ЧАСТИЦА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Гамильтониан электрона в магнитном поле имеет вид:

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{\bar{P}}-\frac{e}{c}\bar{A}\right)^2+u\left(\bar{r}\right)-\frac{e\hbar}{mc}\left(\bar{S},\bar{B}\right) .$$

1. Найти орбитальный магнитный момент электрона, исходя из его непосредственного классического определения

$$\vec{M}=\frac{1}{2c}\int\left[\bar{r},\bar{j}\left(\bar{r}\right)\right]d\tau$$

Решение. В качестве плотности тока следует брать

$$\bar{j}_e=-e\bar{j};\qquad \bar{j}=\frac{i\hbar}{2\mu}\left(\psi\vec{\nabla}\psi^*-\psi^*\vec{\nabla}\psi\right) .$$

Рассматриваем состояние с определенными l и m :

$$\psi\left(r,\theta,\varphi\right)=\eta\left(r,\theta\right)\cdot e^{im\varphi} ,$$

где $\eta\left(r,\theta\right)$ - вещественная функция. При вычислении тока учитываем, что

$$\nabla_r=\frac{\partial}{\partial x} ,\qquad \nabla_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x} ,\qquad \nabla_\varphi=\frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} .$$

Отличны от нуля лишь те компоненты тока, для которых зависимость от соответствующей координаты описывается комплексной функцией. У нас такова лишь координата φ , а отлично от нуля лишь

$$j_\varphi=\frac{i\hbar}{2\mu}\frac{1}{r\cdot\sin\theta}\cdot\eta^2\left(r,\theta\right)\left(e^{im\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}e^{-im\varphi}-e^{-im\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}e^{im\varphi}\right) .$$

Проводя дифференцирование, получим

$$j_\varphi^e=\frac{e\hbar}{\mu}\frac{1}{r\cdot\sin\theta}m\eta^2\left(r,\theta\right)=-\frac{e\hbar}{2\mu}\cdot\frac{1}{r\cdot\sin\theta}\cdot\left|\psi\left(\bar{r}\right)\right|^2 ,$$

Для компонентов вектора $\left[r,\bar{j}_e\right]$ имеем

$$\left[\bar{r},\bar{j}_e\right]=\begin{vmatrix}\bar{e}_r & \bar{e}_\theta & e_\varphi\\ r & 0 & 0\\ 0 & 0 & j_\varphi^e\end{vmatrix}=-r\cdot j_\varphi^e\bar{e}_\theta=+\frac{e\hbar m}{\mu}\frac{1}{\sin\theta}\left|\psi\right|^2\bar{e}_\theta ,$$

так что

$$\vec{M}=\frac{e\hbar}{2\mu c}m\int\frac{1}{\sin\theta}\left|\psi\right|^2\vec{e}_\theta\cdot d\tau ;$$

Разлагаем $\vec{e}_\theta$ вдоль оси z и перпендикулярно этой оси. При интегрировании второй компонент дает нуль, и будет отлична от нуля лишь z -ая составляющая магнитного момента. Учитывая, что

$$\vec{e}_\theta^z=\left|\bar{e}_\theta\right|\cdot\sin\theta=\sin\theta ,$$

получим

$$M_z=\frac{e\hbar}{2\mu c}m\int\left|\psi\right|^2\cdot d\tau$$

Но волновая функция считается нормированной, а потому окончательно

$$\boxed{M_z = \frac{e\hbar}{2\mu c}\cdot m = M_B \cdot m} \quad ,$$

где M_B - магнетон Бора. Величиной магнитного момента называется максимальное значение его проекции, так что

$$M = \frac{e\hbar}{2\mu c} l \quad .$$

Оператор магнитного момента есть

$$\hat{\vec{M}} = \frac{e\hbar}{2\mu c}\left(\frac{\hat{\vec{L}}}{\hbar}\right)$$

2. Найти оператор скорости частицы, движущейся в однородном магнитном поле.
   Решение. Согласно основному постулату динамики

$$\frac{d\left\langle \vec{R}\right\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left\langle \left[\hat{H}, \hat{\vec{R}}\right]\right\rangle \quad ,$$

а потому естественно определить оператор скорости как

$$\hat{\vec{V}} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\vec{R}}\right] \quad .$$

Для однородного поля можно положить

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{B}\times\vec{r}\right], \quad \mathrm{div}\,\vec{A}=0, \qquad \left[\hat{\vec{P}}, \hat{\vec{A}}\right] = 0 \,,$$

а потому

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\left(\hat{\vec{P}} - \frac{e}{c}\hat{\vec{A}}\right)^2 + \hat{u} = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2\mu} - \frac{e}{\mu c}\left(\hat{\vec{P}}, \hat{\vec{A}}\right) + \hat{H}' \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}' \,,$$

где $\hat{H}'$ включает члены, коммутирующие с координатами. Вычисляем $\hat{V}_x$:

$$\hat{V}_x = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0, x\right] = \frac{i}{\hbar}\left\{\left[\frac{\hat{P}^2}{2\mu}, x\right] - \frac{e}{\mu c}\left[\left(\hat{\vec{P}}, \hat{\vec{A}}\right), \hat{x}\right]\right\} = \frac{i}{\hbar}\left\{\frac{1}{2\mu}\left[\hat{P}_x^2, x\right] - \frac{e}{\mu c}\hat{A}_x\left[\hat{P}_{x,} \hat{x}\right]\right\} =$$

$$\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{1}{2\mu}(-2i\hbar)\hat{P}_x + \frac{e}{\mu c} i\hbar \hat{A}_x\right\} = \frac{\hat{P}_x}{\mu} - \frac{e}{\mu c}\hat{A}_x \quad .$$

Итак,

$$\boxed{\hat{\vec{V}} = \frac{1}{\mu}\left(\hat{\vec{P}} - \frac{e}{c}\hat{\vec{A}}\right)} \quad ,$$

в полном соответствии с классической физикой.

3. Можно ли говорить об определенном векторе скорости частицы, движущейся в магнитном поле?
   Решение. Можно, если три компонента скорости совместно измеримы, т.е. если операторы $\hat{V}_x$, $\hat{V}_y$, $\hat{V}_z$ коммутируют друг с другом. Вычислим коммутаторы

$$\left[\hat{V}_x,\hat{V}_y\right]=\frac{1}{\mu^2}\left[\hat{P}_x-\frac{e}{c}\hat{A}_x,\ \hat{P}_y-\frac{e}{c}A_y\right]=$$

$$\cancel{\frac{1}{\mu^2}\left[\hat{P}_x,\hat{P}_y\right]}^{0}+\cancel{\frac{e^2}{\mu^2e^2}\left[\hat{A}_x,\hat{A}_y\right]}^{0}-\frac{e}{\mu^2c}\left[\hat{P}_x,\hat{A}_y\right]-\frac{e}{\mu^2c}\left[\hat{A}_x,\hat{P}_y\right]=$$

$$=+\frac{e}{\mu^2c}i\hbar\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{e}{\mu^2c}i\hbar\frac{\partial A_x}{\partial y}=i\frac{e\hbar}{\mu^2c}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=i\frac{e\hbar}{\mu^2c}\cdot\left(\mathrm{rot}\bar{A}\right)_z .$$

Итак, $$\boxed{\left[\hat{V}_x,\hat{V}_y\right]=i\frac{e\hbar}{\mu^2c}\hat{B}_z\ ;\ \left[\hat{V}_z,\hat{V}_x\right]=i\frac{e\hbar}{\mu^2c}\hat{B}_y\ ;\ \left[\hat{V}_y,\hat{V}_z\right]=i\frac{e\hbar}{\mu^2c}\hat{B}_x} .$$

Видим, что говорить об определенном векторе скорости при наличии магнитного поля нельзя: два перпендикулярных вектору $\bar{B}$ компонента скорости совместно не измеримы.

4. Определить энергетический спектр бесспиновой частицы, движущейся в однородном магнитном поле.

Решение. Направляем ось Z вдоль поля и выбираем векторный потенциал в виде

$$A_z=-B_y\ ,\ A_y=0\ ,\ A_z=0\ .$$

Гамильтониан записывается как

$$\hat{H}=\frac{1}{2\mu}\left(\hat{P}_x+\frac{eB}{c}\hat{y}\right)^2+\frac{\hat{P}^2}{2\mu}y+\frac{P_z^2}{2\mu}\ ,$$

или

$$\hat{H}=\frac{1}{2\mu}\left(\hat{P}_x^2+\hat{P}_y^2+\hat{P}_z^2+\frac{2eB}{c}\cdot\hat{P}_x\hat{y}+\frac{e^2B^2}{c^2}\hat{y}^2\right) .$$

Он не содержит $\hat{x}$ и $\hat{z}$, и коммутирует с $\hat{P}_x$ и $\hat{P}_z$. Это означает сохранение компонентов обобщенного импульса $\hat{P}_x$ и $\hat{P}_z$. Их собственные значения пробегают всю вещественную прямую, причем согласно задаче 2

$$\hat{P}_z=\mu\hat{V}_z$$

Поэтому скорость вдоль поля может быть любой, т.е. движение по оси не квантуется.

Сохранение $\hat{P}_x$ и $\hat{P}_z$ позволяет искать стационарные состояния в виде

$$\psi\left(x,y,z\right)=e^{\frac{i}{\hbar}\left(p_xx+p_yy+p_zz\right)}.$$

Подставляем в уравнение Шредингера

$$\frac{1}{2\mu}\left(\hat{P}_x^2+\hat{P}_y^2+\hat{P}_z^2+\frac{2eB}{c}\cdot\hat{P}_x\hat{y}+\frac{e^2B^2}{c^2}\hat{y}^2\right)\psi\left(x,y,z\right)=E\cdot\psi\left(x,y,z\right) .$$

И получаем

$$\frac{1}{2\mu}\left(p_x^2-\hbar^2\frac{d^2}{dy^2}+p_z^2+\frac{2eB}{c}yp_x+\frac{e^2B^2}{c^2}y^2\right)\eta(y)=E\eta(y)$$

$$-\frac{1}{2\mu}\left[-\hbar^2\frac{d^2}{dy^2}+p_z^2+\left(\frac{eB}{c}y+p_x\right)^2\right]\eta(y)=E\cdot\eta(y)$$

$$\eta''(y)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-\frac{p_Z^2}{2\mu}-\frac{\mu}{2}\left(\frac{eB}{\mu c}\right)^2\left(y+\frac{cp_x}{eB}\right)^2\right]\eta(y)=0$$

Вводим обозначения

$$-\frac{cp_x}{eB}=y_0,\ \ \omega=\frac{eB}{\mu c},\ \ \tilde{E}=E-\frac{p_z^2}{2\mu}$$

и переходим к новой переменной

$$y = y - y_0 \ .$$

Тогда стационарное уравнение Шредингера запишется как

$$\eta''+\frac{2\mu}{\hbar}\left[\tilde{E}-\frac{\mu\omega^2}{2}y^2\right]\eta = 0 \ .$$

Но это есть уравнение осциллятора, а потому

$$\tilde{E}_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \ .$$

Окончательно для энергетического спектра получаем

$$E_n = \hbar\frac{eB}{\mu c}\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{p_z^2}{2\mu} \ .$$

Второе слагаемое есть неквантованная энергия, отвечающая движению вдоль поля: на этот непрерывный спектр накладывается спектр осциллятора. Если $p_z = 0$, то спектр дискретный. Он описывается первым слагаемым, отвечающим движению в плоскости (x,y). В классической механике это есть движение по окружности с неподвижным центром. Сохраняющаяся величина y_0 отвечает классической y - координате центра. Поскольку энергия не содержит p_x, каждый уровень бесконечно вырожден. На классическом языке это означает равноправие всех окружностей с разными y - координатами центра. Другой классической координатой центра является

$$x_0 = \frac{cB_y}{eB} \ .$$

Можно проверить, что оператор x_0 коммутирует с $\hat{H}$, а потому и эта величина сохраняется. Но он не коммутирует с $\hat{y}_0$, а потому координаты x_0 и y_0 совместно не измеримы. Это значит, что в квантовой механике нельзя говорить об определенном центре окружности, а вместе с этим теряет смысл и само понятие окружности, т.е. траектории.

5. Обсудить зеемановское расщепление желтого дублета натрия.
   Решение. В магнитном поле энергетический уровень с заданными L, S, J расщепляется на $2J+1$ подуровней с разными $m_J = m$:

где g - фактор Ланде:

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} \quad .$$

Спектральные линии претерпевают расщепления (эффект Зеемана)

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2\mu c}\left(m_1 g_1 - m_2 g_2\right) \equiv \Delta\omega_L \left(m_1 g_1 - m_2 g_2\right) \quad ,$$

Причем действуют правила отбора

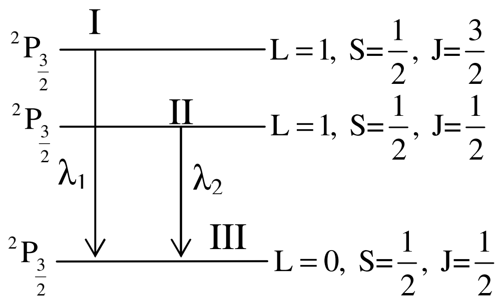
$$\Delta m = 0, \quad \pm 1 \ .$$

Желтый дублет натрия – две линии с длинами волн

$$\lambda_1 = 5896 \text{ Å} \ \text{ и } \ \lambda_2 = 5890 \text{ Å} \ ,$$

отвечающие переходам ${}^2P_{\frac{1}{2}} - {}^2S_{\frac{1}{2}}$ и ${}^2P_{\frac{3}{2}} - {}^2S_{\frac{1}{2}}$.

Квантовые числа указаны на рисунке.
При наложении магнитного поля верхний подуровень расщепляется на 4 компонента, нижний – на два компонента, самый нижний уровень – тоже на два компонента.
Вычисляем факторы Ланде (сверху вниз):



$$g_I = 1 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - 1(1+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)} = 1 + \frac{\frac{15}{4} - 2 + \frac{3}{4}}{\frac{15}{2}} \ ; \quad \boxed{g_I = \frac{4}{3}} \ ;$$

$$g_{II} = 1 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - 1(1+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)} = 1 + \frac{\frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} \ ; \quad \boxed{g_{II} = \frac{2}{3}}$$

$$g_{III} = 1 + \frac{2J(J+1)}{2J(J+1)} \ , \qquad \boxed{g_{III} = 2}$$

Изображаем теперь схему расщепления уровней с указанием значений m и gm а также разрешенных переходов с излучением.

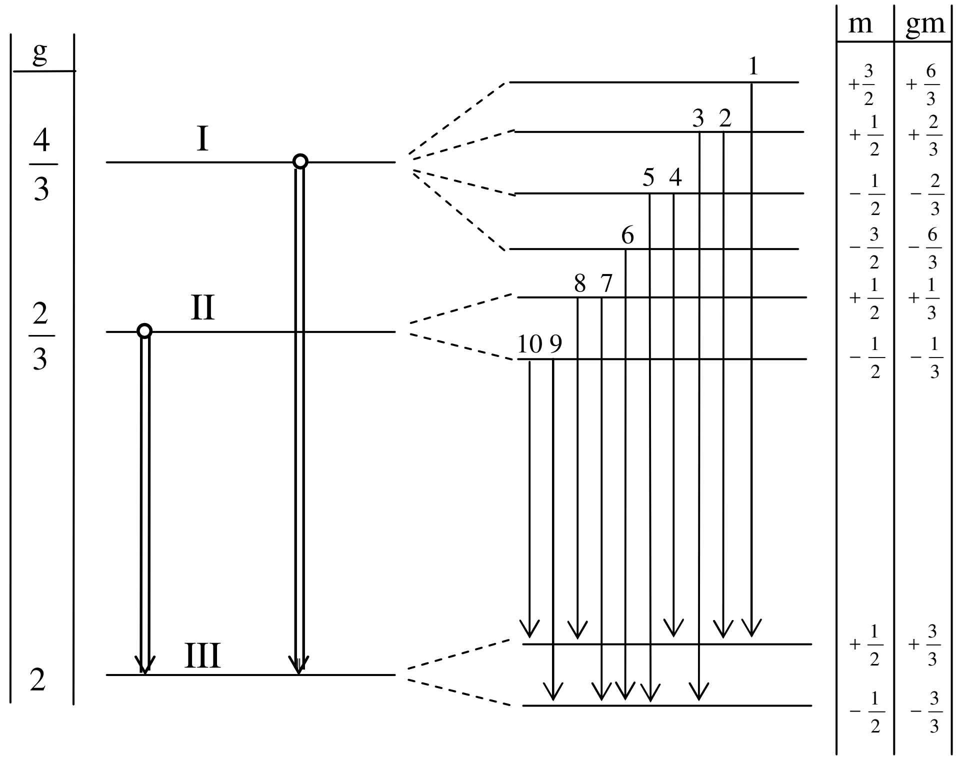
Видим, что три уровня расщепились на 4 + 2 + 2 = 8 подуровней, а две спектральные линии тонкой структуры расщепились на 6 + 4 = 10 зеемановских линий. Величины расщеплений сразу находятся из последнего столбца как разности соответствующих значений gm . Если их выражать в единицах лоренцевского расщепления $\Delta\omega_L$, то получим

$$1 \div +\frac{3}{3}\ ,\ 2 \div -\frac{1}{3}\ ,\ 3 \div +\frac{5}{3}\ ,\ 4 \div -\frac{5}{3}\ ,\ 5 \div 4+\frac{1}{3}\ ,\ 6 \div -\frac{3}{3}\ ,$$

$$7 \div +\frac{4}{3}\ ,\ 8 \div -\frac{3}{2}\ ,\ 9 \div +\frac{2}{3}\ ,\ 10 \div -\frac{4}{3} \quad .$$

В спектроскопии это кратко записывают следующим образом:

$$\boxed{\frac{+5,+3,+1,-1,-3,-5}{3} \qquad \text{и} \qquad \frac{+4,+2,-2,-4}{3}} \quad .$$



g
$\frac{4}{3}$
$\frac{2}{3}$
2
I
II
III
1
3 2
5 4
6
8 7
10 9
m
gm
$+\frac{3}{2}$ $+\frac{6}{3}$
$+\frac{1}{2}$ $+\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$ $-\frac{2}{3}$
$-\frac{3}{2}$ $-\frac{6}{3}$
$+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$
$+\frac{1}{2}$ $+\frac{3}{3}$
$-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{3}$