§3. Трехмерная ортогональная группа

1. Рассмотрим весьма важный пример пространства $\mathbb{R}^3$. В заданной системе координат его точки отождествляются с их радиусами- векторами X, компоненты которых мы будем располагать в столбец:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad x^i \in \mathbb{R} \, ,$$

Введем также сопряженное пространство $\tilde{\mathbb{R}}^3$ ковекторов

$$\tilde{X} = \left(x_1, \; x_{2,} \;\; x_3 \right), \text{ где численно } x_i = x^i .$$

2. Повернем теперь произвольным образом систему координат S, переходя к S'. При этом координаты векторов и ковекторов будут претерпевать некоторое линейное преобразование, так что мы имеем

$$x^{i'} = \Omega^{i'}_i x^i \qquad \text{и} \qquad x_{i'} = \Omega^i_{i'} x_i = x_i \Omega^i_{i'} \, ,$$

где числа $\Omega^{i'}_i$, зависящие от преобразования, образуют квадратную матрицу порядка 3×3. Учитывая правила перемножения матриц, в сокращенной записи имеем

$$X' = \Omega X \qquad \text{и} \qquad \tilde{X}' = \tilde{X}\tilde{\Omega},$$

где $\tilde{\Omega}$ - матрица, транспонированная к Ω.

3. Потребовав сохранения длины радиуса-вектора

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \equiv x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 \equiv x_i x^i \equiv \tilde{X} X$$

получим

$$\tilde{X}' X' = \tilde{X}\tilde{\Omega}\Omega X = \tilde{X} X \equiv \tilde{X} I X \, ,$$

откуда

$$\tilde{\Omega}\Omega = I \;\; \text{, или, подробнее, } \Omega^i_{i'} \Omega^{i'}_j = \delta^i_j \, .$$

Таким образом, преобразования, сохраняющие длины радиусов-векторов, реализуются вещественными матрицами порядка 3х3, которые образуют трехмерную ортогональную группу $O(3)$.

4. Для определения матрицы Ω имеем

$$\det\left(\tilde{\Omega}\Omega\right) = \det \tilde{\Omega} \cdot \det \Omega = \left(\det \Omega\right)^2 = \det \; I{=}1 \, ,$$

откуда

$$\det \Omega {=} \pm 1 \, ,$$

и все преобразования из $O(3)$ разбиваются на два класса (+ 1 и – 1, соответственно – собственные вращения Ω_+ и несобственные вращения Ω_- , причем последние включают пространственную инверсию).

5. Выясним теперь формальную структуру группы $O(3)$. У нее есть две важные подгруппы

$$\{\Omega_+\} = SO(3) \qquad \text{и} \qquad \{I,\ J\} = P_i\,,$$

где J - пространственная инверсия. Элементы из разных подгрупп коммутируют друг с другом, причем каждый элемент $\Omega \in O(3)$ можно представить в виде произведения элементов из $SO(3)$ и P_i:

$$\Omega_+ = \Omega_+ I\,, \qquad \Omega_- \equiv \Omega_- I = \Omega_-(JJ) = (\Omega_- J)J = \Omega_+ J\,.$$

<u>Определение</u>. Прямым произведением $G = G' \times G''$ групп G' и G'' называется группа упорядоченных пар $(g',\ g'')$ с законом композиции

$$g_1 g_2 \equiv (g_1', g_1'')(g_2', g_2'') = (g_1' g_2', g_1'' g_2'')\,.$$

Из сказанного и из определения явствует, что группа $O(3)$ есть прямое произведение ее указанных подгрупп:

$$O(3) = SO(3) \times P_i\,.$$

Это замечание будет играть чрезвычайно важную роль при введении в последующих параграфах понятий тензоров и псевдотензоров.

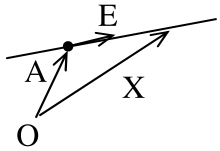
6. У группы $O(3)$ имеются инварианты – длины, углы, объемы. Например,

$$V' = \int dx_1' dx_2' dx_3' = \int \left|\frac{\partial(x_1', x_2', x_3')}{\partial(x_1, x_2, x_3)}\right| dx_1 dx_2 dx_3 = \int |\det\ \Omega| dx_1 dx_2 dx_3 = \int dx_1 dx_2 dx_3 = V\,.$$

Другой геометрический аспект – существование ковариантов и ковариантных соотношений. Простейшими ковариантами являются вектора A^i с законом преобразования

$$A^{i'} = \Omega^{i'}_i A^i\text{, или, короче, } A = \Omega A\,.$$

7. Пример ковариантного соотношения дает уравнение прямой:



$$X = A + \alpha E \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Omega X = \Omega A + \alpha \Omega E \quad \Rightarrow \quad X' = A' + \alpha E'\,.$$

В физике это означает, что прямолинейность движения имеет смысл, инвариантный относительно вращений системы координат.

Ковариантным является и основной закон механики – второй закон Ньютона. Например, для системы гравитирующих точек он имеет вид

$$m_a \frac{d^2X_a}{dt^2} = \sum_{b\neq a} \gamma m_a m_b \frac{X_b - X_a}{|l_{ab}|^2} \ .$$

Ковариантность уравнений проявляется в том, что в их левой и правой частях стоят сопреобразующиеся величины, - в наших примерах векторы. Ковариантность геометрических соотношений и физических уравнений относительно вращений свидетельствует об изотропности пространства.

Рассмотрим чуть подробнее группу собственных вращений $SO(3)$. Она является непрерывной группой – состоит из преобразований, каждое из которых можно получить из любого другого непрерывным образом. Произвольный элемент $g \in SO(3)$ можно задать с помощью трех независимых вещественных параметров, причем существуют различные типы параметризации.

а). Положение повернутой системы координат относительно исходной задает ортогональная матрица Ω порядка 3×3, содержащая 9 элементов. Но на них наложено 6 независимых условий ортогональности, и в качестве параметров можно взять любые 3 элемента матрицы Ω.

б). Положение повернутой системы координат относительно исходной можно задавать с помощью трех углов Эйлера φ, ψ, θ. Такая параметризация широко используется в механике твердого тела.

в). Наиболее удобной с точки зрения теории групп является параметризация элементов группы вращений тремя компонентами α_1, α_2, α_3 вектора поворота – вектора $\vec{\alpha}$, направленного вдоль оси вращения и по модулю равного углу поворота, который считается меньше или равным π. Ниже принимается именно эта параметризация.

Итак, всякий элемент $g \in SO(3)$ записываем как

$$g = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \ .$$

В теории групп важнейшую роль играют инфинитезимальные вращения - бесконечно мало отличающиеся от единичного (тождественного) вращения

$$e = g(0,0,0).$$

Очевидно, что им отвечают бесконечно малые значения параметров. Разлагая произвольное инфинитезимальное вращение в ряд Тейлора по α_j и ограничиваясь первыми нетривиальными членами, запишем

$$g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \cong g(0,0,0) + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \cdot \left.\frac{\partial g(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0} \equiv e + i\sum_{j=1}^{3} f_j \alpha_j \ .$$

Величины

$$f_j = -i \left.\frac{\partial g(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0}$$

Называются генераторами группы вращений (аналогично вводятся генераторы других непрерывных групп). Они представляют собой матрицы порядка 3×3.

Найдем эти матрицы в явном виде. Для f_1 имеем:

$$f_1=-i\frac{\partial g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial\alpha_1}\bigg|_{\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0}=-i\frac{\partial g(\alpha,0,0)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}=-i\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&\sin\alpha\\0&-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\Bigg|_{\alpha=0}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i\sin\alpha&-i\cos\alpha\\0&i\cos\alpha&i\sin\alpha\end{pmatrix}\Bigg|_{\alpha=0}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}.$$

Совершенно аналогично вычисляются два других генератора, и мы имеем:

$$f_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad f_2=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\quad f_3=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что генераторы f_j удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[f_1,f_2]=if_3\ ;\quad [f_3,f_1]=if_2\ ;\quad [f_2,f_3]=if_1\,.$$

Они в точности совпадают с коммутационными соотношениями для матриц Паули и для компонент оператора момента импульса в квантовой механике. Разумеется, ни то, ни другое совпадение не являются случайными. Оба они имеют глубокий смысл.

Оказывается, что по известным генераторам непрерывной группы - в данном случае группы вращений -, которые задают инфинитезимальные преобразования, можно восстановить и произвольные конечные преобразования. Эта реставрация осуществляется формулой

$$g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\exp\left(i\sum_{\alpha=1}^{3}\alpha_j f_j\right).$$

Благодаря этому изучение свойств генераторов и является столь важным. Мало того, переход к ним позволяет перевести сложный групповой и даже топологический анализ на простой язык алгебры, даже не абстрактной, а матричной. Инфенитезимальный метод исследования непрерывных групп восходит к норвежскому математику Софусу Ли. Поэтому непрерывные группы называют группами Ли, а математические структуры, порождаемые их генераторами – алгебрами Ли . Все эти и сходные вопросы будут довольно детально изучены в курсе квантовой механики, где анализ свойств инвариантности и разного рода симметрий играет совершенно фундаментальную роль. Его начал в 30-е г.г. Е.Вагнер, за что он в конце концов был удостоен Нобелевской премии.

§4. Основы векторного исчисления.

Как говорилось ранее, одним из аспектов инвариантности теории относительно трехмерной ортогональной группы $O(3)$ является существование соответствующих ковариантов, т.е. величин, преобразующихся по представлениям этой группы. В данном случае простейшими ковариантами являются <u>скаляры</u> (инварианты) φ, не меняющиеся при преобразованиях из $O(3)$:

$$\varphi' = \varphi$$

и <u>векторы</u>.

<u>Определение</u>. Вектором называется объект, который в заданной декартовой системе координат задается тремя компонентами a^i, преобразующимися по закону

$$a^{i'} = \Omega^{i'}_i a^i$$

Т.е. также как координаты точки, или радиус-вектора.

Так как всегда можно подобрать две точки P и Q с радиусами- векторами X_P и X_Q, такие, что

$$a^i = X^i_P - X^i_Q \ .$$

То вектор представляет собой направленный отрезок. Поэтому мы будем его обозначать, как это обычно и делается, через $\vec{a}$.

а) <u>Элементы векторной алгебры</u>.

Итак, в фиксированной системе координат вектор $\vec{a}$ задается своими компонентами:

$$\vec{a} = \left\{a^1, a^2, a^3\right\} \equiv \left\{a_x, a_y, a_z\right\}.$$

При умножении вектора на число λ (здесь $\lambda \in \mathbb{R}$) и при сложении двух векторов компоненты соответственно умножаются на это число и складываются:

$$\lambda\vec{a} = \left\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right\}, \quad \vec{a}+\vec{b} = \left\{a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z\right\}.$$

Поэтому множество векторов образуют линейное пространство $\mathbb{R}^3$.

<u>Скалярное произведение</u> двух векторов определяется как

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) \equiv \vec{a}\cdot\vec{b} \equiv \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha\,.$$

В компонентах оно записывается следующим образом:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_i b^i$$

Легко видеть, что скалярное произведение есть инвариант группы $O(3)$, ибо

$$a_{i'}b^{i'} = \Omega^j_{i'}\Omega^{i'}_k a_j b^k = \delta^j_k a_j b^k = a_j b^j.$$

При этом оно линейно по своим аргументам:

$$\left(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2, \vec{b}\right) = \lambda_1\left(\vec{a}_1,\vec{b}\right) + \lambda_2\left(\vec{a}_2,\vec{b}\right), \qquad \forall\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}\,.$$

В тензорной алгебре будет доказано, что этими свойствами скалярное произведение определяется единственным образом. Важное геометрическое понятие, связанное со скалярным произведением, - понятие ортогональности двух векторов:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$$

Векторное произведение векторов вводится обычным образом. Оно антикоммутативно: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$, и компоненты его вычисляются по формуле

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Модуль векторного произведения

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha .$$

Задает площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В тензорной алгебре будет показано, что при собственных вращениях векторное произведение преобразуется как обычный вектор, но при инверсии оно ведет себя несколько иначе.

Смешанное произведение трех векторов обладает свойством цикличности

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\left(\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right)\equiv\vec{a}\vec{b}\vec{c},$$

И в координатах записывается как

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Его модуль задает объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. При собственных вращениях смешанное произведение ведет себя как скаляр, но при инверсии меняет знак (см. тензорную алгебру).

Для двойного векторного произведения трех векторов имеет место важная формула

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right),$$

которая с большим трудом доказывается в векторной алгебре, и которую мы с легкостью получим в тензорной алгебре.

Множество всех трехмерных векторов образует линейное пространство $\mathbb{R}^3$, коммутативную группу $\mathbb{R}^3$ со сложением в качестве группового закона композиции, и так называемую алгебру Ли с векторным произведением в качестве закона умножения.

§5. Дифференциальные операции над скалярным и векторным полями

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(\vec{r})=\varphi(x,y,z)$ и векторное поле $\vec{a}(\vec{r})=\vec{a}(x,y,z)$, которым отвечают скаляр и вектор соответственно в каждой точке пространства. Функции φ и a^i считаются непрерывными и дифференцируемыми необходимое число раз. Для записи дифференциальных операций чрезвычайно удобен оператор «набла», определяемый как

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \ .$$

1. <u>Операция первого порядка:</u>

а). Градиент

$$\text{grad}\ \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla}\varphi = \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \ ;$$

б). Дивергенция

$$\text{div}\ \vec{a} \equiv \left(\vec{\nabla}, \vec{a}\right) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \ ;$$

в). Ротор

$$\text{rot}\ \vec{a} \equiv \left[\vec{\nabla}, \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \ ;$$

г). Без названия

$$\left(\vec{b}, \text{grad}\right)\varphi \equiv \left(\vec{b}, \vec{\nabla}\right)\varphi = b_x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b_y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + b_z\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left(\vec{b}, \vec{\nabla}\varphi\right) \equiv \left(\vec{b}, \text{grad}\ \varphi\right)$$

$$\left(\vec{b}, \text{grad}\right)\vec{a} \equiv \left(\vec{b}, \vec{\nabla}\right)\vec{a} = b_x\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + b_y\frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + b_z\frac{\partial \vec{a}}{\partial z} \ .$$

2. <u>Основные операции второго порядка</u>

а). Лапласиан скаляра

$$\Delta\varphi \equiv \nabla^2\varphi = \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\varphi\right) \equiv \text{div grad}\ \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \ ;$$

б). Лапласиан вектора

$$\Delta\vec{a} \equiv \nabla^2\vec{a} \equiv \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right)\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial z^2} \ ;$$

в). Без названия

$$\text{grad}\ \left(\text{div}\ \vec{a}\right) \equiv \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}, \vec{a}\right):$$

<u>3. Неосновные операции второго порядка</u>

$$\text{а). } \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} \equiv \left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla}\vec{a}\right]\right) = 0;$$

$$\text{б). } \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv \left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\varphi\right] = 0;$$

$$\text{в). } \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} \equiv \left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla}\vec{a}\right]\right] = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{a}\right) - \nabla^2\vec{a}.$$

Физический смысл многих из указанных операций будет выяснен в последующих параграфах, а сейчас мы приведем основные формулы векторного анализа. Преобразование заданного дифференциального выражения означает приведение его к форме, содержащей лишь основные дифференциальные операции, которые применяются к одному скаляру или к одному вектору. При выкладках с оператором «набла» следует иметь в виду, что

а) как оператор он действует на все величины, стоящие справа от него;

б) как дифференциальный оператор, он линеен, причем действует на каждую величину по правилу Лейбница;

в) как вектор, он обладает всеми векторными свойствами, кроме собственного направления.

Приведем основные формулы векторного анализа.

1. <u>Градиент</u>

а) $\operatorname{grad}(\alpha\varphi+\beta\psi) = \alpha \operatorname{grad}\varphi + \beta \operatorname{grad}\psi, \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, (5.1а)

б) $\operatorname{grad} r = \dfrac{\vec{r}}{r}$, (5.1б)

в) $\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\,\dfrac{\vec{r}}{r}$, (5.1в)

г) $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi$, (5.1г)

д) $\operatorname{grad}\left(\vec{a},\vec{b}\right) = (\vec{a},\operatorname{grad})\vec{b} + \left(\vec{b},\operatorname{grad}\right)\vec{a} + \left[\vec{a}\ \operatorname{rot}\vec{b}\right] + \left[\vec{b}\ \operatorname{rot}\vec{a}\right]$, (5.1д)

е) $\operatorname{grad}\dfrac{\vec{a}^2}{2} = (\vec{a},\operatorname{grad})\vec{a} + [\vec{a}\ \operatorname{rot}\vec{a}]$, (5.1е)

2. <u>Дивергенция.</u>

а) $\operatorname{div}\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right) = \alpha \operatorname{div}\vec{a} + \beta \operatorname{div}\vec{b}$, (5.2а)

б) $\operatorname{div}\vec{r} = 3$, (5.2б)

в) $\operatorname{div}\{\vec{r}\,\varphi(r)\} = r\,\varphi'(r) + 3\varphi(r)$, (5.2в)

г) $\operatorname{div}(\varphi\,\vec{a}) = \varphi \operatorname{div}\vec{a} + (\vec{a},\operatorname{grad}\varphi)$, (5.2г)

д) $\operatorname{div}\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$, (5.2д)

3. Ротор.

а) $\operatorname{rot}\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)=\alpha \operatorname{rot}\vec{a}+\beta \operatorname{rot}\vec{b}$, (5.3а)

б) $\operatorname{rot}\vec{r}=0$, (5.3б)

в) $\operatorname{rot}\vec{r}\,\varphi(\vec{r})=0$, (5.3в)

г) $\operatorname{rot}\,(\varphi\vec{a})=\varphi \operatorname{rot}\vec{a}+\left[\operatorname{grad}\varphi,\vec{a}\right]$, (5.3г)

д) $\operatorname{rot}\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\left(\vec{b},\operatorname{grad}\right)\vec{a}-\left(\vec{a},\operatorname{grad}\right)\vec{b}+\vec{a}\operatorname{div}\vec{b}-\vec{b}\operatorname{div}\vec{a}$. (5.3д)

4. Без названия

$\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)\vec{b}=\vec{b}\operatorname{div}\vec{a}+\left(\vec{a},\operatorname{grad}\right)\vec{b}$. (5.4)

5. Полная производная по времени

а) $\dfrac{d\varphi(\vec{r},t)}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\vec{v},\ \operatorname{grad}\varphi\right)$, (5.5а)

б) $\dfrac{d\vec{a}(\vec{r},t)}{dt}=\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial t}+\left(\vec{v},\ \operatorname{grad}\right)\vec{a}$. (5.5б)

Докажем в качестве примера наиболее важные из приведенных соотношений.

(5.1г). $$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\vec{\nabla}(\varphi\psi)=\vec{\nabla}_{\varphi}(\varphi\psi)+\vec{\nabla}_{\psi}(\varphi\psi)=\psi\vec{\nabla}\varphi+\varphi\vec{\nabla}\psi= \\ =\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\psi$$

(5.2д). $$\operatorname{div}\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right)=\left(\vec{\nabla}_{a},\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right)+\left(\vec{\nabla}_{b},\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right)= \\ =\left(\vec{b},\left[\vec{\nabla}\vec{a}\right]\right)-\left(\vec{a},\left[\vec{\nabla}\vec{b}\right]\right)=\vec{b}\ \operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\ \operatorname{rot}\vec{b}\ ,$$

(5.0) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}=\left[\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\vec{a}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{a}\right)-\vec{a}\nabla^{2}=\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{a}\right)-\nabla^{2}\vec{a}$,

(5.2г) $$\operatorname{div}\,(\varphi\vec{a})=\left(\vec{\nabla},\varphi\vec{a}\right)=\left(\vec{\nabla}_{\varphi},\varphi\vec{a}\right)+\left(\vec{\nabla}_{a},\varphi\vec{a}\right)= \\ =\left(\vec{a},\vec{\nabla}\varphi\right)+\varphi\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)=\left(\vec{a},\ \operatorname{grad}\varphi\right)+\varphi\ \operatorname{div}\vec{a}\ ,$$

(5.5б) $\dfrac{d\vec{a}(\vec{r},t)}{dt}=\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial t}+\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial x}\dot{x}+\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial y}\dot{y}+\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial z}\dot{z}=\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial t}+\left(\vec{v},\ \operatorname{grad}\right)\vec{a}$.

(5.1д). Это соответственно доказывается наиболее сложно:

$$\operatorname{grad}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{\nabla}_{a}\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\vec{\nabla}_{b}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\underset{b}{\vec{\nabla}_{a}}\underset{a\quad c}{\left(\vec{b},\vec{a}\right)}+\underset{b}{\vec{\nabla}_{b}}\underset{a\quad c}{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}=$$

$$=\left[\vec{b}\left[\vec{\nabla}\vec{a}\right]\right]+\vec{a}\left(\vec{\nabla}_{a},\vec{b}\right)+\left[\vec{a}\left[\vec{\nabla}\vec{b}\right]\right]+\vec{b}\left(\vec{a},\vec{\nabla}_{b}\right)=$$

$$=\left[\vec{b}\left[\vec{\nabla}\vec{a}\right]\right]+\left[\vec{a}\left[\vec{\nabla}\vec{b}\right]\right]+\left(\vec{b},\vec{\nabla}\right)\vec{a}+\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)\vec{b}=$$

$$=\left[\vec{a},\operatorname{rot}\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\operatorname{rot}\vec{a}\right]+\left(\vec{a},\ \operatorname{grad}\right)\vec{b}+\left(\vec{b},\ \operatorname{grad}\right)\vec{a}\ .$$