Л Е К Ц И Я   4

А–ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

На прошлой лекции мы построили некую конкретную схему квантовой механики, взяв в качестве основного *оператор координаты* $\hat{X}$. Делалось это так. Ставим задачу на собственные значения оператора $\hat{X}$:

$$\hat{X}\,|\chi_x\rangle = x|\chi_x\rangle$$

и получаем ортонормированный базис из его собственных векторов $|\chi_x\rangle$:

$$\langle\chi_x|\chi_{x'}\rangle = \delta\,(x\text{-}x'), \quad \int dx\,|\chi_{x'}\rangle\langle\chi_x| = \hat{I}\,.$$

Разлагаем по этому базису произвольный вектор:

$$|\psi\rangle \equiv \hat{I}\,|\psi\rangle = \int dx|\chi_{x'}\,\rangle\langle\chi_x|\psi\rangle$$

и характеризуем состояние ψ не вектором $|\psi\rangle$, а *волновой функцией*

$$\psi(x) \equiv \langle\chi_x|\psi\rangle.$$

Но можно взять не $\hat{X}$, а произвольный оператор $\hat{A}$:

$$\hat{A}\;|\varphi_{An}\rangle = A_n|\varphi_{An}\rangle$$

причем для определенности считаем спектр чисто дискретным:

$$\langle\varphi_{An}/\varphi_{Am}\rangle = \delta_{nm}, \quad \sum_n\;|\varphi_{An}\rangle\langle\varphi_{An}| = \hat{I}\,.$$

Разлагаем произвольный вектор:

$$|\psi\rangle \equiv \hat{I}\,|\psi\rangle = \sum_n\;|\varphi_{An}\rangle\langle\varphi_{An}|\psi\rangle$$

и характеризуем состояние набором чисел (последовательностью)

$$\psi(A_n) \equiv \langle\varphi_{An}|\psi\rangle,$$

которая имеет смысл волновой функции состояния ψ в A*- представлении*.

Замечание. Здесь предполагается, что спектр оператора $\hat{A}$ - невырожденный. Если есть вырождение, то нужен еще один индекс, связанный с необходимостью введения по крайней мере еще одного оператора $\hat{B}$, коммутирующего с $\hat{A}$. Тогда строим базис из общих собственных векторов операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ (см. лекцию 2):

$$\hat{A}\,|\varphi_{AnBm}\rangle = A_n|\varphi_{AnBm}\rangle, \quad \hat{B}\,|\varphi_{AnBm}\rangle = B_m|\varphi_{AnBm}\rangle;$$

$$\psi(A_n,B_m) \equiv \langle\,\varphi_{AnBm}|\psi\rangle.$$

Таким образом, в квантовой механике *число степеней свободы* можно ввести по определению как число независимых взаимно коммутирующих операторов (число операторов полного набора).

Итак, рассматриваем A-представление, в котором состояние ψ характеризуется последовательностью (« волновой функцией»)

$$\psi(A_n) = \langle \varphi_{An} | \psi \rangle.$$

Пусть имеется произвольный оператор $\hat{F}$, переводящий $|\psi\rangle$ в $|\tilde{\psi}\rangle$:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{F} |\tilde{\psi}\rangle \Leftrightarrow |\tilde{\psi}\rangle = \hat{F}\,|\psi\rangle.$$

Состояние $\tilde{\psi}$ характеризуется последовательностью

$$\tilde{\psi}(A_n) = \langle \varphi_{An} | \tilde{\psi} \rangle.$$

Ясно, что отображение $|\psi\rangle \xrightarrow{F} |\tilde{\psi}\rangle$ индуцирует отображение

$$\psi(A_n) \xrightarrow{F} \tilde{\psi}(A_n), \text{ или } \tilde{\psi}(A_n) = \hat{F}\,\psi(A_n),$$

где $\hat{F}$ есть оператор наблюдаемой F в A–представлении. Его легко можно найти в явном виде, для чего умножим равенство $|\tilde{\psi}\rangle = \hat{F}\,|\psi\rangle$ слева на $\langle \varphi_{An}|$ и воспользуемся разложением единицы :

$$\langle \varphi_{An} | \tilde{\psi} \rangle = \langle \varphi_{An} | \hat{F}\,|\psi\rangle \equiv \langle \varphi_{An} | \hat{F}\hat{I}\,|\psi\rangle =$$

$$= \sum_m \langle \varphi_{An} | \hat{F}\,|\,\varphi_{Am} \rangle \langle \varphi_{Am} | \psi \rangle,$$

Вводя обозначение

$$\langle \varphi_{An} | \hat{F}\,|\,\varphi_{Am} \rangle \equiv F_{nm}$$

и вводя волновые функции состояний ψ и $\tilde{\psi}$, получим

$$\tilde{\psi}(A_n) = \sum_m F_{nm}\psi(A_n).$$

Таким образом, в A-представлении наблюдаемая F представляется *матрицей* F_{nm} оператора $\hat{F}$.

Построим теперь другое - $\hat{B}$-представление:

$$\hat{B}\,|\varphi'_{Bn}\rangle = B_n|\,\varphi'_{Bn}\rangle\,;\ \langle \varphi'_{Bn}|\,\varphi'_{Bm}\rangle = \delta_{nm},$$

где волновые функции записываются как

$$\psi'(B_n) = \langle \varphi'_{Bn} | \psi \rangle\,,\ \tilde{\psi}'(B_n) = \langle \varphi'_{Bn} | \psi \rangle,$$

и

$$\tilde{\psi}'(B_n) = \hat{F}'\,\psi'(B_n), \text{ или } \tilde{\psi}'(B_n) = \sum_m F'_{nm}\psi'(B_m)\,,\ F'_{nm} \equiv \langle \varphi'_{Bn} | \hat{F}\,|\varphi'_{Bn}\rangle.$$

Оператор $\hat{F}'$ (матрица F'_{nm}) есть оператор (матрица) наблюдаемой F в B-представлении.

Свяжем величины в A- и B- представлениях. Для волновой функции, пользуясь разложением единицы, имеем

$$\psi'(B_n) \equiv \langle \varphi'_{Bn} | \psi \rangle = \sum_m \langle \varphi'_{Bn} | \varphi_{Am} \rangle \langle \varphi_{Am} | \psi \rangle = \sum_m \langle \varphi'_{Bn} | \varphi_{Am} \rangle \psi_{Am},$$

что можно записать как

$$\psi'(B) = \hat{U}(B,A)\psi(A), \qquad (\bullet)$$

где $\hat{U}(B,A)$ - некоторый оператор. Установим его основное свойство, для чего преобразуем выражение для скалярного квадрата вектора $|\psi\rangle$:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_n \psi^*_{A_n}(A_n)\psi(A_n) \equiv (\psi(A),\psi(A)) =$$
$$= \sum_n \psi'^*(\mathrm{B_n})\, \psi'(B_n) \equiv (\psi'(B), \psi'(B)) =$$
$$= (\hat{U}\psi(A), \hat{U}\psi(A)) = (\psi(A), \hat{U}^+\hat{U}\psi(A)).$$

Таким образом,

$$(\psi(A),\psi(A)) \equiv (\psi(A), \quad \hat{I}\psi(A)) = (\psi(A), \hat{U}^+\hat{U}\psi(A)),$$

откуда, в силу произвольности $\psi(A)$,

$$\hat{U}^+\hat{U} = \hat{I}\,.$$

Видим, что оператор $\hat{U}$ является *унитарным*.

<u>Замечание</u>. Строго говоря, унитарным называется оператор, для которого

$$\hat{U}^+\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^+ = \hat{I}\,,$$

что получается из $\hat{U}^+ = \hat{I}$, если у $\hat{U}$ есть обратный оператор. Но нам достаточно свойства $\hat{U}^+\hat{U} = \hat{I}$.

В математике такие операторы называются изометрическими.

Посмотрим теперь на связь операторов $\hat{F}$ и $\hat{F}'$ в A- и B-представлениях. Они вводятся как (см. выше)

$$\tilde{\psi}(\mathrm{A}) = \hat{F}\psi(A) \text{ и } \tilde{\psi}'(B) = \hat{F}'\psi'(B).$$

Заменяем во втором равенстве ψ' на $\hat{U}\psi$:

$$\hat{U}\tilde{\psi}(A) = \hat{F}'\hat{U}\psi(A).$$

Умножаем слева на $\hat{U}^+$ и используем унитарность:

$$\tilde{\psi}(A) = \hat{U}^+\hat{F}'\hat{U}\psi(A).$$

Сравнение с определением $\hat{F}$ дает

$$\hat{F} = \hat{U}^+\hat{F}'\hat{U} \Leftrightarrow \hat{F}' = \hat{U}\hat{F}\hat{U}^+. \qquad (\bullet\bullet).$$

Таким образом, переход от величин в A-представлении к величинам в B-представлении осуществляется с помощью формул *(•) и (••)* ,т.е. с помощью *унитарного унитарного преобразования*. Говорят также, что A- и B-представления *унитарно* *эквивалентны*. Покажем, что представления не только формальны, но и *физически эквивалентны*.

При унитарном преобразовании:

1. структура суперпозиционного состояния сохраняется:
$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \quad \mapsto \quad \psi' = c_1\,\psi'_1 + c_2\,\psi'_2;$$

2. скалярные произведения, а значит нормировки и вероятности переходов сохраняются:
$$(\psi', \varphi') = (\hat{U}\,\psi, \hat{U}\,\varphi) = (\psi, \hat{U}^+\hat{U}\,\varphi) = (\psi, \hat{I}\,\varphi) = (\psi,\varphi);$$

3. линейные операторы переходят в линейные;

4. сумма операторов переходит в сумму:
$$\hat{F}_1' + \hat{F}_2' = \hat{U}\,\hat{F}_1\hat{U}^+ + \hat{U}\,\hat{F}_2\,\hat{U}^+ = \hat{U}\,(\hat{F}_1 + \hat{F}_2)\hat{U}^+;$$

5. структура произведения оператора на число сохраняется:
$$\hat{F}' = \alpha\hat{U}\,\hat{F}\,\hat{U}^+ = \hat{U}\,(\alpha\hat{F})\hat{U}^+;$$

6. произведение операторов сохраняется:
$$\hat{F}_1'\,\hat{F}_2' = (\hat{U}\,\hat{F}_1\hat{U}^+)(\hat{U}\,\hat{F}_2\,\hat{U}^+) = \hat{U}\,(\hat{F}_1\,\hat{F}_2)\hat{U}^+,$$

7. коммутатор операторов сохраняет структуру:
$$\left[\hat{F}_1,\hat{F}_2\right] = \hat{F} \;\Rightarrow\; \left[\hat{F}_1',\hat{F}_2'\right] = \hat{F}',$$
что следует из свойств 4 и 5;

8. средние значения наблюдаемых сохраняются:
$$(\psi', \hat{F}'\,\psi') = (\hat{U}\,\psi, \hat{U}\,\hat{F}\,\hat{U}^+\hat{U}\,\psi) = (\psi, \hat{U}^+\hat{U}\,\hat{F}\,\psi) = (\psi, \hat{F}\,\psi);$$

9. спектральные свойства операторов сохраняются:
$$\hat{F}\,\psi_n = F_n\psi_n:\ \hat{F}'\,\psi'_n = \hat{U}\,\hat{F}\,\hat{U}^+\hat{U}\,\psi_n = \hat{U}\,\hat{F}\,\psi_n = \hat{U}\,F_n\psi_n = F_n\hat{U}\,\psi_n = F_n\,\psi'_n$$

Итак, разные квантовомеханические представления (A и B) эквивалентны не только математически, но и физически. Они дают два разных способа описания одной и той же физической схемы. Разные представления - разные реализации одного и того же гильбертова пространства и одной и той же алгебры операторов, действующих в нем. Аналогия - описание 3-мерного пространства в разных декартовых базисах. Поэтому A-представление иногда называется (и это лучше) *A-базисом*.

То, что мы рассматривали на прошлой лекции в качестве примера, есть, таким образом, координатное представление. Для одной частицы в трехмерном пространстве вектор состояния ψ записывается как
$$|\psi\rangle = \int d\mathbf{r}|\,\chi_\mathbf{r}\,\rangle\langle\,\chi_\mathbf{r}|\psi\rangle \equiv \int d\mathbf{r}\psi(\mathbf{r})|\chi_\mathbf{r}\rangle,$$
и
$$\psi(\mathbf{r}) \equiv \langle\chi_\mathbf{r}|\psi\rangle$$

есть ее волновая функция (это напоминание). Подействуем на абстрактный вектор $|\psi\rangle$ оператором $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$, разложим его по координатному базису и воспользуемся уже известным нам уравнением Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \int d\mathbf{r}\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t)\,|\chi_{\mathbf{r}}\rangle = \int d\mathbf{r}\,\hat{H}\,\psi(\mathbf{r},t)\,|\chi_{\mathbf{r}}\rangle \equiv \hat{H}\,|\psi\rangle.$$

Получим уравнение Шредингера в абстрактной картине

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle,$$

где $\hat{H}$ - оператор Гамильтона в этой картине.

Продолжим рассмотрение координатного представления. Как мы видели в начале лекции 3, оператор координаты в своем «родном» представлении есть оператор умножения:

$$\hat{\mathbf{R}}\,\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\psi(\mathbf{r}).$$

Найдем его собственные функции $\chi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{r})$:

$$\hat{\mathbf{R}}\,\chi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\,\chi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{r}) \xrightarrow{C.\Phi} \boldsymbol{\rho}\chi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{r}) \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\,\chi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{r}) = 0,$$

откуда видно, что $\chi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{r})$ равна нулю при $\mathbf{r}\neq\boldsymbol{\rho}$. Поэтому $\chi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{r})$ должна быть некой линейной комбинацией δ-функции и ее производных. Учитывая, что

$$x\,\delta(x) = 0,\; x\,\delta(x) = -\,\delta(x),...$$

заключаем:

$$\chi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{r}) = A\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}).$$

Константа A находится из условия нормировки:

$$\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') = (\chi_{\boldsymbol{\rho}}, \chi_{\boldsymbol{\rho}'}) = |A^2|\int\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\,\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}')d\mathbf{r} = |A^2|(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') \Rightarrow |A^2|=1 \Rightarrow A=1.$$

Таким образом, окончательно

$$\chi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}).$$

Ниже этот результат будет получен другим способом.

Найдем теперь собственные функции оператора импульса

$$\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

(см. лекция 3) в координатном представлении:

$$\hat{\mathbf{P}}\,\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}\,\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \Rightarrow -i\hbar\nabla\,\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \Rightarrow \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = A\,e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}.$$

Константа A определяется из условия нормировки:

$$\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = (\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \phi_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r})) = \int\phi^*_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\,\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = |A|^2\int e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}'\mathbf{r}}\,d\mathbf{r} =$$

$$= |A|^2\int e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{r}}\,d\mathbf{r} = |A|^2\hbar^3\int e^{\frac{i}{\hbar}(p'_x-p_x)x}\,e^{\frac{i}{\hbar}(p'_y-p_y)y}\,e^{\frac{i}{\hbar}(p'_z-p_z)}\,d\frac{x}{\hbar}\,d\frac{y}{\hbar}\,d\frac{z}{\hbar} =$$

$$= |A|^2(2\pi\hbar)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \Rightarrow A = 1/(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, нормированные собственные функции оператора импульса имеют в координатном представлении следующий вид:

$$(\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = 1/(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}.$$

Перейдем теперь от координатного представления к импульсному, в котором волновая функция определяется как

$$\psi'(\mathbf{p}) = \langle\phi_{\mathbf{p}}|\psi\rangle.$$

Для нее, используя разложение единицы в x -представлении, имеем:

$$\psi'(\mathbf{p}) \equiv \langle\phi_{\mathbf{p}}|\psi\rangle = \int d\mathbf{r}\langle\phi_{\mathbf{p}}|\chi_{\mathbf{r}}\rangle\langle\chi_{\mathbf{r}}|\psi\rangle = \int d\mathbf{r}\langle\chi_{\mathbf{r}}|\phi_{\mathbf{p}}\rangle^{*}\langle\chi_{\mathbf{r}}|\psi\rangle =$$

$$= \int d\mathbf{r}\phi^{*}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \equiv (\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r})) = \int d\mathbf{r} 1/(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}} \psi(\mathbf{r}).$$

Таким образом, волновые функции в импульсном и координатном представлениях связаны интегральным преобразованием Фурье (с точностью до $\hbar$) :

$$\psi'(\mathbf{p}) = 1/(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

и
$$\psi(\mathbf{r}) = 1/(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}\int e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\psi'(\mathbf{p})d\mathbf{p}.$$

(Не путать штрих с символом дифференцирования функции!).

Оператор импульса в координатном и импульсным представлениях действует на «родные» волновые функции и имеет явно разный вид:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{P}}^{(r)}\psi(\mathbf{r}),\ \varphi'(\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{P}}^{(p)}\psi'(\mathbf{p}).$$

Чтобы связать $\hat{\mathbf{P}}^{(p)}$ с $\hat{\mathbf{P}}^{(r)}$=$-i\hbar\nabla$ и тем самым найти вид $\hat{\mathbf{P}}^{(p)}$, умножим первое уравнение скалярно на $\phi_{p}(\mathbf{r})$:

$$(\phi_{p}(\mathbf{r}),\varphi(\mathbf{r})) \equiv \varphi'(\mathbf{p}) = (\phi_{p}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{P}}\psi(\mathbf{r})),$$

откуда

$$\hat{\mathbf{P}}^{(p)}\psi'(\mathbf{p}) = (\phi_{p}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{P}}\psi(\mathbf{r})) = -i\hbar/(2\pi\hbar)^{3}\int e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\nabla\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r} =$$

$$= -i\hbar/(2\pi\hbar)^{3}\int\nabla\{e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\psi(\mathbf{r})\}d\mathbf{r} + i\hbar/(2\pi\hbar)^{3}\int\nabla\{e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\}\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r} =$$

$$= -i\hbar/(2\pi\hbar)^{3}\oint_{\Sigma_\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\psi(\mathbf{r})d\mathbf{S} + i\hbar/(2\pi\hbar)^{3}(-i\mathbf{p}/\hbar\, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r} =$$

$$= 0 + 1/(2\pi\hbar)^{3}\mathbf{p}\int e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \mathbf{p}\psi'(\mathbf{p}).$$

Таким образом,

$$\hat{\mathbf{P}}^{(p)}\psi'(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\,\psi'(\mathbf{p}) \Leftrightarrow \hat{\mathbf{P}}^{(p)} = \mathbf{p},$$

т.е. действие оператора импульса на волновую функцию сводится к умножению на независимую переменную. Легко показать, что это же справедливо и для любого оператора в его «родном» представлении (для координаты уже убедились).

Действуя аналогично, найдем оператор координаты в импульсном представлении:

$$\hat{\mathbf{R}}^{(p)}\psi'(\mathbf{p}) = (\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{R}}^{(r)}\psi(\mathbf{r})) = 1/(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}\int e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\mathbf{r}\,\psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \equiv$$

$$\equiv 1/(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}\ i\hbar\nabla_{\mathbf{p}}\int e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r} = i\hbar\nabla_{\mathbf{p}}\psi'(\mathbf{p}).$$

Итак,

$$\hat{\mathbf{R}}^{(p)}\ \psi'(\mathbf{p}) = i\hbar\nabla_{\mathbf{p}}\psi'(\mathbf{p}) \ \Leftrightarrow\ \hat{\mathbf{R}}^{(p)} = i\hbar\nabla_{\mathbf{p}}.$$

Видим, что координатное и импульсное представления связаны принципом взаимности. Волновые функции в них получаются друг из друга прямым или обратным преобразованием Фурье. Операторы координаты и импульса в «родных» представлениях - операторы умножения на независимые переменные. Операторы координаты и импульса в «чужих» представлениях - операторы дифференцирования (с точностью до множителя $\pm i\hbar$). Обращаем внимание на разные знаки у операторов $\hat{\mathbf{P}}^{(r)}$ и $\hat{\mathbf{R}}^{(p)}$.

Уравнение на собственные значения оператора $\hat{\mathbf{R}}^{(p)}$ в импульсном представлении лишь знаком отличается от уравнения для оператора $\hat{\mathbf{P}}^{(r)}$ в координатном представлении:

$$\hat{\mathbf{R}}^{(p)}\chi'_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = \mathbf{r}\chi'_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) \rightarrow +i\hbar\nabla_{\mathbf{p}}\,\chi'_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = \mathbf{r}\chi'_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}).$$

Поэтому сразу можно выписать его собственные функции:

$$\chi'_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = 1/(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}.$$

Найдем собственные функции оператора $\hat{\mathbf{P}}^{(p)}$ в импульсном представлении:

$$\hat{\mathbf{P}}^{(p)}\phi'_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\phi'_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}).$$

Для левой части имеем:

$$\hat{\mathbf{P}}^{(p)}\ \phi'_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = (\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{P}}^{(r)}\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})) = 1/(2\pi\hbar)^3\int d\mathbf{r}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}(-i\nabla_{\mathbf{r}})\, e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{qr}} =$$

$$= \mathbf{q}/(2\pi\hbar)^3\int d\mathbf{r}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\mathbf{r}} = \mathbf{q}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}).$$

Сравнивая с верхним уравнением, получаем:

$$\phi'_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}).$$

Аналогично, путем перехода к импульсному представлению, можно решить и уравнение на собственные значения оператора $\hat{\mathbf{R}}^{(r)}$ в координатном представлении:

$$\hat{\mathbf{R}}^{(r)}\ \chi_{\rho}(\mathbf{r}) = \rho\chi_{\rho}(\mathbf{r}) \ \Leftrightarrow\ \mathbf{r}\,\chi_{\rho}(\mathbf{r}) = \rho\chi_{\rho}(\mathbf{r}).$$

В итоге получим уже известный нам результат:

$$\chi_{\rho}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}-\rho).$$

Он очень естественен. По своему физическому смыслу собственная функция оператора координаты описывает состояние с определенным значением координаты. Это значит, что квадрат ее модуля (плотность вероятности) должен быть отличен от нуля лишь в одной точке. Но для дельта-функции так оно и есть . То же относится и к интерпретации собственных функций оператора $\hat{\mathbf{P}}^{(p)}$ в импульсном представлении, где волновая функция (точнее, квадрат ее модуля) задает распределение значений импульса в данном состоянии.