Л Е К Ц И Я 16

ОСНОВЫ КВАЗИРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ
Продолжение

УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Произвольная волновая функция, подчиняющаяся уравнению Дирака, может быть представлена в виде разложения по найденным частным решениям:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{p}\sum_{\lambda=1}^{2}\left\{e^{-i\frac{\varepsilon_p}{\hbar}t}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}w_{+\lambda}(\mathbf{p}) + e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_p t}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}w_{-\lambda}(\mathbf{p})\right\}.$$

Рассмотрим нерелятивистский предел

$$v << c:\ p^2 << \mu^2c^2, \quad \varepsilon_p \approx \mu c^2.$$

В функции $w_{+\lambda}(\mathbf{p})$ с положительной энергией имеем:

$$v_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{c(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})}{\varepsilon_p + \mu c^2}u_{0\lambda} \cong \frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})}{\mu c}u_{0\lambda}(\mathbf{p}),$$

$$v_\lambda(\mathbf{p}) \approx \frac{V}{c}u_{0\lambda},$$

и ее нижние компоненты (v) гораздо меньше верхних компонентов (u). Аналогично для функции $w_{-\lambda}(\mathbf{p})$ с отрицательной энергией получим

$$u_\lambda(\mathbf{p}) \approx \frac{V}{c}v_{0\lambda},$$

т.е. здесь малыми являются верхние компоненты (u).

Кроме того, всегда при $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$w^+_{\pm\lambda_1}(\mathbf{p})w_{\mp\lambda_2}(\mathbf{p}) = 0.$$

Действительно,

$$w^+_{-\lambda_1}w_{+\lambda_2} = -v^+_{0\lambda_1}\frac{c(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})}{\varepsilon_p + \mu c^2}u_{0\lambda_2} + v^+_{0\lambda_1}\frac{c(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})}{\varepsilon_p + \mu c^2}u_{0\lambda_2} = 0.$$

Из уравнения непрерывности следует, что суммарная вероятность не зависит от времени, т.е. она постоянна. Вспоминая, что

$$\rho = \psi^+\psi,$$

запишем это условие как

$$\int d\mathbf{p}\sum_{\lambda=1}^{2} \{w_{+\lambda}^{+}(\mathbf{p})\, w_{+\lambda}(\mathbf{p}) + w_{-\lambda}^{+}(\mathbf{p})\, w_{-\lambda}(\mathbf{p})\} = \text{const}.$$

(все перекрестные члены обращаются в нуль). Первое слагаемое - вероятность найти частицу с положительной энергией, второе - с отрицательной энергией. Видим, что сохраняется только сумма этих вероятностей. Поэтому состояния с отрицательными энергиями нельзя просто выбросить - сразу нарушится вероятностная интерпретация.

Но состояния с отрицательными энергиями очень нехороши с физической точки зрения, так как частица может самопроизвольно перейти из состояния с $E_1=-\varepsilon_{p1}$ в состояние с $E_2=-\varepsilon_{p2}$, где $\varepsilon_{p2}>\varepsilon_{p1}$. При этом выделится «даровая» энергия

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p1} > 0.$$

Мало того, частицы из физических состояний с положительными энергиями могут под действием сколь угодно слабого поля перескочить через «энергетическую щель» шириной $2\mu c^2$ и попасть в область отрицательных энергий, также поставляя даровую энергию (это называется парадоксом Клейна).

Чтобы избавиться от этих неприятностей, Дирак ввел представление о *вакуумном фоне*. Она базируется на таких положениях.

1. Описываем систему фермионов, а они подчиняются принципу Паули (в каждом состоянии не более одной частицы).

2. Вакуум - состояние, в котором все уровни с отрицательными энергиями заняты, а с положительными энергиями свободны.

3. Для любой динамической величины измеряема только разность ее значений в рассматриваемом состоянии и в вакуумном состоянии.

Таким образом, дираковский вакуум - это состояние с бесконечным числом частиц, с энергией $-\infty$ (и с зарядом $-\infty$, если частицы - электроны).

При нормировке волновых функций неудобно иметь дело с непрерывной переменной **p.** Поэтому разобьем все пространство на ячейки с размерностями L, и на границах ячеек наложим периодические граничные условия. Величина L должна быть такой, чтобы нарушение лоренц-инвариантности было незначительным. Тогда интеграл по **p** заменится суммой по дискретным значениям **p** , и постоянство вероятности запишется как

$$\sum_{\mathbf{p},\lambda} \{w_{+\lambda}^{+}(\mathbf{p})\, w_{+\lambda}(\mathbf{p})+ w_{-\lambda}^{+}(\mathbf{p})\, w_{-\lambda}(\mathbf{p})\} = C.$$

Будем считать, что функции $w_{+\lambda}$ описывают модель N невзаимодействующих частиц, т.е. как бы одна частица N раз повторяется. Нормируем волновую функцию условием $C=N$. Тогда величина

$$w_{+\lambda}^{+}(\mathbf{p})w_{+\lambda}(\mathbf{p})$$

будет средним числом частиц, имеющих определенные значения $E=\varepsilon_p$, **p** , λ (λ - значение спиновой переменной), так что

$$w_{\pm\lambda}^{+}w_{\pm\lambda} \equiv N_{\pm}(\mathbf{p}).$$

Введем число частиц в системе N, равное

$$N = \sum_{\mathbf{p},\lambda} \{N_{-\lambda}(\mathbf{p}) + N_{+\lambda}(\mathbf{p})\}.$$

Для энергии, точнее, для ее среднего значения, получим

$$E = \sum_{\mathbf{p},\lambda} \varepsilon_p \{N_{+\lambda}(\mathbf{p}) + N_{-\lambda}(\mathbf{p})\}$$

(строго это получается из того, что оператором энергии формально можно считать оператор $i\hbar \partial/\partial t$, который, действуя на волновые функции «вышибает» из каждой экспоненты или ε_p, или $-\varepsilon_p$). Таким образом, энергия не является положительно определенной величиной. Это есть цена, которую мы заплатили за положительную определенность плотности вероятности. В состоянии вакуума

$$N_{-\lambda}(\mathbf{p}) = 1, \quad N_{+\lambda}(\mathbf{p}) = 0,$$

так что

$$N_0 = \sum_{\mathbf{p},\lambda} 1, \quad E_0 = -\sum_{\mathbf{p},\lambda} \varepsilon_p 1.$$

Для физических значений числа частиц и энергии имеем:

$$N_{\text{физ}} = N - N_0 = \sum_{\mathbf{p},\lambda} \{N_{+\lambda}(\mathbf{p}) - [1 - N_{-\lambda}(\mathbf{p})]\}$$

и

$$E_{\text{физ}} = E - E_0 = \sum_{\mathbf{p},\lambda} \varepsilon_p \{N_{+\lambda}(\mathbf{p}) + [1 - N_{-\lambda}(\mathbf{p})]\}.$$

Так как $N_{-\lambda}(\mathbf{p}) \le 1$ (оно равно 0 или 1), то $E_{\text{физ}} > 0$. Более того, величина $N_{\text{физ}}$ сохраняется. Введем

$$\tilde{N}_{\lambda}(\mathbf{p}) \equiv 1 - N_{-\lambda}(\mathbf{p}).$$

Это есть среднее число дырок в вакуумном фоне. Введем также число частиц с положительными энергиями над вакуумным фоном

$$N_{\lambda}(\mathbf{p}) \equiv N_{+\lambda}(\mathbf{p}).$$

Тогда получим

$$E_{\text{физ}} = \sum_{\mathbf{p},\lambda} \varepsilon_p \{N_{\lambda}(\mathbf{p}) + \tilde{N}_{\lambda}(\mathbf{p})\}.$$

Поэтому $\tilde{N}_{\lambda}(\mathbf{p})$ можно интерпретировать как число реальных микрообъектов, имеющих нормальную (положительную) энергию. Иными словами, каждую дырку в вакуумном фоне можно интерпретировать как реальный микрообъект. Он называется *античастицей*.

Но и здесь «вытащили хвост, нос увяз». В новой нормировке число частиц оказывается таким:

$$N_{\text{физ}} = \sum_{\mathbf{p},\lambda} \{N_{\lambda}(\mathbf{p}) - \tilde{N}_{\lambda}(\mathbf{p})\}.$$

Что означает второе отрицательное слагаемое? Пока ничего. Но припишем каждой частице заряд e. Тогда полный заряд будет

$$Q = eN = e\sum_{\mathbf{p},\lambda} \{N_{+\lambda}(\mathbf{p}) + N_{-\lambda}(\mathbf{p})\}.$$

Наблюдать же будем разность над фоном

$$Q_{\text{физ}} = Q - Q_0 = Q - eN_0 = e\sum_{\mathbf{p},\lambda} \{N_\lambda(\mathbf{p}) - \tilde{N}_\lambda(\mathbf{p})\}.$$

Видим, что античастицы дают отрицательный вклад в заряд, а потому каждый из них естественно приписать заряд не e, а $-e$. Тогда это будет записываться как

$$Q_{\text{физ}} = \sum_{\mathbf{p},\lambda} \{eN_\lambda(\mathbf{p}) + (-e)\,\tilde{N}_\lambda(\mathbf{p})\},$$

и все хорошо. Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0$$

теперь следует интерпретировать как закон сохранения заряда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j}_e = 0,$$

где

$$\rho_e = e(\rho - \rho_0),\ \mathbf{j}_e = e\mathbf{j}.$$

Допускает интерпретацию и сохранение величины

$$N_{\text{физ}} = \sum_{\mathbf{p},\lambda} \{N_\lambda(\mathbf{p}) - \tilde{N}_\lambda(\mathbf{p})\}.$$

Сохраняется не число частиц, а *разность* между числом частиц и античастиц. Это провозвестник законов сохранения барионного и лептонного зарядов, широко используемых в физике элементарных частиц.

Итак, вычитание вакуумного фона равнозначно просто перенормировке энергии E (сдвигу начала отсчета). Но следует заметить, что вычитаем-то мы

$$\sum_{\mathbf{p},\lambda} 1 = \infty,$$

т.е. бесконечную величину. Так что, с математической точки зрения корректность всего этого под большим сомнением (сравн. с электродинамикой, где рассматривались радиационное трение и перенормировка массы). *В действительности* у нас нет взаимодействия, поэтому частицы с ε_p и $-\varepsilon_p$ не переходят друг в друга (хотя смотр. замечание выше о парадоксе Клейна). Поэтому вероятности сохраняются для обоих видов частиц по-отдельности. Всякое включение взаимодействия будет изменять числа частиц ε_p и $-\varepsilon_p$. Дырочная теория не является полностью последовательной для релятивистских частиц. Тут получается так. За счет взаимодействия частица с ε_p может занять дырку тоже с положительной энергией. Но дырка на фоне вакуума, как договорились, есть античастица с положительной энергией. Поэтому получается аннигиляция пары частица - античастица с высвобождением, например, фотонов. Наоборот, при действии фотона на вакуум частица с $-\varepsilon_p$ может стать частицей с ε_p, а образовавшаяся дырка есть античастица - родилась пара: частица - античастица.

Однако, вернемся к более земным вещам. И рассмотрим частицу со спином $\hbar/2$, поведение которой описывает уравнение Дирака

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi,$$

где в явной форме записи

$$\hat{H} = \frac{\hbar c}{i} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta \mu c^2.$$

Рассмотрим оператор орбитального момента

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}},$$

у которого третий компонент есть

$$\hat{L}_3 = -i\hbar (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}).$$

Найдем его коммутатор с гамильтонианом:

$$\left[\hat{H}, \hat{L}_3\right] = -\hbar^2 c \left[\alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}, x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right] =$$

$$= -\hbar^2 c \left\{ \left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right] - \left[\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right] \right\} =$$

$$= -\hbar^2 c (\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) \neq 0$$

Таким образом, компоненты вектора орбитального момента не коммутируют с гамильтонианом:

$$\left[\hat{H}, \hat{L}_j\right] \neq 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

а потому $\hat{\mathbf{L}}$ не сохраняется.

Но полный момент импульса для свободной частицы должен сохраняться в силу изотропии пространства. Поэтому $\hat{\mathbf{L}}$ - не полный момент, а есть еще что-то. Это что-то, конечно, спин, и полный момент есть

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}.$$

Тогда из $\left[\hat{H}, \hat{\mathbf{J}}\right] = 0$ будет следовать

$$\left[\hat{H}, \hat{\mathbf{S}}\right] = -\left[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}\right];$$

в частности,

$$\left[\hat{H}, \hat{S}_3\right] = \hbar^3 c (\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^1}).$$

Оператор $\hat{\mathbf{S}}$ не действует на $\mathbf{r}$, а потому оператор $\hat{\mathbf{S}}$ должен быть матрицей. Значит, он должен выражаться через α_j и β. Наша цель - как раз в том, чтобы получить выражение для спиновых операторов.