Л Е К Ц И Я 17

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ С ВНЕШНИМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ

Будем искать оператор $\hat{S}_3$ в виде

$$\hat{S}_3 = a\alpha_1\alpha_2 .$$

При коммутации с $\hat{H}$ его член $\beta\mu c^2$ даст нуль, ибо β антикоммутирует с α_1 и α_2, а значит, коммутирует с их произведением. Поэтому

$$\left[\hat{H}, \hat{S}_3\right] = \left[\hat{H}, a\alpha_1\alpha_2\right] = a\frac{\hbar c}{i}\left[\alpha_j \frac{\partial}{\partial x^j}, \alpha_1\alpha_2\right].$$

Используя перестановочные соотношения для α_j , найдем

$$\left[\hat{H}, \hat{S}_3\right] = \frac{2\hbar c a}{i}(\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^1} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^2}) .$$

Сравнивая с нужным результатом, найдем $a = -\frac{i\hbar}{2}$, и потому

$$\hat{S}_3 = -\frac{i\hbar}{2}\alpha_1\alpha_2.$$

Учитываем явный вид матриц α_j :

$$\hat{S}_3 = -\frac{i\hbar}{2}\alpha_1\alpha_2 = -\frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_1\sigma_2 \end{pmatrix},$$

а также то, что $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$:

$$\hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычисляются $\hat{S}_1$ è $\hat{S}_2$:

$$\hat{S}_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \hat{S}_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор квадрата спина есть

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2 = \frac{\hbar^2}{4}3\hat{I} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \mathbf{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так как $\sigma^2_j = \mathbf{1}$. Таким образом,

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\hat{I} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})\hbar^2\hat{I} = \frac{\hbar}{2}(\frac{\hbar}{2}+\hbar)\hat{I}\ .$$

С другой стороны, из перестановочных соотношений для операторов момента мы в свое время получали

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = S(S+\hbar)\hat{I}\ ,$$

где S-значение спинового момента. Сравнивая с $3/4\hbar^2$, находим

$$S = \hbar/2,$$

т.е. уравнение Дирака описывает частицы со спином 1/2 (электрон, позитрон, мюон, протон, нейтрон и т.д.). Для описания нейтрино, у которых тоже S= 1/2, уравнение Дирака нужно модифицировать, так как у них m = 0.

Вернемся к *уравнению Клейна-Гордона* - релятивистскому уравнению второго порядка, которому должна подчиняться любая волновая функция. Из него было ранее получено уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0,$$

где

$$\rho = \frac{i\hbar}{2\mu c^2}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}),\ \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2\mu i}\{\psi^*(\nabla\psi)-(\nabla\psi^*)\psi\},$$

причем величина ρ не является положительно определенной и не может поэтому быть интерпретирована как плотность вероятности. Но, рассматривая уравнение Дирака, мы перешли от ρ и $\mathbf{j}$ к ρ_e и $\mathbf{j}_e$ - величинам, описывающим плотность зарядов и токов. Это означает, что в релятивистских уравнениях нужно отказаться от точного описания одночастичных систем, а считать, что они описывают как-то системы многих частиц. Итак, делаем переходы

$$\rho \to \rho_e = e\rho, \quad \mathbf{j} \to \mathbf{j}_e = e\mathbf{j}$$

Так как e=const, то ρ_e и $\mathbf{j}_e$ также удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j}_e = 0,$$

которое теперь выражает закон сохранения электрического заряда. Так как

$$E = \pm\varepsilon_p,\quad \varepsilon_p \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2c^2+\mu^2c^4}\ ,$$

то в любой релятивистской теории возникают решения с положительными и отрицательными энергиями

$$\psi_+:\ E = \varepsilon_p,\quad \psi_-:\ E = -\varepsilon_p.$$

Им отвечают плотности заряда

$$\rho_e^{\pm} = \frac{i\hbar e}{2\mu c^2}(\psi_\pm^*\frac{\partial\psi_\pm}{\partial t} - \psi_\pm\frac{\partial\psi_\pm^*}{\partial t})\ .$$

Рассмотрим нерелятивистский предел этих выражений. Так как $\psi_\pm$ удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона, то для них

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \to E\psi, \qquad -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^* \to E\psi^*$$

(см. самое начало релятивистских рассмотрений). Подстановка дает

$$\rho_e^{\pm} = e\frac{E}{\mu c^2}\psi_\pm^*\psi_\pm.$$

Нерелятивистский предел-это $p^2 << \mu^2 c^2$, или $\varepsilon_p \approx \mu c^2$.

1. При $E=\varepsilon_p$ получаем $E \approx \mu c^2$, и

$$\rho_e^{+} = e\psi_+^*\psi_+.$$

Это есть положительно определенная величина. При нормированной функции ψ_+ интеграл от нее будет равен e, а значит ρ_e можно интерпретировать как плотность заряда одной частицы с q=e. В многочастичной системе ρ_e^+ - это плотность зарядов, описываемых функцией ψ_+.

2. При $E = -\varepsilon_p$ получаем $E \approx -\mu c^2$, и

$$\rho_e^{-} = -e\psi_-^*\psi_-.$$

Это есть плотность зарядов для частиц с $q = -e$.

Таким образом, в нерелятивистском приближении решения УКГ с положительной и отрицательной энергиями задают плотность вероятности обнаружения частиц и античастиц, соответственно.

Найдем спин частиц, описываемых УКГ. Убедимся, что орбитальный момент для этих частиц сохраняется, т.е. его оператор коммутирует с гамильтонианом. Этот оператор

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$$

в импульсном представлении записывается как

$$\hat{\mathbf{L}} = i\hbar\vec{\nabla}_p \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\mathbf{p} \times \vec{\nabla}_p,$$

откуда, в частности,

$$\hat{L}_3 = i\hbar\left(p_1\frac{\partial}{\partial p_2} - p_2\frac{\partial}{\partial p_1}\right).$$

Записываем уравнение на собственные значения гамильтониана в импульсном представлении:

$$\hat{H}\tilde{\psi}_\pm(\mathbf{p}) = \pm\varepsilon_p\tilde{\psi}_\pm(\mathbf{p})$$

и рассматриваем коммутатор на его решениях:

$$\left[\hat{L}_3,\hat{H}\right]\psi_+ = \left[\hat{L}_3,\varepsilon_p\right]\psi_+ = -i\hbar(p_1\frac{\partial\varepsilon_p}{\partial p_2} - p_2\frac{\partial\varepsilon_p}{\partial p_1})\psi_+ =$$

$$-i\hbar(p_1\frac{p_2}{\varepsilon_p} - p_2\frac{p_1}{\varepsilon_p})\psi_+ = 0$$

Аналогично получаем, что

$$\left[\hat{L}_3,\hat{H}\right]\psi_- = 0.$$

Таким образом, оператор орбитального момента сохраняется, и его можно считать полным моментом. Поэтому УКГ описывает частицы с нулевым спином: S=0.

Примечание. Показано только для $\hat{L}_3$, но совершенно аналогично доказывается, что $\hat{L}_1$ è $\hat{L}_2$ тоже коммутируют с $\hat{H}$. Тем не менее, отсюда строго говоря, не следует, что S=0. Мы доказали только, что $\hat{\mathbf{L}}$ коммутирует с $\hat{H}$, и отсюда следует только то, что и $\hat{\mathbf{S}}$ коммутирует с $\hat{H}$, так как в силу изотропии пространства $\hat{\mathbf{J}}$ коммутирует с $\hat{H}$ всегда. Значит, по ходу дела совершено предположение, что $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{J}}$, но оно-то ниоткуда не следует. Тем не менее, все можно обосновать и абсолютно строго. Мы доказали только то, что УКГ *может* описывать частицы с S=0.

Так или иначе, принимаем, что УКГ описывает частицы с нулевым спином - например, пионы, каоны.

Вернемся вновь к *уравнению Дирака* и введем в рассмотрение взаимодействие частиц с внешним электромагнитным полем. Оно описывается 4-потенциалом

$$A_\mu = \{A_0,A_1,A_2,A_3\} = \{\varphi,-\mathbf{A}\},$$

и по общему правилу нужно от обычного 4-импульса перейти к обобщенному 4-импульсу

$$p_\mu \to p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu,$$

что в трехмерных обозначениях сводится к известным заменам

$$E \to E - e\varphi, \quad \mathbf{p} \to \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}.$$

В операторном виде

$$\hat{p}_\mu \to \hat{p}_\mu - \frac{e}{c}\hat{A}_\mu,$$

и уравнение Дирака превращается в следующее:

$$(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}A_0)\psi = \alpha_j(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{e}{c}A_j)\psi + \beta\mu c\psi.$$

Желаем выяснить, во что переходит это полное уравнение Дирака в нерелятивистском пределе. Нас интересуют стационарные состояния, а потому ищем решения в виде

$$\psi(\mathbf{r},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E+\mu c^2)t}\begin{pmatrix}\varphi(\mathbf{r})\\ \chi(\mathbf{r})\end{pmatrix}.$$

Сама функция ψ-4 - компонентный столбец, а записанные функции φ и χ - двухкомпонентные столбцы:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

(см. выше). В искомой волновой функции $E+\mu c^2$ - полная энергия, а μc^2 - энергия покоя, значит E-«просто» энергия, как раз и имеющая непосредственный релятивистский аналог. Подставляем написанное ψ в полное уравнение Дирака, и получаем

$$(E - eA_0)\varphi = C\boldsymbol{\sigma}\,(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})\,\chi$$

$$(E + 2\mu c^2 - eA_0)\chi = C\boldsymbol{\sigma}\,(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})\,\varphi.$$

Пока все точно. Теперь рассматриваем нерелятивистское приближение, в котором $|E| \ll \mu c^2$, причем считаем поле слабым - в том смысле, что $|eA_0| \ll \mu c^2$. Из второго уравнения системы выражаем χ через φ и делаем указанные приближения:

$$\chi = \frac{C\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})}{E + 2\mu c^2 - eA_0}\varphi \approx \frac{\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})}{2\mu c}\varphi .$$

Видим, что в нерелятивистском пределе χ мала: $\chi \approx v/c\cdot\varphi$. Подставляем эту функцию в первое уравнение системы:

$$(E - eA_0)\varphi = 1/2\mu\,[\boldsymbol{\sigma}\,(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})]^2\varphi.$$

Теперь начинаем преобразовывать с учетом того, что

$$\sigma_i^2 = \mathbf{1}, \qquad \sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk} \quad (i \neq j).$$

Имеем

$$[\boldsymbol{\sigma}\,(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})]^2 = \sum_{i,j}\left\{\sigma_i(\hat{p}_i - \frac{e}{c}\hat{A}_i)\right\}\left\{\sigma_j(\hat{p}_j - \frac{e}{c}\hat{A}_j)\right\} =$$

$$= \sum_i \sigma_i\sigma_i(\hat{p}_i - \frac{e}{c}\hat{A}_i)(\hat{p}_i - \frac{e}{c}\hat{A}_i) + \sum_{i\neq j}\sigma_i\sigma_j(\hat{p}_i - \frac{e}{c}\hat{A}_i)(\hat{p}_j - \frac{e}{c}\hat{A}_j) =$$

$$= (\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})^2 + i\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\sigma_k(\hat{p}_i - \frac{e}{c}\hat{A}_i)(\hat{p}_j - \frac{e}{c}\hat{A}_j) =$$

$$= (\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})^2 - i\frac{e}{c}\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\sigma_k(\hat{p}_i\hat{A}_j + \hat{A}_i\hat{p}_j) =$$

$$= (\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})^2 - \frac{e\hbar}{c}\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\sigma_k\frac{\partial A^j}{\partial x_i} =$$

$$= (\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})^2 - \frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma}\,rot\,\hat{\mathbf{A}} = (\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})^2 - \frac{e\hbar}{c}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{H})$$

где **H** - напряженность магнитного поля. Переход к предпоследней строке осуществляется так:

$$(\hat p_i \hat A_J + \hat A_i \hat p_j)\varphi = -i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat A_j\varphi) + \hat A_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\} =$$

$$= -i\hbar\frac{\partial \hat A_j}{\partial x_i}\varphi - i\hbar \hat A_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - i\hbar A_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\hat p_i \hat A_j + \hat A_i \hat p_j) = -i\hbar\frac{\partial \hat A_j}{\partial x_i} - i\hbar\left(\frac{\partial \hat A_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat A_i}{\partial x_j}\right),$$

но второй член симметричен по индексам *i* и *j*, и его свертка с антисимметричным тензором ε_{ijk} дает нуль. При переходе к последней строке учтено, что в тензорной символике ротор определяется так:

$$(\mathrm{rot}\mathbf{a})_k = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial A^j}{\partial x_i}$$

После этих выкладок самое верхнее на странице уравнение можно переписать так:

$$\left\{\frac{1}{2\mu}(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})^2 + eA_0 - \frac{e\hbar}{2\mu c}(\boldsymbol{\sigma}H)\right\}\varphi = E\varphi.$$

Это есть что-то вроде стационарного уравнения Шредингера для дираковской частицы со спином S=1/2 (электрона) в электромагнитном поле, причем в нерелятивистском приближении. Оно называется *уравнением Паули*. Слева стоит полный гамильтониан, содержащий три члена. Первый отвечает кинетической энергии частицы и взаимодействию ее орбитального момента с внешним магнитным полем. Второй член - энергия частицы в электрическом поле. Третий член следует интерпретировать как взаимодействие собственного (спинового) магнитного момента частицы с внешним магнитным полем. Имея в виду, что в электродинамике энергия взаимодействия магнитного момента с магнитным полем есть

$$-(\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}),$$

как раз и естественно отождествить величину

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{e\hbar}{2\mu c}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

с собственным магнитным моментом. Тогда уравнение Паули запишется как

$$\left\{\frac{1}{2\mu}(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}})^2 + e\hat A_0 - (\hat{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{H})\right\}\varphi = E\varphi.$$

Таким образом, у электрона есть некий врожденный магнитный момент, не зависящий от состояния его движения. Его можно записать как

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mu_0\boldsymbol{\sigma},$$

где

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2\mu c}$$

есть *магнетон Бора*. Вспоминая, что оператор спина $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, найдем

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{e}{\mu c}\hat{\mathbf{S}},$$

а для орбитального движения

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_l = \frac{e}{2\mu c}\hat{\mathbf{L}}.$$

Отношение магнитного момента к механическому называется гиромагнитным отношением. Видим, что для спинового магнетизма он вдвое больше, чем для орбитального. Выбирая ось z вдоль поля, запишем для магнитной энергии

$$-((\hat{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{H}) = -\hat{\mu}_z H = -\frac{e}{\mu c} H\hat{S}_z.$$

Так как $S_z = \pm\frac{\hbar}{2}$, то вклад в энергию будет таким:

$$\pm\mu_0 H = \pm\frac{e}{2\mu c}H.$$

Для электрона, позитрона и мюонов получается значение собственного момента очень хорошо согласующееся с опытом. Правда, отклонение все-таки есть, но оно составляет около 0,1% и полностью объясняется квантовой электродинамикой («аномальный» магнитный момент возникает за счет вакуумных поправок). При обсуждении свойств нуклонов вводится *ядерный магнетон*

$$\mu_{я} = \frac{e\hbar}{2m_{р}c}.$$

Если бы протон и нейтрон описывались уравнением Дирака, то получалось бы

$$\mu_p = \mu_я, \qquad \mu_п = 0.$$

Эксперимент же дает

$$\mu_p \cong 2{,}79\mu_я, \qquad \mu_п \cong -1{,}91\mu_я.$$

Эти расхождения происходят из-за того, что для нуклонов приближение свободных частиц неверно с самого начала: они участвуют в очень интенсивном сильном взаимодействии, которое следует как-то сразу учитывать. Так, из-за этого взаимодействия каждый «голый» нуклон оказывается окруженным пионной «шубой», которая и портит затравочные магнитные моменты. На самом деле это старая точка зрения. Все дело в том, что нуклоны состоят из кварков, у которых тоже есть магнитные моменты. Вот из них-то и складываются магнитные моменты протона и нейтрона, и здесь все получается более или менее хорошо. Для нуклонов можно использовать уравнение Паули, но в него нужно включать экспериментальные значения магнитных моментов (для электрона он получился!).