) в уравнение

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},$$

получим

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\mathrm{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \text{или} \qquad \mathrm{rot}\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0,$$

т.е. векторное поле, включенное в скобки, потенциально, так что

$$\exists\varphi:\quad \vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\varphi, \qquad (15.2)$$

где величина φ называется скалярным потенциалом.

Таким образом, поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ однозначно выражаются через потенциалы:

$$\vec{H}=\mathrm{rot}\vec{A}, \qquad \vec{E}=-\mathrm{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad (15.3)$$

и задача сводится к их отысканию.

2. Получим теперь уравнения, которым подчиняются потенциалы.

а). Уравнение для векторного потенциала получается подстановкой выражений (15.3) во второе уравнение Максвелла

$$\mathrm{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Имеем

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A}-\nabla^2\vec{A}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}-\frac{1}{c}\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2},$$

или

$$\Box\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \qquad (15.4)$$

Уравнение для скалярного потенциала получается подстановкой выражений (15.3) в третье уравнение Максвелла

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=4\pi\rho\,.$$

Здесь имеем

$$\mathrm{div}\left(-\mathrm{grad}\,\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}\right)=-\nabla^2\varphi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}\right)=$$

$$=-\nabla^2\varphi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=4\pi\rho$$

откуда

$$\Box\varphi=4\pi\rho-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \qquad (15.5)$$

4. Весьма существенно, что уравнения (15.4) –(15.5) можно значительно упростить, пользуясь произволом, содержащимся в определениях (15.3). Действительно, потенциалы можно изменить как угодно, лишь бы при этом не менялись значения получаемых с их помощью напряженностей поля. Разные способы выбора эквивалентных потенциалов называют разными их калибровками . Независимость физического содержания теории от вида калибровки называется ее калибровочной инвариантностью.

Покажем, что уравнения Максвелла инвариантны относительно калибровочного преобразования

$$\vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A}+\mathrm{grad}\,\varphi\,,\quad \varphi\to\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\,,\quad \forall\psi\,. \qquad (15.6)$$

Действительно, для магнитного поля имеем

$$\vec{H}'=\mathrm{rot}\vec{A}'=\mathrm{rot}\vec{A}+\mathrm{rot}\;\mathrm{grad}\;\psi=\mathrm{rot}\vec{A}=\vec{H}\,,$$

И для электрического поля

$$\vec{E}'=-\mathrm{grad}\,\varphi'-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=\left(-\mathrm{grad}\,\varphi+\frac{1}{c}\mathrm{grad}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\left[\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{grad}\,\psi\right)\right]=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\vec{E}\,.$$

4. Калибровочная инвариантность позволяет наложить на потенциалы некоторые дополнительные условия, основным из которых является условие Лоренца

$$\mathrm{div}\,\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\,. \qquad (15.7)$$

В лоренцевской калибровке уравнения (15.4)- (15.5) для потенциалов превращаются в обычные уравнения Даламбера:

$$\Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \text{и} \qquad \Box\varphi = -4\pi\rho \ . \tag{15.7}$$

Покажем, что путем подходящего калибровочного преобразования всегда можно сделать так, чтобы потенциалы удовлетворяли условию Лоренца. Пусть сначала

$$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} \equiv \chi(\vec{r},t) \neq 0 \ .$$

Совершив калибровочное преобразование с функцией ψ получим

$$\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \left(\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = \chi(\vec{r},t) \ .$$

Потребуем теперь, чтобы функция ψ подчинялась уравнению Даламбера

$$\Box\psi = \chi(\vec{r},t) \ .$$

Это уравнение имеет бесконечно много решений, и выбор любого из них в качестве ψ приводит к потенциалам, удовлетворяющим условию Лоренца.

Заметим, что условием Лоренца (15.7) потенциалы еще не определяются однозначно, ибо над ними можно совершить калибровочное преобразование (15.6), хотя и не с произвольной функцией ψ, а с функцией ψ_O, подчиняющейся волновому уравнению: $\Box\psi_O = 0$.

При таком преобразовании поля естественно не изменяются, причем условие Лоренца также не нарушается:

$$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla^2\psi_O - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi_O}{\partial t^2} = \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Box\psi_O = \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Иногда используется кулоновская калибровка

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0 \ , \tag{15.8}$$

В которой уравнения для потенциалов имеют вид

$$\Box\vec{A} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}, \qquad \nabla^2\varphi = -4\pi\rho \ . \tag{15.9}$$

Второе из них и оправдывает соответствующее название.

§ 16. Уравнения Максвелла – Лоренца и энергия поля.

1. Максвелл сформулировал уравнения электромагнитного поля для материальной среды (хотя мы их записали для пустоты), считая распределение токов и зарядов заданными.

Однако в общем случае движущиеся заряды создают электромагнитное поле, которое изменяет состояние движения зарядов, что приводит к изменению в создаваемом им поле, и т.д. В итоге возникает сложнейшая самосогласованная задача для совместного описания электромагнитного поля и создающих его зарядов. Соответствующие уравнения были сформулированы Лоренцем.

Для их получения в принципе достаточно дополнить уравнения Максвелла (13.33) уравнениями движения всех зарядов, не считая их состояние заранее заданным. Последние, очевидно, имеют вид

$$\dot{\vec{p}}_a \equiv m_a \ddot{\vec{r}}_a = e_a \left\{ \vec{E}(\vec{r}_a) + \frac{1}{c}\left[\vec{v}(\vec{r}_a),\ \vec{H}(\vec{r}_a) \right] \right\} . \tag{16.1}$$

Поля, входящие в правую часть, создаются и всеми другими зарядами и самим рассматриваемым зарядом с номером a. Собственное поле приводит к таким важным явлениям, как перенормировочные эффекты и наличие радиационного трения. Однако, в классической (неквантовой) физике эти эффекты не столь уж существенны, и мы ими пока будем пренебрегать.

Теперь мы намерены проанализировать понятие энергии электромагнитного поля. Соответствующее рассмотрение проведем в три этапа.

1. Сначала считаем, но теперь чисто формально, электромагнитное поле заданным, и проводим анализ для заряженных частиц. Умножая обе части уравнения (16.1) скалярно на скорость $\vec{v}_a$ и проводя очевидные преобразования, будем иметь обычный закон изменения кинетической энергии заряженной частицы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_a v_a^2\right) \equiv \frac{dT_a}{dt} = e_a \left(\vec{v}_a, \vec{E}_a\right) . \tag{16.2}$$

Перепишем его в полевой форме, т.е. в форме уравнения типа уравнения непрерывности (13.11). Перейдем с этой целью формально к непрерывному распределению заряда, выделим физически бесконечно малый объем $d\tau$ и запишем закон (16.2) для содержащегося в нем заряда. Учтем, что

$$dT = \mathcal{E}\, d\tau , \qquad de = \rho\, d\tau , \qquad de \cdot \vec{v} = d\tau \cdot \rho \vec{v} = \vec{j}\, d\tau , \tag{16.3}$$

где $\mathcal{E}$ - <u>плотность кинетической энергии частиц</u>

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} \cdot n \tag{16.4}$$

(n - концентрация, причем для простоты частицы считаются одинаковыми). В итоге вместо (16.2) получим

$$\frac{d(\mathcal{E}\, d\tau)}{dt} = \left(\vec{j},\ \vec{E}\right) d\tau . \qquad 16.5)$$

Проводя интегрирование по произвольному объему, будем иметь

$$\frac{DT}{dt} \equiv \frac{D}{Dt}\int_V \mathcal{E}\, d\tau = \int_V \left(\vec{j},\ \vec{E}\right) d\tau\ . \tag{16.6}$$

Входящая в левую часть полная производная по времени имеет довольно хитрый смысл. Дело в том, что она задает полную скорость изменения кинетической энергии частиц в данном объеме. Но это изменение определяется двумя факторами: изменением состояния движения частиц в выделенном объеме и вытеканием их за его границы. Введем плотность потока кинетической энергии частиц

$$\vec{q} = \mathcal{E}\vec{v} = \frac{mv^2}{2}\vec{v}\cdot n\ , \tag{16.7}$$

которая есть количество кинетической энергии, протекающей в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную вектору скорости частиц данной точке пространства. Тогда соотношение (16.6) перепишется как

$$\int_V \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} d\tau + \oint_\Sigma \left(\vec{q}, d\vec{S}\right) = \int_V \left(\vec{j},\ \vec{E}\right) d\tau\ . \tag{16.8}$$

Применяя теорему Гаусса – Остроградского и учитывая произвольность области интегрирования, придем к закону изменения кинетической энергии частиц в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{q} = \left(\vec{j},\ \vec{E}\right)\ . \tag{16.9}$$

Итак, для кинетической энергии получено уравнение типа уравнения непрерывности. Из него видно, что работа электрического поля имеет смысл интенсивности источников энергии частиц. Поскольку она отлична от нуля, кинетическая энергия системы зарядов не сохраняется. Результат совершенно очевидный: энергия частиц может «перекачиваться» в энергию поля и наоборот.

2. Попробуем теперь получить уравнение типа уравнения непрерывности для плотности распределения какой-то субстанции, связанной с электромагнитным полем. При этом стремимся к тому, чтобы в правой его части фигурировала также величина $\left(\vec{j},\ \vec{E}\right)$, но с обратным знаком.

Для этого возьмем уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\ . \tag{16.10}$$

первое из них умножим скалярно на $\vec{H}$, второе на $\vec{E}$ и вычтем результаты:

$$\left\{\left(\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{E}\right) - \left(\vec{E}, \operatorname{rot}\vec{H}\right)\right\} = \left\{-\frac{1}{c}\left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\right\} - \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}\vec{E}\right)\ .$$

Вспоминая формулу векторного анализа

$$\operatorname{div}\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\vec{b},\,\operatorname{rot}\vec{a}\right)-\left(\vec{a},\,\operatorname{rot}\vec{b}\right)\ ,$$

учитывая тождество

$$\left(\vec{a},\ \frac{\partial\vec{a}}{\partial t}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{a}^2}{\partial t}$$

и умножая обе части на $\frac{c}{4\pi}$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right)+\operatorname{div}\left\{\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\ \vec{H}\right]\right\}=-\left(\vec{j},\ \vec{E}\right)\ . \qquad (16.11)$$

Вводя обозначение

$$W=\frac{E^2+H^2}{8\pi} \qquad (16.12)$$

и

$$\vec{\Pi}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\ \vec{H}\right] \qquad (16.13)$$

Соотношение (16.11) можно будет записать как

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{\Pi}=-\left(\vec{j},\vec{E}\right)\ . \qquad (16.14)$$

В итоге вновь полученное уравнение типа уравнения непрерывности для некоей чисто полевой субстанции. Ее плотность распределения есть W, причем ясно, что вектор $\vec{\Pi}$ следует интерпретировать как плотность потока этой субстанции, а величину $-\left(\vec{j},\vec{E}\right)$ - как интенсивность ее источников.

3. Для выяснения смысла величин (16.12) – (16.13) рассмотрим полную систему частицы-поле и сложим соотношение (16.9) и (16.14):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{E}+W)+\operatorname{div}\left(\vec{q}+\ \vec{\Pi}\right)=0 \qquad (16.15)$$

В итоге приходим к настоящему уравнению непрерывности без источников, выражающему некоторый закон сохранения.

Теперь интерпретация соответствующих величин становится очевидной. Поскольку $\mathcal{E}$ есть плотность энергии (кинетической) заряженных частиц, то W имеет смысл <u>плотности энергии электромагнитного поля</u>. Так как $\vec{q}$ есть плотность потока кинетической энергии частиц, то $\vec{\Pi}$ нужно рассматривать как плотность потока электромагнитной энергии. Вектор $\vec{\Pi}$ обычно называется вектором Пойнтинга. Работа же $-\left(\vec{j},\vec{E}\right)$ поля над зарядами скомпенсировалась работой $-\left(\vec{j},\vec{E}\right)$ зарядов над полем, в результате чего мы и пришли к закону сохранения энергии для системы частицы-поле.

Результаты становятся еще более прозрачными, если переписать уравнение непрерывности (16.15) в проинтегрированной форме. Интегрируя его по всему пространству и пользуясь теоремой Гаусса, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_\infty}\left(\mathcal{E}+W\right)d\tau=-\oint\limits_{\Sigma_\infty}\left(\vec{q}+\vec{\Pi}\right)d\vec{S} \qquad (16.16)$$

где Σ_∞ - бесконечно удаленная поверхность, т.е., поверхность, диаметр которой стремится к бесконечности.

Если частицы совершают финитное движение, то

$$\vec{q}\Big|_{\Sigma_\infty}=0 \ .$$

Если к тому же напряженности убывают по модулю при $r\to\infty$ быстрее, чем $1/r$, то поверхностный интеграл в (16.17) обратится в нуль, и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_\infty}(\varepsilon+W)\,d\tau=0 \ \Leftrightarrow \ \int\limits_{V_\infty}(\varepsilon+W)\,d\tau=\mathrm{const} \qquad (16.18)$$

Поскольку первое слагаемое здесь есть полная кинетическая энергия частиц, то второе естественно отождествить с полной энергией поля, а величину W – с ее плотностью.

При интегрировании по конечному объему придем к соотношению

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V}(\varepsilon+W)\,d\tau=-\oint\limits_{\Sigma}(\vec{q}+\vec{\Pi})\,d\vec{S} \ , \qquad (16.19)$$

правая часть которого уже не равна нулю. Она представляет собой убыль полной энергии в объеме V за счет вытекания ее через поверхность Σ_∞. Первое слагаемое справа есть поток кинетической энергии частиц, а потому второе естественно отождествлять с потоком энергии поля, а вектор $\vec{\Pi}$ - с плотностью этого потока.

Подчеркнем следующее важное обстоятельство. В некоторых задачах электродинамики модули напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ убывают при $r\to\infty$ всего лишь как $1/r$. Тогда поверхностный интеграл в (16.17) не обратится в нуль, сохраняя на больших расстояниях постоянное значение. Это означает, что физическая система теряет часть энергии на излучение электромагнитного поля. Соответствующие задачи будут проанализированы ниже.