§2. Элементы матричного исчисления

1. Уже введено фундаментальное понятие оператора. Во многих случаях эти фундаментальные величины допускают конкретную реализацию в виде матриц , исчисление которых мы сейчас и опишем.
2. Матрицей порядка $m\times n$ называется упорядоченное множество (комплексных чисел), расположенных в прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов:

$$F\equiv F_j^k=\begin{pmatrix} F_1^1 & F_1^2 & \dots & F_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_m & F_m^2 & \dots & F_m^n \end{pmatrix} \overset{\text{symb}}{=} \boxed{\quad F \quad} .$$

Индексы j , k матричного элемента F_j^k указывают номер его строки и столбца, соответственно. Чаще всего их ставят вместе, записывая F_{jk} , но это нам представляется гораздо менее удобным, наглядным и строгим.

3. Обычно мы будем иметь дело с матрицами следующих трех типов:
   а). Квадратные матрицы порядка $n\times n$.

$$F=\begin{pmatrix} F_1^1 & \dots & F_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ F_n^1 & \dots & F_n^n \end{pmatrix} \overset{\text{symb}}{=} \boxed{\quad F \quad} ,$$

   б) матрицы-столбцы порядка $n\times 1$:

$$\psi=\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \overset{\text{symb}}{=} \boxed{\psi} ,$$

   в) матрицы –строки порядка $n\times 1$:

$$\tilde{\psi}=\left(\psi_1,\psi_2,\dots\psi_n\right) \overset{\text{symb}}{=} \boxed{\quad \psi \quad} .$$

   Как мы увидим в дальнейшем, первые представляют операторы в линейном пространстве $\mathbb{C}^n$, вторые – векторы $\psi\in\mathbb{C}^n$, а последние – векторы $\tilde{\psi}\in\tilde{\mathbb{C}}^n$, где $\tilde{\mathbb{C}}^n$ - так называемое сопряженное пространство. В другой терминологии величины ψ отождествляются с контравариантными , а $\tilde{\psi}$ - с ковариантными векторами.

4. Понятие матрицы становится содержательным лишь после введения в множестве этих объектов основных алгебраических операций.
   а). Матрицы F и G называются равными $\left(F=G\right)$, если их порядки одинаковы и если соответствующие матричные элементы совпадают:

$$F_j^k=G_j^k .$$

   б). Суммой матриц F и G называется матрица $H=F+G$ с элементами

$$H_j^k = F_j^k + G_j^k$$

(складывать можно лишь матрицы одинаковых порядков).
в). <u>Произведением</u> матрицы F на число λ называется матрица с элементами

$$G_j^k = \lambda F_j^k$$

г). Перемножение матриц вводится более сложным образом, и его естественность будет оправдана в процессе установления матричной интерпретации операторов. Произведением матриц F и G называется матрица $H = FG$ с элементами

$$H_j^k = \sum_{i=1}^{M} F_i^k G_j^i$$

Таким образом, перемножать можно лишь матрицы порядков $m \times M$ и $M \times n$, т.е. матрицы, число столбцов первой из которых равно числу строк второй. Часто порядки перемножаемых матриц заранее фиксированы. Тогда чрезвычайно удобным оказывается эйнштейновское обозначение суммирования. А именно, если имеется два одинаковых индекса, левый из которых стоит внизу, а правый вверху, то знак суммы опускают, записывая просто

$$H_j^k \equiv \left(FG\right)_j^k = F_i^k G_j^i \ .$$

Имеет смысл и величина

$${}^{/}H_j^k = F_j^i G_i^k = G_i^k F_j^i \ ,$$

Но такая запись обозначает, что матрицы перемножаются в обратном порядке, т.е. ${}^{/}H = GF$. Умножение же матриц не коммутативно:

$$FG \neq GF .$$

Применим общее определение произведения к матрицам трех указанных выше типов. В символической записи имеем

$$\boxed{\quad F \quad} \times \boxed{\quad G \quad} = \boxed{\quad H \quad}, \qquad \text{или} \qquad F_i^j G_k^i = H_k^j \ ;$$

$$\boxed{\quad F \quad} \times \boxed{\psi} = \boxed{\varphi}, \qquad \text{или} \qquad F_i^j \psi^i = \varphi^j$$

Уже отсюда видно, что квадратную матрицу $n \times n$ можно рассматривать как отображение множества матриц $1 \times n$ в себя. Далее имеем

$$\boxed{\psi} \times \boxed{\quad F \quad} \quad \text{- не определено ,}$$

чем еще раз подчеркивается некоммутативность произведения матриц. Для перемножения строки на квадратную матрицу ситуация противоположна: произведение

$$\boxed{\;F\;} \times \boxed{\;\tilde{\psi}\;} \qquad \text{- не определено,}$$

а

$$\boxed{\;\tilde{\psi}\;} \times \boxed{\;F\;} = \boxed{\;\tilde{\varphi}\;} \qquad \text{или} \qquad \tilde{\psi}_i F^i_j = \tilde{\varphi}_j \,.$$

Осталось рассмотреть перемножение строк и столбцов. Здесь имеем

$$\boxed{\;\tilde{\psi}\;} \times \boxed{\varphi} = \boxed{\lambda} \qquad \text{или} \quad \tilde{\psi}_i \varphi^i = \lambda \,,\ \text{т.е. число,}$$

и

$$\boxed{\psi} \times \boxed{\;\tilde{\varphi}\;} = \boxed{\;F\;} \qquad \text{или} \qquad \psi^i \tilde{\varphi}_j = F^i \,,$$

т.е. в итоге возникает квадратная матрица порядка $n \times n$ называемая тензорным произведением столбца ψ на строку $\tilde{\varphi}$:

$$F \equiv \psi \otimes \tilde{\varphi}$$

д). В множестве квадратных матриц фиксированного порядка $n \times n$ можно ввести еще одну важную (но внешнюю) операцию – образование определителя, или <u>детерминанта</u> , который вводится формулой

$$\det\ F \equiv |F| \equiv \begin{vmatrix} F^1_1 & \dots & F^n_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ F^1_n & \dots & F^n_n \end{vmatrix} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum (-1)^{\eta} F^{k_1}_{j_1}, \dots, F^{k_n}_{j_n} \ .$$

При этом суммирование проводится по всем перестановкам верхних и нижних индексов (в каждом произведении все сомножители различны), а η - полная четность соответствующей перестановки. Не останавливаясь на деталях, упомянем важную формулу

$$\det\ (FG) = \det\ F \cdot \det\ G$$

И правило вычисления определителя путем раскрытия его по элементам какой-то строки или столбца.

Если для заданной матрицы F найдется матрица F^{-1} со свойствами

$$FF^{-1} = F^{-1}F = I,$$

Где I - единичная матрица

$$I \equiv \delta_j^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то ее называют матрицей, обратной к F. В алгебре доказывается, что F^{-1} существует тогда и только тогда, когда матрица F невырожденная, т.е.

$$\det F \neq 0,$$

И при этом дается рецепт ее отыскания. Мы на этом не останавливаемся.

5. Введенные операции наделяют множество всех матриц богатой алгебраической структурой.

а). Из (4а) – (4в) явствует, что множество матриц фиксированного порядка $m \times n$ образует вещественное или комплексное линейное пространство размерности mn.

б). Таковым является , в частности, множество всех квадратных матриц $n \times n$ с размерностью n^2. Но тут для каждых двух элементов введено умножение, обладающее свойством ассоциативности и дистрибутивности (но не коммутативности). Подобная структура называется некоммутативной алгеброй

в). В множестве всех невырожденных квадратных матриц порядка $n \times n$ определено ассоциативное произведение, существует единица и каждому элементу соответствует обратный, а потому оно образует группу. Конкретные примеры матричных групп будут описаны несколько ниже.

6. Среди квадратных матриц особую роль играют диагональные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы, стоящие на главной диагонали. Особенно важный частный случай диагональных матриц – единичную матрицу I - мы уже упоминали. Не менее важной является нулевая матрица Θ, все элементы которой равны нулю. Очевидно, что для всякой матрицы

$$F\Theta = \Theta F = \Theta \ .$$

7. Из заданной матрицы F можно образовать ряд других матриц.

а). Матрица $\tilde{F}$, получаемая из заменой строк столбцами и наоборот, называется транспонированной к F :

$$\tilde{F}_j^k = F_k^j$$

Если F имеет порядок $m \times n$, то порядок $\tilde{F}$ равен $n \times m$. В частности, строка $\tilde{\psi}$ транспонирована к столбцу ψ, откуда и введенное обозначение. Если

$$\tilde{F} = F,$$

то матрица F называется симметричной.

б). Переходя в матрице F к комплексно-сопряженным элементам без изменения их расположения, мы получим матрицу $\bar{F}$, комплексно-сопряженную к F:

$$\bar{F}_j^k = \overline{F_j^k} \ .$$

Порядки $\bar{F}$ и F совпадают. Если $\bar{F} = F$, то говорят, что матрица F вещественна, ибо таковы все ее элементы.

в). Матрица F^* (в физической литературе F^+), получаемая из F путем транспонирования и последующего комплексного сопряжения, или наоборот, называется эрмитово-сопряженной (или сопряженной) к F:

$$\left(F^*\right)_j^k = \overline{\left(\tilde{F}_j^k\right)} = \overline{F_k^j}$$

Если F имеет порядок $m \times n$, то порядок F^* равен $n \times m$. В частности, столбцу

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

отвечает сопряженная ему строка

$$\psi^* = \left(\bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_n\right) \ .$$

Произведение этих матриц есть число

$$\varphi^* \psi = \bar{\varphi}_1 \psi_1 + \ldots + \bar{\varphi}_n \psi_n = \sum_{j=1}^{n} \bar{\varphi}_j \psi_j \ .$$

Если $F^* = F$, то матрица называется эрмитовой, или самосопряженной
Именно такие матрицы чаще всего встречаются в физике – особенно в квантовой механике. Очевидно, что у эрмитовой матрицы диагональные элементы вещественны. Если

$$F^* F = F F^* = I \ ,$$

то матрица F называется унитарной, - такие объекты также чрезвычайно важны в квантовой механике.

В случае, когда матрица F унитарна и вещественна, она обладает свойствами

$$\tilde{F} F = F \tilde{F} = I \ .$$

Такие матрицы называются вещественными ортогональными . Естественное обобщение – просто ортогональные матрицы, т.е. комплексные матрицы, для которых выполняются условия

$$\tilde{F} F = F \tilde{F} = I \ .$$

г). Понятие обратной матрицы было введено выше. Напомним, что по определению

$$FF^{-1} = F^{-1}F = I$$

д). Отметим, что единичная матрица I является наиболее симметричной – в том смысле, что для нее:

$$I^{-1} = \tilde{I} = \overline{I} = I^{*} = I \ ,$$

т.е. она обратна самой себе, симметрична, вещественна, эрмитова, унитарна и вещественно ортогональна.

8. Приведем следующие легко проверяемые соотношения для произведения квадратных матриц:

а). $\left(FG\right)^{-1} = G^{-1}F^{-1}$,

б). $\widetilde{FG} = \tilde{G}\tilde{F}$,

в). $\overline{FG} = \overline{F}\,\overline{G}$,

г). $\left(FG\right)^{*} = G^{*}F^{*}$.

Действительно,

$$\left(FG\right)\left(G^{-1}F^{-1}\right) = F\left(GG^{-1}\right)F^{-1} = FIF^{-1} = FF^{-1} = I \ ,$$

Как это и должно быть для матрицы, обратной к FG. Далее,

$$\left(\widetilde{FG}\right)^{k}_{j} = \left(FG\right)^{j}_{k} = F^{j}_{i}G^{i}_{k} = \tilde{F}^{i}_{j}\tilde{G}^{k}_{i} = \tilde{G}^{k}_{i}\tilde{F}^{i}_{j} = \left(\tilde{G}\tilde{F}\right)^{k}_{i}$$

Откуда вытекает (б). Соотношение (в) проверяется элементарно, а последнее есть простое следствие равенств (б) и (в).

9. В заключение параграфа рассмотрим конкретные примеры матричных групп.

а). Уже упоминалось, что множество всех невырожденных комплексных матриц порядка $n\times n$ образует относительно операций матричного умножения группу. Она обозначается как $GL\left(n,\mathbb{C}\right)$ и называется общей линейной комплексной группой n-го порядка (G – general , L – linear , $\mathbb{C}$ – complex). Согласно теореме Адо, изучение всякой так называемой группы Ли (непрерывной группы) сводится к изучению некоторой подгруппы некоторой группы $GL\left(n,\mathbb{C}\right)$.

б). Совокупность матриц $g \in GL\left(n,\mathbb{C}\right)$ со свойством

$$\det g = 1$$

образует группу $SL\left(n,\mathbb{C}\right)$ (S – special - означает унимодулярность).

в). Рассмотрим в $GL\left(n,\mathbb{C}\right)$ подмножества, задаваемые уравнениями

$$\tilde{g}Ag = A \qquad (*)$$

$$g^* A g = A \qquad (**)$$

Каждое из этих матричных уравнений эквивалентно системе из n^2 обычных уравнений относительно n^2 неизвестных – матричных элементов g_i^j . Обозначим через I_n единичную матрицу порядка $n \times n$.

1). Если $A = I_n$, то уравнение $(*)$ задает совокупность комплексных матриц со свойством ортогональности

$$\tilde{g} g = I \ .$$

Они образуют группу $O(n, \mathbb{C})$ (ортогональную группу).

2) Если $A = I_n$, то уравнение $(**)$ задает совокупность комплексных матриц со свойством унитарности

$$g^* g = I \ .$$

Они образуют унитарную группу $U(n)$.

3). Если A - <u>кососимметрическая</u> матрица порядка $2n \times 2n$ вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} ,$$

То уравнение $(*)$ задает совокупность симплектических матриц, образующих симплектическую группу $Sp(2n, \mathbb{C})$.

г). Пересечение группы $U(n)$ с введенными группами порождает три серии более узких групп:

1) унитарная группа $U(n) = U(n) \cap GL(n, \mathbb{C})$,
2) вещественная ортогональная группа $O(n) = U(n) \cap O(n, \mathbb{C})$,
3) вещественная симплектическая группа $Sp(2n) = U(n) \cap Sp(2n, \mathbb{C})$.

Эти группы допускают единое описание – они суть совокупности матриц, удовлетворяющих уравнению $(**)$ при $A = I_n$, причем в первом случае комплексных, во втором – вещественных, в третьем – кватернионных. Интересно отметить, что согласно теореме Фробениуса , поле вещественных чисел, поле комплексных чисел и тело кватернионов являются единственными ассоциативными алгебрами с делением над полем вещественных чисел.

д). Примеры из предыдущего пункта допускают естественное обобщение, если в уравнении $(**)$ положить

$$A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} .$$

Тогда получим в случае

1). Вещественных чисел – псевдоортогональную группу $O(p,q)$ играющую при $p=1$, $q=3$ фундаментальную роль в теории относительности; с частным случаем группы $O(1,1)$ (гиперболические повороты) мы уже встречались;

2). Комплексных чисел – псевдоунитарную группу $U(p,q)$ появляющуюся в некоторых случаях (например, при $p=q=6$) в современной теории элементарных частиц;

3). Кватернионов - псевдосимплектическую группу $Sp(p,q)$.

е). Дальнейшее сужение серий групп достигается путем их пересечения с $SL(n,\mathbb{C})$, т.е. рассмотрением матриц с единичным детерминантом. Таким способом получаются группы

$$SL(n,\mathbb{C})\ ,\quad SU(n)\ ,\quad SO(n,\mathbb{C})\ ,$$

или, в более ограничительном случае (г) – группы

$$SU(n)\ ,\quad SO(n)\,.$$

Интересно отметить, что две эти серии совместно с $Sp(2n)$ исчерпывают вообще все так называемые классические полупростые компактные группы Ли (теорема Картана). Соответствующие группы допускают естественное инвариантное геометрическое описание на языке свойств отвечающих им линейных преобразований, но мы на этой проблеме пока не останавливаемся.

В о п р о с ы   и   з а д а ч и

1. Поупражняться в перемножении матриц различного типа, установить некоммутативность этой операции.
2. Как связан детерминант данной матрицы с детерминантом матрицы, транспонированной к ней? комплексно сопряженной ей? эрмитово сопряженной ей? обратной к ней?
3. Чему равен детерминант унитарной матрицы? Вещественной ортогональной матрицы?
4. Доказать, что совокупности матриц, описанные в п.9, являются группами.
5. Найти размерности (размерность группы – число независимых вещественных параметров, необходимых для задания ее элемента) следующих групп (в скобках приведены ответы)

$$GL(n,\mathbb{C})\ \left[2n^2\right],\quad SL(n,\mathbb{C})\ \left[2\left(n^2-1\right)\right],\quad U(n)\ \left[n^2\right],\quad SU(n)\ \left[n^2-1\right],$$

$$O(n,\mathbb{C})\ \left[n(n-1)\right],\quad O(n)\ \left[\frac{n(n-1)}{2}\right],\quad SO(n,\mathbb{C})\ \left[n(n-1)\right],\quad SO(n)\ \left[\frac{n(n-1)}{2}\right].$$

6^*. Доказать, что всякая вещественная симплектическая матрица автоматически унимодулярна.