§9. Элементы кинематики

1. Рассмотрим сначала одну материальную точку, движение которой в заданной системе отсчета полностью определяется векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \ . \tag{9.1}$$

Зная его, можно вычислить вектор скорости

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) \tag{9.2}$$

А затем и квадрат его модуля

$$v^2 \equiv |\vec{v}|^2 = |\dot{r}(t)|^2 \ . \tag{9.3}$$

2. В приложениях удобно пользоваться некоторыми конкретными системами координат, наиболее важные из которых мы сейчас и рассмотрим.
   а). В декартовых координатах закон движения (9.1) выглядит как

$$x = x(t) \ , \quad y=y(t) \ , \quad z=z(t) \tag{9.4}$$

так что для компонент скорости имеем

$$v_x = \dot{x} \ , \quad v_y=\dot{y} \ , \qquad v_z=\dot{z} \ , \tag{9.5}$$

откуда, в силу их ортогональности,

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \tag{9.6}$$

Очень часто приходится вычислять объемные интегралы вида

$$J = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r})\, d\tau \ , \tag{9.7}$$

Причем в данном случае

$$J = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dz\ f(x,y,z) \ . \tag{9.8}$$

б). Если силовое поле является центральным в смысле &7, то частица движется в плоскости (см. гл. II), и здесь удобно пользоваться полярными координатами ρ , φ :

$$x = \rho\cos\varphi \ , \qquad y=\rho\sin\varphi \tag{9.9}$$

В этом случае

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi \ , \qquad \dot{y}=\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi \ ,$$

Так что для квадрата скорости имеем

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2\cos^2\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi - 2\dot{\rho}\rho\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \dot{\rho}^2\sin^2\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2\dot{\rho}\rho\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi$$

Т.е.

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 \ . \tag{9.10}$$

Плоский аналог интеграла (9.8) записывается в полярных координатах как

$$I \equiv \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{\rho})\, dS = \int_0^\infty \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, f(\rho,\varphi) \ . \tag{9.11}$$

в). На трехмерный случай полярные координаты обобщаются двумя наиболее естественными способами. Прежде всего, можно пользоваться <u>цилиндрическими</u> координатами

$$x = \rho\cos\varphi \ , \ \ y=\rho\sin\varphi \ , \ \ z=z \ . \tag{9.12}$$

В этом случае по аналогии с (9.8) имеем

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \ , \tag{9.13}$$

а интеграл (9.8) записывается как

$$J = \int_0^\infty \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(\rho,\varphi,z) \ . \tag{9.14}$$

г). В пространстве очень полезны также <u>сферические</u> координаты

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \ , \ \ y=r\sin\theta\sin\varphi \ , \ \ z=r\cos\theta \tag{9.15}$$

(полярный угол θ отсчитывается от положительного направления оси z).
Здесь

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \tag{9.16}$$

и

$$J = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, f(r,\theta,\varphi) \ . \tag{9.17}$$

3. Приведем для справок очень важные в приложениях выражения для оператора Лапласа в разных системах координат:
   в декартовой

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ , \tag{9.18a}$$

в цилиндрической

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ , \tag{9.18б}$$

в сферической

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega \ , \tag{9.18в}$$

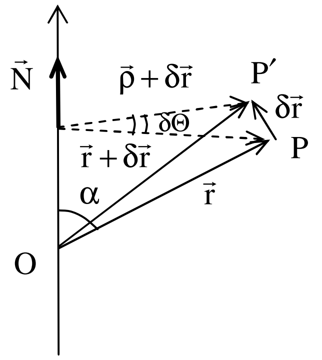
где Δ_Ω называется угловой частью оператора Лапласа. Двумерный оператор Лапласа в полярных координатах является частным случаям выражения (9.18б), в котором следует опустить последнее слагаемое.

4. Введем теперь важную кинематическую характеристику вращательного движения. Пусть частица находится сначала в точке P с радиусом-вектором $\vec{r}$, повернем ее на малый угол $\delta\theta$ относительно прямой ON с единичным вектором направления $\vec{N}$. Тогда перемещение $\delta\vec{r}$ точки P с точностью до членов первого порядка по $\delta\theta$ перпендикулярно плоскости векторов $\vec{N}$ и $\vec{r}$ и равно по модулю

$$\left|\delta\vec{r}\right| = \rho\delta\theta = r\sin\alpha\cdot\delta\theta \ .$$

Поэтому можно записать

$$\delta\vec{r} = \delta\theta\left[\vec{N},\vec{r}\right] \ ,$$



Или, вводя вектор угла малого поворота

$$\delta\vec{\theta} = \delta\theta\cdot\vec{N}$$

получим:

$$\delta\vec{r} = \left[\delta\vec{\theta},\vec{r}\right] \ .$$

Для скорости частицы имеем

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\theta}{dt},\vec{r}\right] \equiv \left[\vec{\omega}\vec{r}\right] \ , \tag{9.19}$$

где вектор

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \tag{9.20}$$

носит название <u>угловой скорости</u> .

5. Очевидно, что эта формула справедлива для всех частиц твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг неподвижной оси, и она задает векторное поле скоростей $\vec{v}\left(\vec{r}\right)$. Вычислим ротор этого векторного поля, считая угловую скорость постоянной. Имеем:

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot } [\vec{\omega}\vec{r}] = (\vec{r}, \text{grad})\vec{\omega} - (\vec{\omega}, \text{grad})\vec{r} + \vec{\omega} \text{ div } \vec{r} - \vec{r} \text{div } \vec{\omega} = 0 - \vec{\omega} + 3\vec{\omega} - 0 = 2\vec{\omega}$$

откуда становится совсем ясным смысл ротора, для которого в данном случае имеем

$$\frac{1}{2} \text{ rot } \vec{v} = \vec{\omega} \ . \tag{9.21}$$

6. Для иллюстрации одного важного метода решения некоторых систем дифференциальных уравнений рассмотрим модельную задачу о движении частицы с постоянной угловой скоростью. Направляя ось z по $\vec{\omega}$ имеем

$$\vec{\omega} = \{0, \ 0, \ \omega\} \ .$$

Тогда формула для скорости

$$\dot{\vec{r}} = [\vec{\omega} \, \vec{r}] \ ,$$

Рассматриваемая как дифференциальное уравнение относительно $\vec{r}(t)$ распишется в компонентах как

$$\dot{x} = -\omega y, \ \ \dot{y} = \omega x, \ \ \dot{z} = 0 \ .$$

Умножая второе уравнение на i и вводя комплексную функцию $\eta = x + iy$ получим уравнение

$$\dot{\eta} = i\omega\eta \ ,$$

из которого

$$\eta = Ce^{i\omega t} = Ae^{i\alpha}e^{i\omega t} \ ,$$

Где A и α вещественные константы, определяемые из начальных условий. Отделяя в η вещественную и мнимую части, будем иметь

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \ ,$$

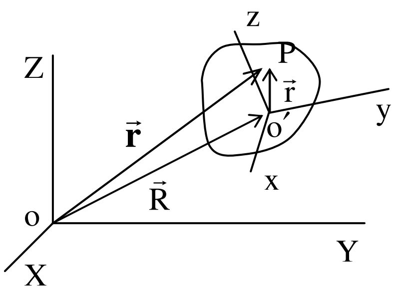
$$y = A\sin(\omega t + \alpha) \ ,$$

А из третьего уравнения следует

$$z = \text{const} \ .$$

Таким образом, если угловая скорость частицы постоянна, то она движется с постоянной по модулю линейной скоростью по окружности в плоскости, перпендикулярной вектору угловой скорости.

7. Рассмотрим теперь кратко важные во многих отношениях основные положения кинематики твердого тела. Для описания его движения введем «неподвижную» систему координат $OXYZ$ и жестко связанную с телом систему координат $O'xyz$.



Произвольное бесконечно малое перемещение тела складывается из двух частей. Одна из них есть бесконечно малый параллельный перенос тела, в результате которого точка P переходит из начального положения в конечное при неизменной ориентации осей подвижной системы координат. Вторая – бесконечно малый поворот вокруг точки O', в результате которого тело приходит в конечное положение.

Обозначим радиус-вектор точки P в подвижной системе координат через $\vec{r}$, а в неподвижной – через $\vec{\mathbf{r}}$. Тогда малое смещение $d\vec{\mathbf{r}}$ точки будет складываться из перемещения $d\vec{R}$ вместе с началом O' и перемещения $[d\theta \cdot \vec{r}]$ относительно последнего при повороте на угол $d\vec{\theta}$. В итоге

$$d\vec{\mathbf{r}} = d\vec{R} + \left[d\vec{\theta} \cdot \vec{r} \right].$$

Разделив это равенство на время перемещения dt и введя скорости

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \vec{\omega}\ , \tag{9.22}$$

получим важнейшее соотношение между ними:

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\omega}\vec{r}]\ . \tag{9.23}$$

Вектор $\vec{V}$ есть скорость точки P твердого тела, называемая скоростью его <u>поступательного</u> движения. Вектор $\vec{\omega}$, направленный по оси вращения, называется <u>угловой скоростью</u> вращения тела. Таким образом, скорость $\vec{v}$ любой точки тела выражается через его поступательную и угловую скорости.
Укажем, что обычно в качестве точки O' выбирают так называемый центр инерции тела, но такой выбор существенен лишь при анализе динамики движения.

Изменим теперь начало подвижной системы, заменив точку O' на точку O_1', сдвинутую относительно O' на вектор $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{a}\,, \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}\,.$$

Подстановка в (9.23) дает

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\omega}\vec{a}] + [\vec{\omega}\vec{r}_1]\ . \tag{9.24}$$

С другой стороны, по определению векторов $\vec{V}_1$ и $\vec{\omega}_1$ должно быть

$$\vec{v} = \vec{V}_1 + [\vec{\omega}_1\vec{r}_1]\ , \tag{9.24a}$$

а потому из сравнения этих формул мы заключаем, что

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + [\vec{\omega}\vec{a}] , \quad \vec{\omega}_1 = \vec{\omega} . \tag{9.25}$$

Второе равенство весьма существенно, ибо оно говорит, что если $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$ в какой-то момент времени перпендикулярны при некотором выборе начала O', то они (т.е. векторы $\vec{V}'$ и $\vec{\omega}'$) будут перпендикулярными и при переходе к любому другому началу O_1. Из (9.23) видно, что в этом случае скорости $\vec{V}$ всех точек тела лежат в одной плоскости, перпендикулярной $\vec{\omega}$. Подобное движение называется <u>плоско-параллельным.</u> Для него всегда можно выбрать такое начало O_1, что $\vec{V}_1 = 0$, а значит движение в данный момент будет чистым вращением вокруг оси, проходящей через O_1. Эту ось называют <u>мгновенной осью</u> вращения тела.

<u>З а д а ч и</u>

1. Вычислить компоненты скорости v_ρ , v_φ , v_z в локальном декартовом репере, заданном в цилиндрической системе координат.

Ответ: $v_\rho = \dot{\rho}$, $v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$, $v_z = \dot{z}$

2. Вычислить квадрат модуля скорости в параболических и эллиптических координатах, связанных с цилиндрическими формулами

а). $z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$, $\rho = \sqrt{\xi\eta}$, $\varphi = \varphi$;

б). $\rho = \theta\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}$, $z = \sigma\xi\eta$, $\varphi = \varphi$ (σ-параметр).

Ответ: а). $v^2 = \frac{1}{4}(\xi + \eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta^2}\right) + \xi\eta\dot{\varphi}^2$;

б). $v^2 = \sigma^2(\xi^2 - \eta^2)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2}\right) - \sigma^2(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)\dot{\varphi}^2$

3. Как можно представить движение твердого тела, для которого векторы $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$ не являются взаимно перпендикулярными?

Ответ: как винтовое движение.

<u>§10. Основные законы механики.</u>

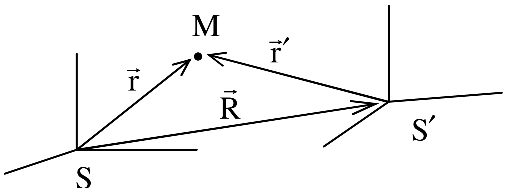
Обратимся теперь к формулировке основных положений ньютоновской динамики. С этой целью вернемся к анализу принципов инвариантности и рассмотрим переход от системы отсчета S к системе отсчета S', движущейся относительно первой. При этом сначала будем считать, что при $t = 0$ начала соответствующих систем координат совпадают, а их оси ориентированы всегда параллельно.

<u>Постулат (преобразования Галилея).</u>

Переход от координат события в системе отсчета S к координатам с постоянной скоростью $\vec{V}$, осуществляется преобразованиямиГалилея

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}t \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

Этот постулат включает множество предположений – трехмерность и евклидовость пространства, существование сигналов со сколь угодно большой скоростью (возможность естественной синхронизации часов в разных системах отсчета), абсолютность времени и т.п. Если принять их за исходные, то преобразования Галилея можно будет вывести:



$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{R} \\ \vec{R} &= \vec{V}t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$$

$$(t' = t)$$

$$\vec{r}_S = \vec{r}_{S'} + R_S$$

В итоге возникает <u>группа преобразований Галилея</u>, которая есть 3-параметрическая абелева группа Ли с законом композиции

$$g(\vec{V}_1)\,g(\vec{V}_2) = g(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \qquad (10.2)$$

Особенно важен частный случай преобразований Галилея, когда движение системы S' происходит вдоль совпадающих осей Ox и $O'x'$:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y' &= y\ ,\ \ z' = z \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \qquad (10.3)$$

В качестве тривиальных следствий преобразований Галилея (10.1) получаем следующие кинематические результаты:

а). инвариантность промежутка времени $\tau' = \tau$;

б). инвариантность длины $l' = l$;

в). классический закон сложения скоростей

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}\,, \qquad (10.4)$$

г). инвариантность относительной скорости $\vec{u}' = \vec{u}$

д). инвариантность ускорения $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$

Если ввести в рассмотрение пространственные вращения и трансляции, а также сдвиги во времени, то придем к преобразованиям вида

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}' &= \Omega\vec{r} - \vec{V}(t - \tau) - \vec{a} \\ t' &= t - \tau \end{aligned}\right\} \qquad (10.5)$$

Они образуют 10-параметрическую собственную группу Галилея, элементы которой обозначим как $g(\Omega, a, v, \tau)$. Тогда закон композиции запишется в виде

$$g\left(\Omega_2, \vec{a}_2, \vec{V}_2, \tau_2\right) g\left(\Omega_1, \vec{a}_1, \vec{V}_1, \tau_1\right) = g\left(\Omega_2\Omega_1, \Omega_2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{V}_2\tau_1, \Omega_2\vec{V}_1 + \vec{V}_2, \tau_1 + \tau_2\right) . \qquad (10.6)$$

Если включить к тому же операции пространственной инверсии и обращения времени, то получим полную группу Галилея, которая является основной кинематической группой инвариантности нерелятивистской физики (как классической, так и квантовой).

В кинематике все системы отсчета формально равноправны, а в динамике выделяется один чрезвычайно важный их класс.

Определение.

Частицей (или материальной точкой) называется такой материальный объект, движение которого полностью описывается заданием зависимости от времени трех координат x, y, z.

Наглядно говоря, частица – это объект, не обладающий внутренней структурой. В разных задачах один и тот же объект можно рассматривать или как частицу, или как тело с внутренней структурой.

Определение.

Пусть задана произвольная частица и пусть R - расстояние от нее до ближайшего тела Вселенной. Если в данной системе отсчета S для ускорения этой произвольной частицы имеем

$$\lim_{R\to\infty} \vec{\omega}(R) = 0,$$

то эта система отсчета называется инерциальной

В принципе множество инерциальных систем могло бы оказаться пустым, но на этот счет имеется следующий фундаментальный экспериментальный факт, который при теоретическом построении механики выступает в качестве аксиомы.

Постулат (первый закон Ньютона).

В природе существует хотя бы одна инерциальная система отсчета.

Положительная часть первого закона Ньютона состоит в утверждении существования хотя бы одной инерциальной системы, хотя на практике ее отыскание может оказаться чрезвычайно сложным делом (вспомним выбор в качестве таковой сначала Земли, а потом Солнца, а затем удаленных звезд).

Теорема

В природе имеется континуальное множество инерциальных систем отсчета.

Утверждение сразу следует из определения инерциальной системы, из первого закона Ньютона и из классического закона сложения скоростей (10.4). Эта теорема справедлива и в релятивистской физике.

Обобщением понятия изолированной частицы, фактически фигурирующего в определении инерциальной системы, является следующее понятие.

Определение.

Система частиц называется замкнутой , если расстояние каждой из них до любого из остальных тел Вселенной можно считать равным бесконечности.

Постулат (принцип относительности Галилея).

Законы классической механики (для замкнутых систем) ковариантны по отношению к преобразованиям из полной группы Галилея.

Этот постулат включает предположения об однородности и изотропности пространства, об однородности времени, о симметрии правое – левое, об обратимости времени, а также собственно принцип относительности Галилея. Из последнего вытекает невозможность обнаружения « абсолютного» движения данной системы отсчета – все инерциальные системы равноправны.

Обратим внимание на требование инвариантности по отношению к обратимости времени. В рассматриваемом аспекте оно служит, собственно, определением чисто механических систем., т.к. запрещает наличие в них трения, приводящего к диссипации энергии, т.е. к необратимому процессу перехода механической энергии в тепловую. Еще одно условие, накладываемое на чисто механические системы, будет обсуждено ниже.

Основная часть ньютоновской динамики содержится в следующем положении.

Постулат (принцип детерминированности).

Совокупность начальных координат и начальных скоростей

$$\left\{\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N\right\}_{t=t_0}\equiv X\Big|_{t=t_0}\equiv X_0\ ,\quad \left\{\dot{\vec{r}}_1,\dots,\dot{\vec{r}}_N\right\}_{t=t_0}\equiv \dot{X}\Big|_{t=t_0}\equiv \dot{X}_0$$

частиц замкнутой механической системы полностью определяет всю ее эволюцию во времени.

Это утверждение весьма нетривиально. « Мы не успеваем удивиться этому факту, так как узнаем его очень рано. Можно представить себе мир, в котором для определения будущего системы нужно в начальный момент знать также и ускорения. Наш мир не таков». (В.И.Арнольд). В действительности в некоторых случаях для описания эволюции системы достаточно задать лишь величины, являющиеся аналогами координат (полевые теории), а иногда все же необходимо знать и соответствующие вторые производные (радиационное трение), но подобные системы не относятся к числу механических.

Теорема (второй закон Ньютона).

Ускорения частиц замкнутой механической системы определяется их координатами и скоростями:

$$\ddot{x}=f\left(x,\ \dot{x};\ t\right)\qquad(10.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Начальное состояние $\left(x_0,\dot{x}_0\right)$ определяет все движение, т.е. траекторию при всех временах t, а значит и ускорение при любом t и, в частности, при $t=t_0$:

$$\ddot{X}_0=f\left(x_0,\dot{x}_0;t_0\right)\ .$$

В силу однородности времени законы механики одинаковы во все моменты времени t_0, а поэтому

$$\ddot{X}_0 = f\left(x_0, \dot{x}_0; t_0\right) \ ,$$

что и требовалось доказать. Обратно, уравнение (10.7) есть обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, а в силу теоремы существования и единственности функция f и начальные условия однозначно определяют движение, т.е. мы приходим к принципу детерминированности.

Рассмотрим теперь движение какой-то одной фиксированной частицы, для которой второй закон Ньютона записывают несколько иначе. Прежде всего, из (10.7) для нашей частицы имеем

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{f}\left(\dot{x}, \ddot{x}; t\right) \tag{10.8}$$

В классической механике предполагается (и подтверждается опытом при малых скоростях), что отношение модулей ускорений двух взаимодействующих тел не зависит от их состояния, т.е. от положений и скоростей. Поэтому данное отношение служит внутренней характеристикой этих тел.

<u>Определение</u>.

Обратное отношение модулей ускорений двух взаимодействующих частиц называется отношением их масс:

$$\frac{\left|\ddot{\vec{r}}_2\right|}{\left|\ddot{\vec{r}}_1\right|} \overset{\text{def}}{=} \frac{m_1}{m_2} = m_{12} \ \text{(относительная масса !!!)} \tag{10.9}$$

Шкала масс фиксируется эталонным телом, и второй закон Ньютона для данной частицы записывают в виде

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\left(x, \dot{x}; t\right) \tag{10.10}$$

<u>Определение</u>.

Величину $\vec{F}$ в формуле (10.10) называют силой, действующей на данную частицу со стороны других частиц системы.

Выясним теперь, какие ограничения накладывает на вид силы принцип относительности Галилея, согласно которому уравнение (10.7), а значит и уравнения (10.10), должны быть ковариантными по отношению к преобразованиям из группы Галилея.

1. Инвариантность относительно сдвигов во времени означает « постоянство законов природы», т.е. если $X = \Phi(t)$ - решение уравнения (10.7), то $X = \Phi(t+\tau)$ для всякого $\tau \in \mathbb{R}$ также будет решением. Отсюда вытекает независимость правой части (10.7) от времени:

$$\ddot{X} = f\left(X, \dot{X}\right) \ , \tag{10.11}$$

или, для одной частицы,

$$m\ddot{\vec{r}} = F(x, \dot{x}) \ , \qquad (10.12)$$

2. Инвариантность относительно пространственных трансляций означает, что если $\vec{r}_i = \vec{\varphi}_i(t)$ - решение уравнений (10.10), то $\vec{r}_i = \vec{\varphi}_i(t) + \vec{a}$ для всякого $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ также будет решением. Отсюда вытекает, что силы могут зависеть лишь от относительных координат $\vec{r}_j - \vec{r}_k$.

При преобразованиях Галилея ускорения $\ddot{\vec{r}}_j$ и относительные координаты не меняются, а все скорости $\dot{\vec{r}}_j$ приобретают одно и то же слагаемое. Из соответствующей инвариантности следует, что силы могут зависеть лишь от относительных скоростей. Таким образом,

$$\ddot{\vec{r}}_i = F\left(\left\{\vec{r}_j - \vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_k\right\}\right), \quad i,j,k=1,2,...,N \qquad (10.13)$$

3. Инвариантность относительно пространственных вращений означает, что если $\vec{r}_i = \vec{\varphi}_i(t)$ - решение уравнений (10.10), то таковым же будет $\vec{r}_i = \Omega\vec{\varphi}_i(t)$ при всяком $\Omega \in SO(3)$. Учитывая, что масса по определению скаляр, а ускорение является вектором, мы приходим к условию

$$F\left(\left\{\Omega\vec{r}_j, \Omega\dot{\vec{r}}_j\right\}\right) = \Omega\vec{F}\left(\left\{\vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_j\right\}\right) \qquad (10.14)$$

т.е. сила при пространственных вращениях должна преобразовываться как вектор.

Рассмотрим теперь замкнутую систему из двух частиц и обсудим действующие между ними силы. Про них уже сейчас можно сказать достаточно много. Так, из определения массы и второго закона Ньютона в форме (10.10) явствует, что силы взаимодействия равны по модулю. Далее, если частицы покоятся (достаточно в какой-то одной инерциальной системе), то силы обязаны быть направлены по прямой, соединяющей эти частицы. Дело в том, что каждая сила является вектором, а в данном случае имеется всего один характерный вектор, соединяющий частицы. Кроме того, силы взаимодействия обязаны быть направлены в противоположные стороны, ибо в противном случае система в целом самоускорялась бы. Очевидно, что в силу принципа относительности два последних соображения применимы и для частиц, движущихся с равными по величине и направлению скоростями. Неохваченным остается лишь случай двух частиц, движущихся с произвольными скоростями.

Постулат (третий закон Ньютона).

Силы взаимодействия между двумя частицами, образующими замкнутую систему, равны по величине, лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (10.15)$$

Если говорить совсем строго, то высказанное утверждение является не постулатом, а дополнительным уточнением понятия механической системы.

Теперь силу, действующую на данную i -ю частицу замкнутой системы можно попытаться представить как совокупный результат действия всех остальных частиц системы, взятых по отдельности. И действительно, эксперимент приводит к следующему важному утверждению.

Постулат (принцип суперпозиции, или нулевой закон Ньютона).

Сила, действующая на i-ю частицу замкнутой механической системы, равна векторной сумме сил, действующих на нее со стороны отдельных частиц:

$$\vec{F}_i\left(x, \dot{x}\right) = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i; \vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_j\right) . \tag{10.16}$$

Это положение также нетривиально, ибо в квантовой механике наряду с подобными парными силами существуют, например, и тройные силы. Они обращаются в нуль при удалении в бесконечность хотя бы одной из трех частиц системы. В такой ситуации принцип суперпозиции в его первоначальной форме (10.16) не работает, и его следует модифицировать.

До сих пор речь шла о замкнутых системах, но часто приходится рассматривать и более общую ситуацию, когда на частицы нашей системы влияют другие тела, в нее не включенные. При этом состояние движения этих посторонних («внешних») тел считается заданным. Простейший пример – движение частицы в поле тяжести Земли, которая как раз выступает в качестве внешнего тела. В данном случае второй закон Ньютона для какой-то частицы системы записывается в виде

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{int} + \vec{F}^{ext} . \tag{10.17}$$

Здесь $\vec{F}^{int}$ - внутренние силы , действующие на нашу частицу со стороны других частиц системы, равнодействующая которых задается формулой (10.16), а $\vec{F}^{ext}$ суммарная внешняя сила , действующая на частицу со стороны тел, не включенных в систему. Поскольку движение этих тел задано, внешняя сила зависит эффективно лишь от положения и скорости рассматриваемой частицы, а ткже, может быть, и от времени, чем феноменологически учитывается факт этого движения. В частности, если система состоит лишь из одной частицы, то второй закон для нее выглядит как

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; t\right) . \tag{10.18}$$

Заметим, что теперь принцип относительности уже не работает – за счет наличия внешних полей нарушаются однородность и изотропность «физического» пространства, однородность «физического» времени, а также собственно принцип относительности Галилея.

Соответствующая задача является важнейшей модельной задачей классической механики (кстати, к ней сводится и проблема двух частиц), а потому именно с нее и начинается анализ в следующем параграфе.

З А Д А Ч И

1. Доказать закон композиции (10.2) для группы преобразований Галилея.
2. Доказать закон композиции (10.6) для собственной группы Галилея.

3. Найти элемент, обратный к $g\left(\Omega,\vec{a},\vec{V},\tau\right)$. Попытаться осознать определения и утверждения из параграфа 2 книги В.И.Арнольда « Математические методы классической механики», М.,1974

   Пример: временем называется линейное отображение $t:\ \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ линейного пространства параллельных переносов мира на вещественную ось.
4. Доказать, что если в некоторой инерциальной системе в начальный момент два (три) тела покоятся, то в дальнейшем частицы будут двигаться по соединяющей их прямой (в проходящей через них плоскости).
5. Доказать, что механика в «зазеркалье» тождественна нашей.

§11. Законы сохранения в ньютоновской механике.

Рассмотрим сначала движение одной частицы в поле внешних сил, считая ее массу постоянной. Второй закон Ньютона записывается как

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}\Leftrightarrow m\dot{\vec{v}}=\vec{F} \qquad (11.1)$$

1. Вводя импульс частицы

$$\vec{p}=m\vec{v}\ , \qquad (11.2)$$

Запишем второй закон в виде

$$\dot{\vec{p}}=\vec{F}\ . \qquad (11.3)$$

Теорема.

Если сила, действующая на частицу, равна нулю, то ее импульс сохраняется, или является интегралом движения.

2. Умножим уравнение (11.1) векторно слева на $\vec{r}$:

$$\left[\vec{r},\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)\right]=\left[\vec{r}\vec{F}\right]\ .$$

Воспользовавшись векторным тождеством

$$\left[\vec{r},\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)\right]=\frac{d}{dt}\left[\vec{r},m\vec{v}\right]-\left[\frac{d\vec{r}}{dt}m\vec{v}\right]=\frac{d}{dt}\left[\vec{r},m\vec{v}\right]\ ,$$

Перепишем результат в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r},\left(m\vec{v}\right)\right]=\left[\vec{r}\vec{F}\right]\ . \qquad (11.4)$$

Величина

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \left(m\vec{v}\right)\right] = \left[\vec{r}\vec{p}\right] \qquad (11.5)$$

Называется моментом импульса, а величина

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right] \qquad (11.6)$$

- моментом силы , так что (11.4) записывается как

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} \ . \qquad (11.7)$$

Это соотношение полностью аналогично уравнению (11.3).

Теорема
Если момент силы, действующей на частицу, равен нулю, то ее
Момент импульса является интегралом движения.

Важный частный случай – движение частицы в поле центральной силы, т.е. силы, которая все время направлена в одну неподвижную точку – в силовой центр, относительно которого и вычисляются все моменты.

3. Умножая уравнение (11.1) скалярно на $d\vec{r}$ и преобразуя левую часть как

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt}d\vec{v} = m\vec{v}d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) ,$$

получим

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) \qquad (11.8)$$

Величина

$$T = \frac{mv^2}{2} \qquad (11.9)$$

Называется кинетической энергией частицы, а величина

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) \qquad (11.10)$$

- работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$, так что

$$dT = dA \ . \qquad (11.11)$$

Допустим, что сила $\vec{F}$ - потенциальная, т.е.

$$\exists U: \ \vec{F} = -\vec{\nabla} U \ , \tag{11.12}$$

Где U - потенциальная энергия. Тогда ее работа запишется как

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = -(\vec{\nabla} U, d\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \frac{\partial U}{\partial t}dt\right) + \frac{\partial U}{\partial t}dt \ .$$

Определение.

Если сила потенциальна и стационарна, то она называется консервативной

Для консервативной силы

$$dA = -dU \ ,$$

Так что

$$dT = -dU, \quad \text{или} \quad d(T + U) = 0 \ .$$

Величину

$$\varepsilon = T + U \tag{11.13}$$

Называют механической энергией частицы.

Теорема.

Если частица движется в поле консервативной силы, то ее механическая энергия является интегралом движения.

Отметим два важных частных случая, когда сохраняется энергия.

а).Движение в поле центральной силы $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ (§7), когда

$$u(r) = -\int_{r_0}^{r} f(\rho) d\rho \ . \tag{11.14}$$

б). Одномерное движение в поле силы $\vec{F} = \vec{F}(x)$, когда

$$u(x) = -F(\xi)d\xi \ . \tag{11.15}$$

Рассмотрим теперь систему из N частиц, которые взаимодействуют друг с другом посредством внутренний сил, подчиняющихся третьему закону Ньютона, а кроме того подвержены действию внешних сил. Второй закон для каждой частицы записывается в виде

$$\dot{\vec{p}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_j^{ext} \ . \tag{11.16}$$

1. Складывая уравнения (11.16) для всех частиц, получим

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \sum_i F_i^{ext}$$

Поскольку внутренние силы подчиняются третьему закону, то они попарно уничтожаются, и мы получаем

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i F_i^{ext} \quad , \quad \text{или} \qquad \vec{P} = \vec{F}^{ext} \ . \tag{11.17}$$

Теорема

Если сумма внешних сил равна нулю, то полный импульс системы частиц является интегралом движения.

Отсутствие внешних сил равнозначно однородности «физического» пространства, т.е. трансляционной инвариантности теории. В дальнейшем будет показано, что требования однородности пространства достаточно для получения закона сохранения импульса.

Полученные результаты часто формулируют несколько иначе. Преобразуем левую часть уравнения (11.17):

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i \cdot \frac{d^2}{dt^2}\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \equiv M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \ ,$$

Где M - полная масса системы, а

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{11.18}$$

Есть радиус-вектор точки, называемой центром масс системы. В итоге

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{ext} \ , \tag{11.19}$$

Т.е. центр масс движется так, словно в нем сосредоточена вся масса системы и к нему приложены все внешние силы.

Теорема.

Если сумма внешних сил равна нулю, (т.е. система замкнутая), то центр масс системы частиц движется с постоянной скоростью.

2. Умножая каждое из уравнений (11.16) векторно слева на $\vec{r}_i$ и складывая результаты, получим

$$\sum_i \left[\vec{r}_i \dot{\vec{p}}_i\right] \equiv \frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i] = \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{F}_i^{ext}\right] + \sum_{i \neq j}\left[\vec{r}_i \vec{F}_{ij}\right] \ .$$

Учитывая третий закон Ньютона, будем иметь

$$\left[\vec{r}_i \vec{F}_{ij}\right] + \left[\vec{r}_i \vec{F}_{ji}\right] = \left[\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{F}_{ij}\right] \equiv \left[\vec{r}_{ij}, \vec{F}_{ij}\right] = 0 \ ,$$

так что сумма моментов внутренних сил равна нулю, и

$$\frac{d}{dt}\sum_i \left[\vec{r}_i \dot{\vec{p}}_i\right] = \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{F}_i^{ext}\right] \ , \tag{11.20}$$

т.е. изменение полного момента импульса системы частиц

$$\vec{L} = \sum_i \left[\vec{r}_i \dot{\vec{p}}_i\right] \equiv \sum_i \vec{L}_i \tag{11.21}$$

определяется суммарным моментом действующих на нее внешних сил

$$\vec{M}^{ext} = \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{F}_i^{ext}\right] \equiv \sum_i \vec{M}_i^{ext} \ . \tag{11.22}$$

<u>Теорема.</u>

Если суммарный момент внешних сил равен нулю, то полный момент импульса системы частиц является интегралом движения.

Равенство нулю момента внешних сил равнозначно изотропности пространства, т.е. вращательной инвариантности теории. В дальнейшем будет показано, что требования изотропности пространства достаточно для получения закона сохранения момента импульса.

3.Умножая теперь каждое из уравнений (11.16), записанное в виде

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i \ , \tag{11.23}$$

скалярно на $d\vec{r}_i$ и складывая результаты, получим

$$dT = dA \, , \tag{11.24}$$

где

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \equiv \sum_i T_i \tag{11.25}$$

есть полная кинетическая энергия частиц, а

$$dA = \sum_i \left(\vec{F}_i, d\vec{r}_i\right) \equiv \sum_i \left(\vec{F}_i^{ext}, d\vec{r}_i\right) + \sum_{i \neq j} \left(\vec{F}_{ij}, d\vec{r}_i\right) \tag{11.26}$$

- суммарная работа сил, действующих на частицы системы.

Раскроем последнюю величину. Пусть внешние силы консервативны, т.е. имеют потенциал и стационарны. Тогда

$$\sum_i \left(\vec{F}_i^{ext}, d\vec{r}_i\right) = -\sum_i \left(\vec{\nabla}_i U_i, d\vec{r}_i\right) = -\sum_i dU_i \equiv -d\sum_i U_i \ . \tag{11.27}$$

Внутренние силы считаются механическими, т.е. подчиняющимися третьему закону, а потому они являются центральными, т.е. потенциальными:

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right) \Rightarrow \exists U_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right) : \ \vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i U_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right) \equiv -\vec{\nabla}_i U_{ij}\left(r_{ij}\right)$$

Тогда элементарная работа двух соответствующих парных сил равна

$$\left(\vec{F}_{ij}, d\vec{r}_i\right) + \left(\vec{F}_{ij}, d\vec{r}_j\right) = \left(\vec{F}_{ij}, d\vec{r}_i - d\vec{r}_j\right) = \left(\vec{F}_{ij}, d\vec{r}_{ij}\right) = -\left(\vec{\nabla}_{ij} U_{ij}, d\vec{r}_{ij}\right)$$

а для элементарной работы всех внутренних сил имеем

$$\sum_{j\neq i}\left(\vec{F}_{ij}, d\vec{r}_{ij}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\left(\vec{\nabla}_{ij} U_{ij}, \vec{r}_{ij}\right) = -\frac{1}{2} d\sum_{j\neq i} U_{ij} \ , \tag{11.28}$$

Объединяя (11.24) , (11.27) и (11.28), получаем

$$dT = -dU \qquad (11.\ \ )$$

где T - полная кинетическая энергия системы (11.25), а U - полная потенциальная энергия системы:

$$U = \sum_i U_i\left(\vec{r}_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} U_{ij}\left(r_{ij}\right) \ . \qquad (11.\ \ )$$

<u>Теорема.</u>

Если внешние силы, действующие на систему частиц, потенциальны, а внутренние силы подчиняются третьему закону Ньютона, то полная механическая энергия является интегралом движения.

Потенциальность внешних сил равнозначна однородности времени. В дальнейшем будет показано, что этого требования достаточно для вывода закона сохранения механической энергии.

В заключение параграфа приведем основную (и фундаментальную) формулу для полной энергии системы взаимодействующих частиц:

$$\varepsilon = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + \sum_i U_i\left(\vec{r}_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} U_{ij}\left(r_{ij}\right) \tag{11.30}$$

В макроскопической физике ситуация осложняется наличием «связей», но мы их, как правило, рассматривать не будем, так как в интересующем нас микромире все частицы свободны.

З А Д А Ч И

1. Получить закон изменения энергии для одной частицы в поле потенциальной, но нестационарной силы.
2. Получить закон изменения энергии для одной частицы в поле консервативной силы при наличии трения

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

3 Показать, что под действием центральной силы частица движется в фиксированной плоскости (плоскости Лапласа). Введя полярные координаты в этой плоскости, записать в них перпендикулярную ей составляющую вектора момента импульса. Установить ее связь с секторной скоростью.

4 Частица движется в плоскости под действием силы $\vec{F}$ такой, что

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \text{где} \qquad U = U(x, y)$$

Найти интеграл движения.

Ответ: $mV_xV_y - U = const$ (умножаем парциальные уравнения движения на $\dot{y}$ и $\dot{x}$ складываем).

§12. Движение частицы в электромагнитном поле

1. Как говорилось во введении, в природе существует некое электромагнитное взаимодействие, свойственное так называемым заряженным частицам. Оба этих понятия неопределимы, а вводятся путем описания их основных свойств. Здесь мы кратко остановимся на этой проблеме и опишем соответствующие характеристики.
2. Определение. Сила, действующая на неподвижный (в выбранной системе отсчета) заряд, называется электрической, а ее материальный носитель - электрическим полем.

Введем теперь основную характеристику заряженного тела – его электрический заряд. Рассмотрим с этой целью три заряженных частицы с внутренними характеристиками k_1, k_2, k_3, и поместим сначала частицы 1 и 2, а затем 1 и 3 на одинаковом расстоянии друг от друга. Для сил их взаимодействия будем иметь

$$\vec{F}_{12} = \vec{f}(k_1, k_2; r) \qquad \text{и} \qquad \vec{F}_{13} = \vec{f}(k_1, k_3; r)$$

Эксперимент показывает, что отношение модулей сил F_{12} и F_{13} не зависит ни от природы первого заряженного тела (от k_1), ни от расстояния r. Поэтому можно записать

$$\frac{F_{12}}{F_{13}} = \frac{f(k_1, k_2; r)}{f(k_1, k_3; r)} = \varphi(k_2, k_3),$$

Откуда явствует, что величины k_1, k_2, k_3 и r должны входить в модуль силы взаимодействия мультипликативно, причем в силу симметрии зависимость первых двух сомножителей от k_1 и k_2 соответственно должна быть одинаковой:

$$F_{12}(k_1\ ,\ k_2\ ;\ r)=\psi(k_1)\psi(k_2)\chi(r)$$

Величина

$$q\equiv\psi(k),$$

и называется электрическим зарядом данной заряженной частицы.

Таким образом, для силы взаимодействия двух частиц с учетом очевидной скалярности их зарядов можно записать

$$\vec{F}_{12}=q_1q_2\vec{\chi}(r)\ .$$

При этом опыт же показывает, что для электрической силы, действующей на данный заряд e со стороны других зарядов, справедлив принцип суперпозиции:

$$\vec{F}_e=\sum_i\vec{F}_{ei}\ .$$

Рассмотрим теперь одиночный заряд e, а все остальные заряды будем рассматривать в качестве внешних тел. Согласно сказанному выше, можно записать

$$\vec{F}_e=e\vec{E}\ , \tag{12.1}$$

где вектор $\vec{E}(\vec{r},t)$ зависит только от расположения и движения внешних частиц, которые, по определению, создают внешнее электрическое поле, действующее на наш заряд.

Определение. Вектор $\vec{E}(\vec{r},t)$, фигурирующий в формуле (12.1), называется напряженностью электрического поля, создаваемого внешними зарядами.

3. Если в фиксированной системе отсчета заряд e не покоится, а движется, то, как показывает опыт, на него, помимо обсужденной электрической силы действует и некоторая добавочная сила.

Определение. Сила, действующая на заряженную частицу, которая движется, и дополнительная к электрической силе, называется магнитной силой, а ее материальный носитель – магнитным полем.

Опыт показывает, что магнитная сила пропорциональна величине заряда частицы и ее скорости, причем направлена она всегда перпендикулярно вектору скорости. Поэтому можно записать

$$\vec{F}_m=\frac{e}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right]\ . \tag{12.2}$$

Определение. Вектор $\vec{B}(\vec{r};t)$, фигурирующий в формуле (12.2), называется индукцией магнитного поля, создаваемого внешними зарядами.

Комбинируя все эмпирические факты и определения, мы заключаем, что на рассматриваемый заряд e действует со стороны внешних заряженных тел сила

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right] , \qquad (12.3)$$

называемая <u>силой Лоренца.</u> При этом введение константы

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$$

Диктуется исключительно соображениями выбора соответствующей системы единиц.

Итак, если частица массы m движется в заданном внешнем поле, то ее поведение описывается вторым законом Ньютона

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; t\right) , \qquad \text{где} \qquad \vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{v}\vec{B}\right] \qquad (12.4)$$

Общее решение этой системы уравнений включает 6 произвольных констант:

$$\vec{r} = \vec{r}\left(t; \vec{C}_1, \vec{C}_2\right)$$

Определяя их из начальных условий

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0 ,$$

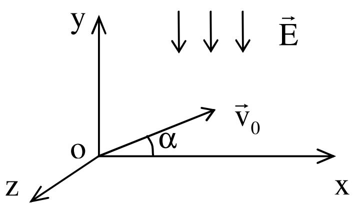
Получим закон движения

$$\vec{r} = \vec{r}\left(t; \vec{r}_0, \vec{v}_0\right) .$$

При решении конкретных задач обычно удобно пользоваться некоторой определенной системой координат, которая выбирается из соображений удобства.

<u>Задача 1.</u> Определить движение заряженной частицы с зарядом e , массой $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; t\right)$ в постоянном однородном электрическом поле $\vec{E}$.

Р е ш е н и е

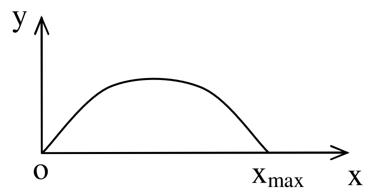


$$\left.\begin{array}{r} m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} \\ \vec{r}(0) = 0 \\ \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0 \end{array}\right\} ; \quad \left.\begin{array}{c} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -eE \\ m\ddot{z} = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha \\ \dot{z}(0) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = v_0 \sin\alpha - \dfrac{eE}{m} t \\ \dot{z} = 0 \end{array}\right\} , \qquad \left.\begin{array}{c} x = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{eE}{em} t^2 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Итак, движение происходит в плоскости $x0y$, а траекторией является парабола с уравнением

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{eE}{2mv_0^2\cos^2\alpha}x^2$$



Точка $x = x_{max}$ определяется из условия $y = 0$:

$$0 = v_0\sin\alpha\cdot\tau - \frac{eE}{2m}\tau^2 \quad\Rightarrow\quad \tau = \frac{2mv_0\sin\alpha}{eE} \quad\Rightarrow\quad x_{max} = \frac{mv_0^2}{eE}\sin 2\alpha$$

Покажем, что пучок частиц, движущихся в среднем под углом 45^o с небольшим угловым разбросом Δ, фокусируется в точке $x = x_{max}$ (электростатическая фокусировка). Итак, пусть $\alpha = 45^o + \Delta$, где Δ - малый угол. Тогда

$$\sin 2\alpha = \sin\left(90^o + 2\Delta\right) = \cos 2\Delta \cong 1 - 2\Delta^2 \ ,$$

И для разброса по координатам на оси x получаем

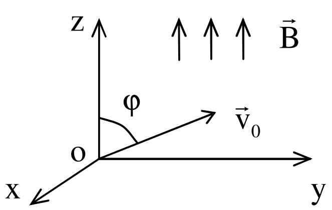
$$\Delta x_{max} = \frac{mv_0^2}{eE}\Delta^2 \ ,$$

т.е. величину второго порядка малости.

Таким образом, для фокусировки пучка частиц достаточно навстречу ему под углом 45^o приложить постоянное однородное электрическое поле.

Задача 2. Определить движение частицы с зарядом e, с массой m в постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$.

Р е ш е н и е



$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \frac{e}{c}\left[\dot{\vec{r}},\vec{B}\right] \\ \vec{r}(0) &= 0 \\ \dot{\vec{r}}(0) &= \vec{v}_0 \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} &\vec{r} = \{x,y,z\} \\ &\vec{B} = \{0,0,B\} \\ &\left[\dot{\vec{r}},\vec{B}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \{B\dot{y}, -B\dot{x}, 0\} \end{aligned}\right\} \omega \equiv \frac{eE}{mc}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\omega\dot{x} \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \dot{x}(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= v_0\sin\varphi \equiv V_0 \\ \dot{z}(0) &= v_0\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

$$z = c_1 t + c_2 \qquad\Rightarrow\qquad \boxed{z = v_0\cos\varphi\cdot t}\ .$$

$$\left.\begin{array}{c}\ddot{x}-\omega\dot{y}=0\\ \ddot{y}+\omega\dot{x}=0\end{array}\right\}i+ \quad \left.\begin{array}{c}\ddot{\eta}+i\omega\dot{\eta}=0\\ \eta(0)=0\\ \dot{\eta}(0)=iv_0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c}\dot{\eta}\equiv\chi\\ \left.\begin{array}{c}\dot{\chi}+i\omega\chi=0\\ \chi(0)=iv_0\end{array}\right\}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c}\chi=Ae^{-i\omega t}\\ A=\chi(0)=iv_0\\ \chi=iv_0e^{-i\omega t}\end{array}\right\}$$

$$\frac{}{\ddot{\eta}+i\omega\dot{\eta}=0}\qquad [\eta=x+iy]$$

$$\dot{\eta}=iv_0e^{-i\omega t};\quad \eta=-\frac{v_0}{\omega}e^{-i\omega t}+c;\quad c=\frac{v_0}{\omega};\quad \eta=\frac{v_0}{\omega}-\frac{v_0}{\omega}e^{-i\omega t};$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{c}x=\frac{v_0}{\omega}-\frac{v_0}{\omega}\cos\omega t\\ y=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\\ z=v_0\cos\varphi\cdot t\end{array}\right\}}$$

В плоскости $x0y$

$$\boxed{\left(x-\frac{v_0}{\omega}\right)^2+y^2=\frac{v_0^2}{\omega^2}}\ .$$

Итак, частица движется по винтовой линии с параметрами

$$\omega=\frac{eB}{mc}\ ,\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi mc}{eB}\ ,\quad R=\frac{v_0}{\omega}=\frac{mcv_0}{eB}\ ,\quad h=Tv_0\cos\varphi=\frac{2\pi mcv_0}{eB}\cos\varphi$$

Если $V_0\perp\vec{B}$, то имеет место тривиальная фокусировка, ибо $T\neq T(v_0)$.

Если имеется пучок, в среднем параллельный оси z, с малым угловым разбросом $\Delta=\varphi$, то через один период

а). Частицы будут иметь начальные координаты $x=0,\ y=0\quad [T\neq T(v_0)]$

б). они соберутся примерно в одной точке оси z, поскольку

$$\cos\varphi=\cos\Delta\cong1-\frac{1}{2}\Delta^2\quad\Rightarrow\quad \Delta h=\frac{2\pi mcv_0}{eB}\Delta^2$$

Таким образом, пучок частиц можно фокусировать продольным магнитным полем.

На независимости частоты от начальной скорости частиц основано действие циклических ускорителей (циклотронов), усовершенствованиями которых являются фазотроны, синхротроны, синхрофазотроны и т. д.

Задача 3. Частица с зарядом e, массой m движется в поле силы $\vec{F}=-k\vec{r}$. Определить частоты колебаний этого осциллятора после помещения его в однородное магнитное поле $\vec{B}$.

Р е ш е н и е

Без магнитного поля

$$\left.\begin{array}{c}m\ddot{\vec{r}}=-k\vec{r}\\ \omega_0^2\equiv\frac{k}{m}\\ \ddot{\vec{r}}+\omega_0^2\vec{r}=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{c}\ddot{x}+\omega_0^2x=0\\ \ddot{y}+\omega_0^2y=0\\ \ddot{z}+\omega_0^2z=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{c}x=A_xe^{i\omega_0t}\\ y=A_ye^{i\omega_0t}\\ z=A_ze^{i\omega_0t}\end{array}\right\}\quad \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

При наличии магнитного поля

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\vec r} &= -k\vec r + \frac{e}{c}\left[\dot{\vec r},\vec B\right] \\ \vec B &= \{0,0,B\} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \ddot x + \omega_0^2 x &= \frac{eB}{mc}\dot y \\ \ddot y + \omega_0^2 y &= -\frac{eB}{mc}\dot x \\ \ddot z + \omega_0^2 z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} z &= A_z e^{i\omega_0 t} \\ &\boxed{\omega_z = \omega_0} \end{aligned} .$$

В плоскости $x0y$ вводим комплексную координату $\eta = x + iy$:

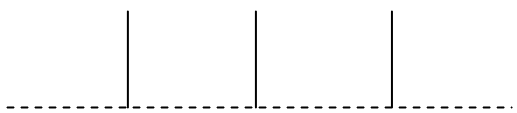
$$\ddot\eta + \omega_0^2\eta + i\frac{eB}{mc}\dot\eta = 0\ ,\quad \eta = Ae^{i\omega t}\ ,\quad -\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{eB}{mc}\omega = 0$$

$$\omega \equiv \omega_{x,y} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{eB}{mc}\right)^2} \pm \frac{eB}{2mc}\ .$$

В слабом поле получаем

$$\boxed{\omega \equiv \omega_{x,y} = \omega_0 \pm \frac{eB}{2mc}\ ,\quad \omega_z = \omega_0}$$

Колеблющийся заряд излучает электромагнитные волны с частотой колебаний. Если нет магнитного поля, то излучается одна спектральная линия с частотой ω_0. При помещении осциллятора в магнитное поле эта спектральная линия расщепляется на три эквидистантных, в чем состоит суть классического объяснения нормального эффекта Зеемана:



$$\omega_0 - \frac{eB}{2mc} \qquad \omega_0 \qquad \omega_0 + \frac{eB}{2mc}$$

З А Д А Ч И

1. Найти траекторию заряда, влетевшего перпендикулярно электрическому полю $\vec E = \vec E_0 \cos\omega t$.

   Ответ:

$$y = \frac{eE_0}{\omega}\left(1 - \cos\frac{\omega}{v_0}x\right)\ ,\quad \frac{\omega x}{v_0} \ll 1:\ y = \frac{eE_0}{2v_0^2}x^2\ .$$

2. Найти траекторию заряда, движущегося в постоянном магнитном поле при наличии силы трения $\vec F = -k\vec v$.

3. Найти траекторию заряда, движущегося во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном постоянных однородных полях. Показать, что частица «дрейфует» в перпендикулярном к ним направлении со скоростью

$$V = c\frac{E}{B}$$