2. Операторы. Множество наблюдаемых

Вопрос 1. Что такое оператор? Линейный оператор?
Вопрос 2. Какие из операторов являются линейными?

А). Единичный $\hat{I}$; Б). Нулевой $\hat{0}$; В). Оператор $\hat{X} = x$;

Г). Оператор дифференцирования $\hat{D} = \frac{d}{dx}$;

Д). Оператор комплексного сопряжения $\hat{K}: \quad \hat{K}\psi = \psi^*$;

Е). Оператор возведения в квадрат $\hat{S}: \quad \hat{S}\psi = \psi^2$;

Ж). Оператор инверсии $\hat{J}: \quad \hat{J}\psi(\bar{r}) = \psi(-\bar{r})$;

З). Оператор сдвига $\hat{T}_a: \quad \hat{T}_a\psi(x) = \psi(x-a)$;

И). Оператор растяжения $\hat{M}_\lambda: \quad \hat{M}_\lambda\psi(x) = \sqrt{\lambda}\psi(\lambda x)$;

К). Оператор взятия логарифма $\hat{L}: \quad \hat{L}\psi(x) = \ln\{\psi(x)\}$.

Является ли последний " оператор" действительно оператором?

Ответ: все, кроме (Д), (Е), (К); последний вообще не оператор, так как взятие логарифма в комплексной области – не однозначная операция:

$$\ln\psi = \ln|\psi| + i\pi\arg\psi + i2\pi n$$

Вопрос 3. Что такое сумма операторов, произведение оператора на число, произведение двух операторов?
Задача 1. Проверить операторные равенства:

А). $$\frac{d}{dx}x = \hat{I} + x\frac{d}{dx} \quad ;$$

Б). $$x^2\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = x\frac{d}{dx} - \hat{I} \quad ;$$

В). $$\left(\hat{I} + \frac{d}{dx}\right)^2 = \hat{I} + 2\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} \quad ;$$

Г). $$\left(x + \frac{d}{dx}\right)^2 = \hat{I} + x^2 + 2x\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} \quad ;$$

Д). $$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx} \quad ;$$

Е). $$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \nabla_2^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \quad ;$$

Ж). $$\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 = x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2} \quad .$$

Задача 2. Чему равны квадраты операторов?

А) $\hat{J}: \quad \hat{J}\psi(\bar{r}) = \psi(-\bar{r})$

Б) $\hat{T}_a: \quad \hat{T}_a\psi(x) = \psi(x+a)$

Ответ: А) $\hat{J}^2 = \hat{I}$ Б) $\hat{T}_a{}^2 = \hat{T}_{2a}$

Задача 3. Найти явный вид операторов:

А). $\hat{F} = e^{-a\frac{d}{dx}}$; Б) $\hat{F} = e^{i\pi\hat{J}}$.

Решение.

Функция от оператора понимается в смысле разложения Тейлора.

А). $$\hat{F}\psi(x) = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}a^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n\right\}\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n(-1)^n}{n!}\frac{d^n\psi(x)}{dx^n} = \psi(x-a)\ ;$$

таким образом, $$e^{-a\frac{d}{dx}}\psi(x) = \psi(x-a) \equiv \hat{T}_a\psi(x)\ ,$$

т.е. данный оператор есть оператор сдвига. Если вспомнить, что порождается сдвигом в классической механике, то где-то здесь должно ощущаться присутствие оператора импульса.

Б). Оператор $\hat{J}$ - оператор инверсии, для которого $\hat{J}^2 = \hat{I}$.
Тогда имеем:

$$\hat{F} = e^{i\pi\hat{J}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\pi\hat{J})^n = \sum_{n=2k}\frac{1}{n!}(-1)^n\pi^n\hat{I} +$$

$$+\sum_{n=2k-1}\frac{1}{n!}(-1)^n i\pi^n\hat{J} = \hat{I}\cos\pi + i\hat{J}\sin\pi = -\hat{I};\quad \boxed{e^{i\pi\hat{J}} = -\hat{I}}$$

Таким образом, оператор $\hat{F}$ в данном случае – оператор изменения знака волновой функции.

Вопрос 4. Что такое коммутатор двух операторов?

Вопрос 5. Чему равны коммутаторы:

А). $\left[\hat{F}, \hat{F}_1 + \hat{F}_2\right] = \ ?$ Б). $\left[\hat{F}, \hat{G}\hat{H}\right] = \ ?$

Ответ: А). Тривиально: $\left[\hat{F}, \hat{F}_1 + \hat{F}_2\right] = \left[\hat{F}, \hat{F}_1\right] + \left[\hat{F}, \hat{F}_2\right]$;

Б). $$\left[\hat{F}, \hat{G}\hat{H}\right] = \hat{F}\hat{G}\hat{H} - \hat{G}\hat{H}\hat{F} \equiv \hat{F}\hat{G}\hat{H} - \hat{G}\hat{F}\hat{H} + \hat{G}\hat{F}\hat{H} - \hat{G}\hat{H}\hat{F} =$$

$$= \left[\hat{F}, \hat{G}\right]\hat{H} + \hat{G}\left[\hat{F}, \hat{H}\right]\ ,$$

т.е. имеем аналог правила Лейбница дифференцирования произведения, но обязательно нужно следить за порядком сомножителей.

<u>Задача 4.</u> Пусть $\left[\hat{F},\hat{G}\right]=\hat{I}$. Доказать:

А). $\left[\hat{F},\hat{G}^2\right]=2\hat{G}$;

Б) . $\left[\hat{F}^2,\hat{G}^2\right]=2\left\{\hat{F},\hat{G}\right\}$;

В) . $\left[\hat{F},\hat{G}^n\right]=n\cdot\hat{G}^{n-1}$.

Решение

А). $$\left[\hat{F},\hat{G}^2\right]=\hat{F}\hat{G}^2-\hat{G}^2\hat{F}\equiv\left(\hat{F}\hat{G}^2-\hat{G}\hat{F}\hat{G}\right)+\left(\hat{G}\hat{F}\hat{G}-\hat{G}^2\hat{F}\right)=$$
$$=\left[\hat{F},\hat{G}\right]\hat{G}+\hat{G}\left[\hat{F},\hat{G}\right]=\hat{I}\hat{G}+\hat{G}\hat{I}=2\hat{G}\ ;$$

Б). $$\left[\hat{F}^2,\hat{G}^2\right]=\hat{F}^2\hat{G}^2-\hat{G}^2\hat{F}^2\equiv\hat{F}^2\hat{G}^2-\hat{F}\hat{G}^2\hat{F}+\hat{F}\hat{G}^2\hat{F}-\hat{G}^2\hat{F}^2=$$
$$=\hat{F}\left[\hat{F},\hat{G}^2\right]+\left[\hat{F},\hat{G}^2\right]\hat{F}=\hat{F}\cdot2\hat{G}+2\hat{G}\cdot\hat{F}=$$
$$=2\left(\hat{F}\hat{G}+\hat{G}\hat{F}\right)\equiv2\left\{\hat{F},\hat{G}\right\}\ .$$

В). по индукции из А).

<u>Задача 5.</u> Чему равен коммутатор $\left[\hat{D},\hat{X}\right]$, где $\hat{X}=x$, а $\hat{D}=\dfrac{d}{dx}$?

Ответ: $\hat{I}$

<u>Задача 6.</u> Вычислить коммутатор $\left[\hat{D},\sigma\left(\hat{X}\right)\right]$:

А) непосредственно, Б). С помощью задачи 3В.

Решение.

А). Стандартно, действуя на волновую функцию.

Б) $$\left[\hat{D},\sigma\left(\hat{X}\right)\right]=\left[\hat{D},\sum_n\frac{\hat{X}^n}{n!}\frac{d\sigma^n}{dx^n}\bigg|_{x=0}\right]=\sum_n\left[\hat{D},\hat{X}^n\right]\cdot\frac{1}{n!}\frac{d\sigma^n}{dx^n}\bigg|_{x=0}=$$
$$=\sum_n\hat{X}^{n-1}\frac{n}{n!}\frac{d\sigma^n}{dx^n}\bigg|_{x=0}=\frac{d}{dx}\sum_n\frac{\hat{X}^n}{n!}\frac{d\sigma^n}{dx^n}\bigg|_{x=0}=\frac{d\sigma\left(\hat{X}\right)}{d\hat{X}}\ .$$

$$\boxed{\left[\hat{D},\sigma\left(\hat{X}\right)\right]=\frac{d\sigma\left(\hat{X}\right)}{d\hat{X}}}$$

Вопрос 7. Что такое сопряженный оператор?

$$\left(\varphi,\hat{F}\psi\right)=\left(\hat{F}^{+}\varphi,\psi\right) .$$

Вопрос 8. Каковы правила сопряжения операторов?

$$\left(\hat{F}_1+\hat{F}_2\right)^{+}=\hat{F}_1^{+}+\hat{F}_2{}^{+};\ \left(\alpha\hat{F}\right)^{+}=\alpha^{*}\hat{F}^{+};\ \left(\hat{F}_1,\hat{F}_2\right)^{+}=\hat{F}_1^{+}\cdot\hat{F}_2{}^{+};\ \left(\hat{F}^{+}\right)^{+}=\hat{F}$$

Задача 7. Найти операторы, сопряженные к

А). $\hat{F}=\alpha\hat{I}$ Б). $\hat{F}=ix$ В). $\hat{Q}=i\dfrac{d}{dx}$

Ответ.

А) $\hat{F}^{+}=\alpha^{*}\hat{I}$ Б) $\hat{F}^{+}=-ix$ В) $\hat{Q}^{+}=+i\dfrac{d}{dx}$

Вопрос 9. Что такое эрмитов оператор? $\left(\varphi,\hat{F}\psi\right)=\left(\hat{F}\varphi,\psi\right)\Leftrightarrow\hat{F}^{+}=\hat{F}$.

Вопрос 10. Какие из операторов эрмитовы:

А). $\hat{F}=\hat{I}$ Б). $\hat{F}=\alpha\hat{I}$ В). $\hat{X}=x$

Г). $\hat{F}=ix$ Д) $\hat{D}=\dfrac{d}{dx}$ Е). $\hat{Q}=i\dfrac{d}{dx}$.

Ответ. А), Б) при вещественных α , В), Е).

Задача 8. Доказать эрмитовость оператора $\hat{F}=\hat{D}^2=\dfrac{d^2}{dx^2}$ разными способами:

Решение

А). $\hat{F}^{+}=\left(\hat{D}^2\right)^{+}=\hat{D}^{+}\hat{D}^{+}=\left(-\dfrac{d}{dx}\right)\left(-\dfrac{d}{dx}\right)=\dfrac{d}{dx}\dfrac{d}{dx}=\hat{D}^2=\hat{F}$;

Б). $\hat{D}^2\equiv-\left(i\hat{D}\right)^2=-\hat{Q}^2$, где $\hat{Q}$ – эрмитов, а квадрат эрмитова оператора эрмитов;

В). Докажем непосредственно:

$$(\varphi,\hat{D}^2\psi)=\int\varphi^{*}\frac{d^2\psi}{dx^2}dx=\overbrace{\cancel{\varphi^{*}\psi'\Big|_{-\infty}^{\infty}}}^{=0}-\int\left(\varphi^{*}\right)'\psi'dx=$$

$$=-\overbrace{\cancel{\left(\varphi^{*}\right)'\psi\Big|_{-\infty}^{+\infty}}}^{=0}+\int\left(\varphi^{*}\right)''\psi dx=\int\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)^{*}\psi dx=(\hat{D}^2\varphi,\psi) .$$

Задача 9. Пусть $\hat{F}$ - произвольный оператор. Доказать эрмитовость операторов:

А). $\hat{F}^{+}\hat{F}$ Б). $\hat{F}^{+}+\hat{F}$ В) $i\left(\hat{F}-\hat{F}\right)^{+}$.

Указание: воспользоваться правилами сопряжения.

Задача 10. Пусть $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$ - эрмитовы операторы. Доказать эрмитовость операторов:

А). $\hat{F}=i\left(\hat{F}_1\hat{F}_2-\hat{F}_2\hat{F}_1\right)$ Б). $\hat{G}=\hat{F}_1\hat{F}_2+\hat{F}_2\hat{F}_1$.

Чему они равны при $\hat{F}_1 = \hat{x}$, $\hat{F}_2 = \hat{Q}$? $\left(\hat{Q}=i\dfrac{d}{dx}\right)$.

Ответ:

А). $\hat{F}=-\hat{I}$, Б) $\hat{G}=2ix\dfrac{d}{dx}-i\hat{I}$.