Л Е К Ц И Я   2

СОСТОЯНИЯ МИКРОСИСТЕМ
ПОСТУЛАТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ
Продолжение

Согласно принципу, если система может находиться в состояниях ψ_1 и ψ_2, то она может находиться и в состоянии ψ, описываемом вектором

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle\ ,\ c_1,\ c_2 \in \mathbf{C}.$$

Это значит, что в состоянии ψ можно обнаружить результаты измерений, соответствующие состояниям ψ_1 и ψ_2. Им будут соответствовать определенные вероятности, и нужно уметь вычислять подобные вероятности.

<u>Постулат II</u>. Если векторы $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$ нормированы, и система находится в состоянии ψ, то вероятность обнаружить ее в состоянии φ равна $|\langle\varphi|\psi\rangle|^2$.

Для векторов гильбертова пространства справедливо неравенство Коши - Буняковского (оно же Шварца)

$$\left|\langle\varphi|\psi\rangle\right| \le \sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle\langle\psi|\psi\rangle}\ .$$

Отсюда следует, что для вероятностей

$$0 \le |\langle\varphi|\psi\rangle|^2 \le 1,$$

как это и должно быть.

<u>Замечание</u>. Если векторы $|\tilde{\psi}\rangle$ и $|\tilde{\varphi}\rangle$ состояний ψ и φ не нормированы, то их всегда можно сделать таковыми, умножая на подходящие числа:

$$|\tilde{\psi}\rangle \to |\psi\rangle = \frac{|\tilde{\psi}\rangle}{\sqrt{\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle}} \equiv \frac{|\tilde{\psi}\rangle}{\|\tilde{\psi}\|}\ .$$

Поэтому в общем случае указанная вероятность вычисляется так:

$$\frac{\left|\langle\tilde{\varphi}|\tilde{\psi}\rangle\right|^2}{\langle\tilde{\varphi}|\tilde{\varphi}\rangle\cdot\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle} = \frac{\left|\langle\tilde{\varphi}|\tilde{\psi}\rangle\right|^2}{\|\tilde{\varphi}\|^2\|\tilde{\psi}\|^2}$$

<u>Постулат III</u>. Каждой динамической переменной (наблюдаемой) соответствует некоторый линейный оператор $\hat{A}$, который действует в пространстве векторов состояния, и который является самосопряженным (эрмитовым): $\hat{A}^+ = \hat{A}$.

Вспомним некоторые математические понятия. Для *линейного оператора*

$$\hat{A}\ \{c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle\} = c_1\hat{A}\ |\psi_1\rangle + c_2\hat{A}\ |\psi_2\rangle;$$

$$\forall|\psi_2\rangle,|\psi_2\rangle \in c_2,\quad c_1 \in \mathbf{C}.$$

В множестве операторов вводятся операции *сложения*:

$$(\hat{A}_1+\hat{A}_2)|\psi\rangle \overset{\text{def}}{=} \hat{A}_1|\psi\rangle + \hat{A}_2|\psi\rangle,$$

умножения на комплексные числа:

$$(c\hat{A})|\psi\rangle \overset{\text{def}}{=} c\,(\hat{A}|\psi\rangle)$$

и *перемножения*:

$$(\hat{A}_1\hat{A}_2)|\psi\rangle \overset{\text{def}}{=} \hat{A}_1\,(\hat{A}_2|\psi\rangle).$$

Операция умножения операторов, вообще говоря, некоммутативна:

$$\hat{A}\,\hat{B} \neq \hat{B}\,\hat{A}\,.$$

В связи с этим вводится понятие коммутатора двух операторов:

$$[\hat{A},\hat{B}\,] = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}\,.$$

Оператор $\hat{A}^+$ называется *сопряженным* к оператору $\hat{A}$, если

$$(\psi_1,\ \hat{A}^+\psi_2) = (\hat{A}\,\psi_1,\psi_2), \quad \forall\ \psi_1,\psi_2 \in \mathbf{H}\,.$$

Это в обычных обозначениях, принятых математиками. Перейдем к обозначениям Дирака, где $\psi \equiv |\psi\rangle$:

$$(\psi_1,\ \hat{A}\,\psi_2) \equiv \langle\psi_1|\hat{A}\,\psi_2\rangle \equiv \langle\psi_1|\hat{A}\,|\psi_2\rangle$$

Операцию сопряжения можно ввести и для векторов: по определению

$$(|\psi\rangle)^+ = \langle\psi|,\ (\langle\psi_1|)^+ = |\psi\rangle,$$

а для чисел она понимается просто как комплексное сопряжение. Для скалярного произведения (числа) имеем, применяя правила сопряжения:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle^+ = \langle\psi_2|\psi_1\rangle,$$

а это, в силу свойства эрмитовости скалярного произведения, и есть число, комплексно сопряженное к $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$. Теперь в дираковских обозначениях определение эрмитова оператора можно записать так:

$$\langle\psi_1|\hat{A}^+|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\hat{A}\,|\psi_1\rangle^+.$$

Оператор $\hat{A}$ называется *самосопряженным* (или эрмитовым), если $\hat{A}^+ = \hat{A}$.
В более подробной форме записи это означает, что

$$\langle\psi_1|\hat{A}\,|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\hat{A}\,|\psi_1\rangle^+.$$

Постулат IV. Среднее значение динамической переменной A в нормированном состоянии ψ вычисляется так:

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi \equiv \overline{A} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle.$$

Среднее значение физической величины должно быть действительным. Но действительность $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ равнозначна эрмитовости $\hat{A}$, откуда и возникает это требование.

В квантовой механике (и в математике) важнейшую роль играет задача на собственные значения данного эрмитова оператора $\hat{A}$:

$$\hat{A}|\varphi_\lambda\rangle = A_\lambda|\varphi_\lambda\rangle,$$

где $|\varphi_\lambda\rangle$ - *собственные векторы*, A_λ - *собственные значения*. Если собственные значения различны ($A_\lambda \neq A_{\lambda,}$), то соответствующие им собственные векторы взаимно ортогональны:

$$A_{\lambda'} \neq A_{\lambda''} \;\;\Rightarrow\;\; \langle\varphi_{\lambda'}|\varphi_{\lambda''}\rangle = 0.$$

Если данному A_λ соответствует несколько линейно независимых собственных векторов, то оно называется *вырожденным* (в противном случае - простым). Максимальное число линейно независимых собственных векторов $|\varphi^\alpha{}_\lambda\rangle$ с заданным A_λ называется *кратностью вырождения* A_λ. Разные собственные векторы при фиксированном A_λ автоматически не являются взаимно ортогональными. Но их всегда можно ортогонализовать процедурой Шмидта, а кроме того, их можно и нормировать. Будем считать все эти операции проделанными и введем единый индекс $n \equiv \{\lambda,\alpha\}$.Тогда получим систему *ортонормированных* векторов:

$$\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle = \delta_{mn}; \; (|\varphi_n\rangle \equiv |\varphi^\alpha{}_\lambda\rangle, |\varphi_m\rangle \equiv |\varphi^\beta{}_\nu\rangle).$$

Здесь предполагается, что все собственные значения A_λ принадлежат *дискретному* (а не непрерывному) спектру оператора $\hat{A}$. Совокупность всех таких собственных значений образует *дискретный спектр*.

Построим всевозможные линейные комбинации вида

$$\sum_n c_n|\varphi_n\rangle.$$

Если всякий вектор из **H** может быть представлен в такой форме, то оператор $\hat{A}$ имеет *чисто дискретный* спектр. В противном случае расширим исходное пространство:

$$\mathbf{H} \rightarrow \tilde{H}, \mathbf{H} \Leftarrow \tilde{H}$$

и доопределим оператор $\hat{A}$, распространяя его на все $\tilde{H}$ и сохраняя свойство линейности. Теперь можно говорить об обобщенных собственных векторах $|\chi_A\rangle$ оператора $\hat{A}$, лежащих в $\tilde{H}$, но не принадлежащих **H**:

$$|\chi_A\rangle \in \tilde{H}. \; \hat{A}|\chi_A\rangle = A|\chi_A\rangle.$$

Они ортогональны обычным собственным векторам (из **H**) и взаимно ортогональны при разных собственных значениях A, но их норма равна уже бесконечности, и они нормируются на δ - функцию. Таким образом,

$$\langle\varphi_n|\chi_A\rangle = 0, \; \langle\chi_{A'}|\chi_{A''}\rangle = \delta(A' - A'').$$

Всякий вектор $|\psi\rangle \in \mathbf{H}$ может быть разложен по обычным собственным векторам $|\varphi_n\rangle$ (в сумму) и по обобщенным собственным векторам $|\chi_A\rangle$ (в интеграл):

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n\,|\varphi_n\rangle + \int dA\,c(A)|\chi_A\rangle.$$

Множество $\{A\}$ есть *непрерывный* спектр оператора $\hat{A}$, а объединение множеств $\{A_\lambda\}$ и $\{A\}$ есть его *полный* спектр.

<u>Постулат V</u>. Результатом измерения наблюдаемой *A* может быть только значение, принадлежащее спектру соответствующего ей оператора $\hat{A}$.

Введем важное понятие дисперсии наблюдаемой A в состоянии ψ*:*

$$D_\psi(A) \equiv \langle(\Delta A)^2\rangle \equiv \langle\psi|(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2|\psi\rangle.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$D_\psi(A) = \langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - 2\langle\hat{A}\rangle\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle + \langle\hat{A}\rangle^2\langle\psi|\psi\rangle = \langle\hat{A}^2\rangle - 2\langle\hat{A}\rangle^2 + \langle\hat{A}\rangle^2,$$

т.е.

$$D_\psi(A) = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2.$$

Если $|\psi\rangle$ - собственный вектор оператора $\hat{A}$ $(\hat{A}|\psi\rangle = A|\psi\rangle)$, то дисперсия величины A в состоянии ψ равна нулю:

$$\hat{A}|\psi\rangle = A|\psi\rangle \;\Rightarrow\; D_\psi(A) = 0.$$

Это сразу следует из последнего представления $D_\psi(A)$ как $\langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2$.

Таким образом, можно говорить, что наблюдаемая A в собственном состоянии ψ имеет *строго определенное значение* - равное собственному значению A.

Вычислим теперь среднее значение A в произвольном состоянии, для чего разложим его по собственным векторам оператора $\hat{A}$:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n\,|\varphi_n\rangle + \int dA\,c(A)\,|\chi_A\rangle,$$

$$\langle\psi| = \sum_m \overline{c_m}\,\langle\varphi_n| + \int dB\,\overline{c(B)}\,\langle\chi_B|;$$

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle =$$

$$= \sum_{mn} \overline{c_m}c_n\,\langle\varphi_m|\hat{A}|\varphi_n\rangle + \sum_m \int dA\,\overline{c_m}c(A)\,\langle\varphi_m\hat{A}|\chi_A\rangle +$$

$$+ \int dB \sum_n \overline{c(B)}c_n\,\langle\chi_B|\hat{A}|\varphi_n\rangle + \int dB \int dA\,\overline{c(B)}c(A)\,\langle\chi_B|\hat{A}|\chi_A\rangle =$$

$$= \sum_{mn} \overline{c_m}c_n A_n\delta_{mn} + 0 + 0 + \int dB \int dA\,\overline{c(B)}c(A)\,A\delta(B-A):$$

$$\langle\hat{A}\rangle = \sum_n |c_n|^2 A_n + \int dA\,|c(A)|^2 A.$$

Отсюда и из элементарной теории вероятностей сразу видно, что

$|c_n|^2$- вероятность в состоянии ψ получить значение A_n,

$|c(A)|^2$ - плотность вероятности в состоянии ψ получить значение A.

Пусть теперь $\hat{A}$ - эрмитов оператор, спектр которого дискретный и невырожденный. Тогда все собственные векторы

$$\hat{A}\,|\varphi_\lambda\rangle = A_\lambda|\varphi_\lambda\rangle$$

лежат в **H** и автоматически ортогональны:

$$\langle\varphi_{\lambda'}\,|\varphi_{\lambda''}\rangle = \delta_{\lambda'\lambda''}.$$

Таким образом, $\{|\varphi_\lambda\rangle\}$ есть ортонормированный базис в **H**. Разложим по нему произвольный вектор $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \sum_\lambda b_\lambda\,|\varphi_\lambda\rangle.$$

Для отыскания коэффициентов разложения умножим слева на $\langle\varphi_{\lambda'}|$:

$$\langle\varphi_{\lambda'}\,|\psi\rangle = \sum_\lambda b_\lambda\,\langle\varphi_{\lambda'}|\varphi_\lambda\rangle = \sum_\lambda b_\lambda\;\;\delta_{\lambda'\lambda} = b_{\lambda'},$$

откуда

$$b_\lambda = \langle\varphi_\lambda|\psi\rangle,$$

и

$$|\psi\rangle = \sum_\lambda b_\lambda\,|\varphi_\lambda\rangle = \sum_\lambda\;|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\psi\rangle.$$

При наличии вырождения векторы $|\varphi_\lambda\rangle$ не будут однозначно определяться своими собственными значениями A_λ. Необходимо вместе с A ввести еще одну величину B с оператором $\hat{B}$ - так, чтобы собственные векторы $|\varphi_l\rangle$ оператора $\hat{A}$ были бы собственными векторами и оператора $\hat{B}$. Для последнего они будут иметь свои собственные значения B_ν, и каждый вектор будет нумероваться двумя индексами - λ и ν:

$$\hat{A}\,|\varphi_{\lambda\nu}\rangle = A_\lambda|\varphi_{\lambda\nu}\rangle,\;\hat{B}\,|\varphi_{\lambda\nu}\rangle = B_\nu|\varphi_{\lambda\nu}\rangle.$$

Если теперь нет общего вырождения, т.е. паре чисел λ и ν, а фактически A_λ и B_ν, отвечает один вектор $|\varphi_{\lambda\nu}\rangle$, то процедура закончена. В противном случае нужно ввести еще одну величину C с оператором $\hat{C}$ - так, чтобы старые собственные векторы операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ были бы собственными векторами $\hat{C}$, и так далее.

Для того, чтобы оператор $\hat{B}$ обладал указанным свойством, необходимо, чтобы он коммутировал с оператором $\hat{A}$:

$$[\hat{A},\hat{B}] = 0.$$

Действительно, имеем:

$$[\hat{A},\hat{B}]|\psi\rangle = (\hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A})|\psi\rangle =$$

$$= (\hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}) \sum_{\lambda,\nu,\alpha\ldots} c^{\alpha\ldots}_{\lambda\nu}\, |\varphi^{\alpha\ldots}{}_{\lambda\nu}\rangle =$$

$$= \sum_{\lambda,\nu,\alpha\ldots} c^{\alpha\ldots}_{\lambda\nu}\, (\hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A})|\varphi^{\alpha\ldots}{}_{\lambda\,\nu}\rangle =$$

$$= \sum_{\lambda,\nu,\alpha\ldots} c^{\alpha\ldots}_{\lambda\nu}\, (\hat{A}\,B_\nu - \hat{B}\,A_\lambda)|\varphi_{\lambda\,\nu\ldots}^{\alpha}\rangle =$$

$$= \sum_{\lambda,\nu,\alpha\ldots} c^{\alpha\ldots}_{\lambda\nu}\, (A_\lambda B_\nu - B_\nu A_\lambda|\varphi^{\alpha}{}_{\lambda\nu\ldots}\rangle = 0,$$

откуда, в силу произвольности вектора $|\psi\rangle$, $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.
Имеет место следующее полезное свойство:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \;\Rightarrow\; (\hat{A}\,\hat{B})^{+} = \hat{A}\,\hat{B}.$$

Действительно,

$$(\hat{A}\,\hat{B})^{+} = \hat{B}^{+}\hat{A}^{+} = \hat{B}\,\hat{A} = \hat{A}\,\hat{B}.$$

<u>Определение.</u> Набор независимых наблюдаемых называется полным, если все их операторы коммутируют, и если он не может быть расширен.

Смысл названия выявляет описанная выше процедура. У операторов полного набора есть собственные векторы, общие для них, которые образуют базис в **H**, и совокупный спектр которых является невырожденным (простым). Это означает, что каждому множеству индексов $\lambda,\nu,\ldots$, т.е. каждой совокупности собственных значений A_λ, B_ν ,...отвечает только один вектор $|\varphi_{\lambda\nu\ldots}\rangle$.

Вернемся к оператору $\hat{A}$, спектр которого дискретный и простой. (В общем случае под $\hat{A}$ можно понимать весь полный набор, а под n - весь набор индексов, однозначно задающих общие собственные векторы). Поставим задачу на собственные значения

$$\hat{A}\,|\varphi_n\rangle = A_n|\varphi_n\rangle,$$

разложим произвольный вектор $|\psi\rangle$ по базису $\{|\varphi_n\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_n b_n\, |\varphi_n\rangle = \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle$$

и подействуем на $|\psi\rangle$ оператором $\hat{A}$:

$$\hat{A}\,|\psi\rangle = \sum_n \hat{A}\,|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle = \sum_n A_n|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle,$$

т.е.

$$\hat{A}\,|\psi\rangle = \sum_n A_n|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle.$$

По определению, функция $F(\hat{A})$ от оператора $\hat{A}$ определяется так:

$$F(\hat{A})|\psi\rangle \equiv \sum_n F(A_n)|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle,$$

откуда

$$F(\hat{A}) = \sum_n F(A_n)|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|.$$

Полагая $\hat{A} = \hat{I}$, где $\hat{I}$ - единичный оператор, получим формулу разложения единицы:

$$\hat{I} = \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|.$$

Обозначим каждое слагаемое:

$$P_n \equiv |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

и выясним его смысл, для чего подействуем на произвольный $|\psi\rangle \in \mathbf{H}$:

$$P_n|\psi\rangle = |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle,$$

но $\langle\varphi_n|\psi\rangle$ - есть коэффициент разложения $|\psi\rangle$ по $\{|\varphi_n\rangle\}$:

$$\langle\varphi_n|\psi\rangle = \mathrm{b}_n,$$

а потому

$$P_n|\psi\rangle = b_n|\varphi_n\rangle.$$

Таким образом, оператор P_n сопоставляет каждому вектору $|\psi\rangle$ его проекцию на базисный орт $|\varphi_n\rangle$, т.е. P_n есть оператор проектирования на $|\psi\rangle$, или просто *проектор*.

Обобщение на случай смешанного спектра очевидно:

$$F(\hat{A}) = \sum_n F(A_n)|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| + \int \mathrm{d}A F(A)|\chi_A\rangle\langle\chi_A|,$$

и формула разложения единицы принимает вид

$$\hat{I} = \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| + \int \mathrm{d}A|\chi_A\rangle\langle\chi_A|.$$

Прежде чем двигаться дальше, необходимо кратко резюмировать основные положения квантовой механики, которые были сформулированы выше.

РЕЗЮМЕ

Постулат 1. Состояния квантовомеханической системы описываются нормированными векторами $|\psi\rangle$ гильбертова пространства H:

$$|\psi\rangle \in \mathbf{H}: \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} \equiv \|\psi\| = 1.$$

Если вектор $|\psi\rangle$ не нормирован, то его можно сделать таким:

$$|\tilde{\psi}\rangle \to |\psi\rangle = \frac{|\tilde{\psi}\rangle}{\|\tilde{\psi}\|} = \frac{|\tilde{\psi}\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}}.$$

Принцип суперпозиции. Если система может находиться в состояниях ψ_1 и ψ_2, то она может находиться и в любом состоянии ψ с вектором

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle,\ \forall c_1, c_2 \in \mathbf{C}.$$

<u>Постулат II</u>. Если векторы $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$ нормированы, и система находится в состоянии ψ, то вероятность обнаружить ее в состоянии φ равна $|\langle\varphi|\psi\rangle|^2$.

<u>Постулат III</u>. Каждой динамической переменной (наблюдаемой) A соответствует некоторый эрмитов оператор $\hat{A} = \hat{A}^+$.

Важнейшую роль играет задача на собственные значения

$$\hat{A}|\varphi_A\rangle = A|\varphi_A\rangle.$$

Если $|\varphi_A\rangle \in \mathbf{H}$, то собственный вектор - обычный, если $|\varphi_A\rangle \notin \mathbf{H}$, то он обобщенный. Обычные собственные значения образуют дискретный спектр, обобщенные - непрерывный спектр, совокупность тех и других образует полный спектр оператора $\hat{A}$. Если данному собственному значению отвечает один (с точностью до множителя) собственный вектор, то оно невырожденное, или простое; в противном случае собственное значение вырожденное, или кратное.

Собственные значения эрмитова оператора вещественны. Собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны. Собственные векторы, отвечающие данному вырожденному собственному значению, автоматически не ортогональны, но если они линейно независимы, то их всегда можно сделать взаимно ортогональными. Таким образом,

$\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = \delta_{nm}$ для дискретного спектра,
$\langle\varphi_n|\chi_A\rangle = 0$,
$\langle\chi_A|\chi_{A'}\rangle = \delta(A-A')$для непрерывного спектра.

Совокупность всех собственных векторов $\{|\varphi_A\rangle\}$ эрмитова оператора $\hat{A}$ образует базис в $\mathbf{H}$, т.е. по ним можно разложить любой вектор $|\psi\rangle \in \mathbf{H}$:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle + \int dA C(A)|\chi_A\rangle.$$

<u>Постулат IV</u>. Среднее значение наблюдаемой A в состоянии ψ вычисляется как

$$\langle \mathbf{A}\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle.$$

<u>Постулат V</u>. Результатом измерения наблюдаемой A в любом состоянии может быть только одно из значений, принадлежащих спектру оператора $\hat{A}$.

Важную роль играет понятие дисперсии наблюдаемой A в состоянии ψ:

$$D_\psi(A) \equiv \langle(\Delta A)^2\rangle_\psi = \langle\psi|(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2|\psi\rangle = \langle\hat{A}^2\rangle_\psi - \langle\hat{A}\rangle^2_\psi.$$

Если $D_\psi(A) = 0$, то говорят, что в этом состоянии наблюдаемая имеет определенное значение. Физический смысл собственных векторов: они и только они описывают состояния с определенными значениями данной наблюдаемой.

Вероятность получить при измерении наблюдаемой A в состоянии ψ значение A_n или A из ее спектра равна

$|c_n|^2$ или $|c(A)|^2$,

где c_n и $c(A)$ - коэффициенты разложения $|\psi\rangle$ по $\{|\varphi_A\rangle\}$:

$$c_n = \langle\varphi_n|\psi\rangle, \quad c(A) = \langle\chi_A|\psi\rangle.$$

Уточнение: для точек непрерывного спектра $|c(A)|^2$ есть не вероятность, а плотность вероятности получения значения A. Величина же $|c(A)|^2 dA$ есть вероятность получить при измерении какое-то значение из малого интервала $(A, A+dA)$.

Набор независимых наблюдаемых называется полным, если все операторы этих наблюдаемых взаимно коммутируют, и если набор не может быть расширен. У операторов $\hat{A}_1,...,\hat{A}_N$ полного набора имеются общие собственные векторы:

$$\hat{A}_1\left|\varphi_{n_1...n_N}\right\rangle = \hat{A}_{n_1}\left|\varphi_{n_1...n_N}\right\rangle, ... \hat{A}_N\left|\varphi_{n_1...n_N}\right\rangle = \hat{A}_{n_N}\left|\varphi_{n_1...n_N}\right\rangle,$$

образующие базис в **H**. Совокупный спектр операторов полного наборяявляется простым: совокупности собственных значений $\hat{A}_{n_1},...,\hat{A}_{n_N}$ (индексов $n_1,...n_N$) отвечает только один общий собственный вектор.

Если $\hat{A}\left|\varphi_n\right\rangle = A_n\,|\varphi_n\rangle$ и $\hat{A}|\chi_A\rangle = A|\chi_A\rangle$, т.е. оператор $\hat{A}$ имеет смешанный спектр, то функция от этого оператора $F(\hat{A})$ определяется так:

$$F(\hat{A}) = \sum_n F(A_n)\,|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| + \int dA F(A)\,|\chi_A\rangle\langle\chi_A|.$$

При $\hat{A} = \hat{I}$ получаем разложение единицы:

$$\hat{I} = \sum_n \left|\varphi_n\right\rangle\left\langle\varphi_n\right| + \int dA\left|\chi_A\right\rangle\left\langle\chi_A\right|.$$

Операторы $P_n = |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$, $P_A = |\chi_A\rangle\langle\chi_A|$ суть проекторы на базисные орты$|\varphi_n\rangle$, $|\chi_A\rangle$.