3. Задачи на собственные значения, собственные функции.

Вопрос 1. Что такое задача на собственные значения, спектр, дискретный и непрерывный спектр, простое и вырожденное собственное значение, кратность вырождения?

Задача 1. Показать, что приведенные ниже функции являются собственными для указанных операторов и найти отвечающие им собственные значения.

А). $\hat{F} = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2, \quad \psi = e^{-x^2/2}$;

Б). $\hat{F} = -\dfrac{d^2}{dx^2}, \quad \psi = \sin 2x$;

В). $\hat{F} = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{2}{x}\dfrac{d}{dx}, \quad \psi = \dfrac{\sin\alpha x}{x}$.

Задача 2. Найти собственные значения и нормированные собственные функции операторов:

А). $\dfrac{d^2}{dx^2}$ на множестве функций, которые заданы на интервале (0, a) и обращаются в нуль на его концах;

Б). $\dfrac{d}{dx}$ на множестве функций, заданных на прямой;

В) $i\dfrac{d}{dx}$ на множестве функций, заданных на прямой.

Ответ:

А). $f_n = -\dfrac{\pi^2}{a^2}n^2, \quad \psi_n = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{\pi n}{a}x$;

Б). $f = ik \ (k \in \mathbb{R}), \quad \psi_f = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$;

В) $f = k \in \mathbb{R}, \quad \psi_f = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$.

Задача 3. Доказать, что собственные значения оператора квадрата наблюдаемой неотрицательны.

Решение: $\hat{F} = \hat{G}^2 : \quad \hat{F}\psi_f = f\psi_f, \quad \hat{G}\psi_f = f\psi_f,$

$$\left(\psi_f, \hat{G}^2\psi_f\right) = f\left(\psi_f, \psi_f\right), f = \frac{\left(\hat{G}\psi_f, \hat{G}\psi_f\right)}{\left(\psi_f, \psi_f\right)} \geq 0 \quad .$$

Задача 4. Известно, что $\hat{F}^2 = \alpha\hat{F} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$. Найти собственные значения этого оператора.

$$\hat{F}\psi = f\psi \begin{cases} \nearrow \left(\alpha\hat{F}\right)\psi_f = \left(\alpha f\right)\psi_f \\ \searrow \left(\hat{F}^2\right)\psi_f = f^2\psi_f \end{cases} \Rightarrow f^2 = \alpha f \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} f_1 = 0 \\ f_2 = \alpha \end{matrix}} \; .$$

Вопрос 2. Каковы свойства собственных значений и собственных функций эрмитовых операторов?

Задача 5. Известно, что $\hat{F}^2 = \hat{I}$. Найти собственные значения $\hat{F}$.

$$\hat{F}\psi_f = f\psi_f \;\Rightarrow\; \hat{F}^2\psi_f = f^2\psi_f \;\Rightarrow \psi_f = f^2\psi_f \Rightarrow f^2 = 1 \Rightarrow \boxed{f = \pm 1} \; .$$

Задача 6. Решить задачи на собственные значения и убедиться в их “ аномалиях “ для следующих неэрмитовых операторов:

А). $\hat{F} = x - \dfrac{d}{dx}$ Б). $\hat{F} = x + \dfrac{d}{dx}$

В). $\hat{F} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Г). $\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

А).

$$\left(x - \frac{d}{dx}\right)\psi_f(x) = f\psi_f(x), \quad \frac{d\psi}{dx} = (x - f)\psi_f \; ,$$

$$\frac{d\psi_f}{\psi_f} = (x - f)dx \; , \; \ln\frac{\psi_f}{A} = \frac{(x - f)^2}{2} \; ,$$

$$\psi_f(x) = A \cdot e^{(x-f)^2/2} \; .$$

Ни при каком комплексном f функция не является ограниченной. У оператора нет ни одного собственного значения.

Б). Аналогично, $\psi_f(x) = A\cdot e^{-(x-f)^2/2}$.

При любом комплексном f эти функции ограничены. Собственные значения заполняют всю комплексную плоскость. Собственные функции не являются взаимно ортогональными. Но можно показать, что они образуют полную систему (на этом не останавливаемся).

В). Это есть матричная задача на собственные значения.

$$\hat{F}\psi_f = f\psi_f \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & i\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a+ib\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}fa\\fb\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}a+ib=fa\\0=fb\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}a(1-f)+ib=0\\0a+fb=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix}1-f & i\\0 & f\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1-f)=0 \begin{matrix}\nearrow f_1 = 0\\ \searrow f_2 = \alpha\end{matrix} \quad ; \quad f_1 = 0: \left.\begin{matrix}a+ib=0\\0b=0\end{matrix}\right\}: \ b, a=-ib$$

$$\psi_f^{(1)} = \begin{pmatrix}-ib\\b\end{pmatrix}; \ \psi_f^{(1)+}\psi_f^{(1)} = 1 \Rightarrow (ib, b)\begin{pmatrix}-ib\\b\end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{f^{(1)} = 0, \ \psi_f^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}}$$

нормир.

$$f=1: \left.\begin{matrix}ib=0\\0a=0\end{matrix}\right\} a, b=0: \psi_f^{(2)} = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad \psi_f^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{f^{(2)} = 1, \ \psi_f^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$$

Собственные векторы не ортогональны, но образуют базис.

Г).

$$\hat{F}\psi_f = f\psi_f \ : \ \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}fa\\fb\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}b=fa\\0=fb\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}fa-b=0\\0a+fb=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix}f & -1\\0 & f\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow f^2 = 0 \Rightarrow f = 0$$

нормир.

$$\psi_f = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad \psi_f = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{f = 0, \ \psi_f = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \ .$$

Имеется одно собственное значение (вещественное) и один собственный вектор. Естественно, что базиса он не образует.

4. Средние значения наблюдаемых и вероятностная интерпретация

Задача 1. Показать, что вероятность получить при измерении наблюдаемой F в состоянии ψ какое-то значение f равно 1.

Решение.

$$W=\sum_f W_\psi(f)=\sum_f\left|(\psi_f,\psi)\right|^2=\sum_f(\psi_f,\psi)^*(\psi_f,\psi)=$$

$$=\sum_f(\psi,\psi_f)(\psi_f,\psi)=(\psi,\psi)=1$$

Задача 2. Получить формулу для вычисления вероятностей из формулы для среднего значения.

Указание: обратить выкладки:

$$\langle F\rangle_\psi=(\psi,\hat{F}\psi)=\sum_f(\psi,\psi_f)(\psi_f,\hat{F}\psi)=\sum_f(\psi,\psi_f)(\hat{F}\psi_f,\psi)=\sum_f f(\psi,\psi_f)(\psi_f,\psi)=$$

$$=\sum_f f(\psi_f,\psi)^*(\psi_f,\psi)=\sum_f f\left|(\psi_f,\psi)\right|^2=\sum_f fW_\psi(f)\Rightarrow W_\psi(f)=\left|(\psi_f,\psi)\right|^2.$$

Задача 3. Доказать вещественность средних значений наблюдаемых.

Ответ:

$$\langle F\rangle^*_\psi=(\psi,\hat{F}\psi)^*=(\hat{F}\psi,\psi)^*=(\psi,\hat{F}\psi)=\langle F\rangle_\psi\ .$$

Задача 4. Доказать неотрицательность среднего значения квадратов наблюдаемых.

Решение:

$$\left\langle F^2\right\rangle_\psi=(\psi,\hat{F}^2\psi)=(\psi,\hat{F}\hat{F}\psi)^*=(\hat{F}\psi,\hat{F}\psi)=(\varphi,\varphi)\geq 0\ .$$

Задача 5. Какие из пар наблюдаемыхявляются совместно измеримыми ?

А) $\hat{X}=x,\ \hat{Y}=y$; Б) $\hat{Q}_x=i\dfrac{d}{dx},\ \hat{Q}_y=i\dfrac{d}{dy}$; В) $\hat{X},\hat{Q}_x$; Г) $\hat{X},\hat{Q}_y$;

Д) $\hat{Q}_x,\hat{Q}^2=\hat{Q}_x{}^2+\hat{Q}_y{}^2+\hat{Q}_z{}^2$; Е) $\hat{X},\ \hat{Q}^2$.

Задача 6. Для каких волновых функций минимизируется соотношение неопределенностей для наблюдаемых $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$, т. е. имеет место знак равенства?

Решение. Если вспомнить вывод, приведенный в лекциях, то увидим, что равенство

$$D_\psi(F_1)D_\psi(F_2)=\frac{1}{4}\langle F\rangle_\psi{}^2;\quad\left(\left[\hat{F}_1,\hat{F}_2\right]=i\hat{F}\right)$$

Реализуется при $I_{min}=I(\alpha_0)=0,$

где
$$\alpha_0=-\frac{B}{4A}=-\frac{\langle F\rangle_\psi}{2\left\langle(\Delta F_1)^2\right\rangle_\psi},$$

т.е. при
$$\left(\alpha_0\hat{\Delta F}_1-i\hat{\Delta F}_2\right)\psi=0\Rightarrow\left(\frac{B}{2A}\hat{\Delta F}_1+i\hat{\Delta F}_2\right)\psi=0\Rightarrow$$

или
$$\boxed{\left(\frac{\langle F\rangle_\psi}{2\left\langle(\Delta F_1)^2\right\rangle_\psi}\hat{\Delta F}_1+i\hat{\Delta F}_2\right)\psi=0}\ .$$

Отсюда находим уравнение для определения оптимальных волновых функций:

Чтобы решить его, нужно знать конкретный вид операторов $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$.

К этой задаче вернемся в связи с координатой и импульсом.

5. Координата и импульс

Вопрос 1. Почему оператором координаты является $\hat{X} = x$?

Ответ: потому что он дает правильные собственные функции, правильные вероятности и правильные средние значения.

Задача 1. Найти нормированные собственные функции оператора координаты.
Ответ: $\psi_\xi(x) = \delta(x-\xi)$.

Задача 2. Получить плотность вероятности $W_\psi(x)$ из общих положений.

Ответ: $W_\psi(x) = |\psi(x)|^2$.

Задача 3. Выразить $\langle x \rangle_\psi$ через $dW_\psi(x)$ из общих положений.

Ответ: $\langle x \rangle_\psi = \int x \cdot dW_\psi(x)$.

Вопрос 2. Почему оператором импульса является $\hat{P} = -i\hbar \dfrac{d}{dx}$?

Ответ: потому что он дает правильные собственные функции (волны де Бройля) и правильные средние значения: а также правильное коммутационное соотношение с $\hat{X}$, приводящее к правильному соотношению неопределенностей.

Задача 4. Найти спектр и нормированные собственные функции оператора импульса.
Решение:

$$\hat{P}\psi_p(x) \equiv -i\hbar \frac{d\psi_p(x)}{dx} = p\psi_p(x) \Rightarrow \psi_p(x) = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}px};$$

$$p = q + i\gamma: \quad \psi_p(x) = A \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}\gamma x} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}qx} \to \infty \begin{cases} x \to +\infty, \ \gamma<0 \\ x \to -\infty, \ \gamma>0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\boxed{Sp\left(\hat{P}\right) = \mathbb{R}}, \quad \psi_p(x) = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}px}, \quad \forall p \in \mathbb{R};$$

$$\left(\psi_p, \psi_{p'}\right) = \delta(p-p'): \quad \delta(p-p') = A_p^* A_{p'} \int e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)x} dx = A_p^* A_{p'} \hbar \int e^{i(p'-p)\frac{x}{\hbar}} d\left(\frac{x}{\hbar}\right) =$$

$$= 2\pi A_p^* A_{p'} \hbar \delta(p-p') = 2\pi\hbar \left|A_p\right|^2 \delta(p-p') \Rightarrow A_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \overset{(\alpha=0)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px}}.$$

Вопрос 3. Образуют ли найденные функции $\psi_p(x)$ базис?

Ответ: да, причем ортонормированный $\left(\psi_p, \psi_{p'}\right) = \delta(p-p')$.

Вопрос 4. Чему соответствует разложение произвольной волновой функции по этому базису?

Ответ: разложению в интеграл Фурье

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\tilde{\psi}(p)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp,\quad \tilde{\psi}(p)=(\psi_p,\psi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}px}dx\,.$$

Вопрос 5. Записать функцию распределения значений импульса в состоянии ψ .
Ответ:

$$W(p)=\left|(\psi_p,\psi)\right|^2=\left|\tilde{\psi}(p)\right|^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left|\int e^{-\frac{i}{\hbar}px}\psi(x)dx\right|^2.$$

Задача 5. Выразить $\left\langle P\right\rangle_\psi$ через $dW_\psi(p)$.
Решение:

$$\left\langle P\right\rangle_\psi=\left(\psi,\hat{P}\psi\right)=-i\hbar\int\psi^*(x)\frac{d}{dx}\psi(x)dx=-i\hbar\int\psi^*(x)\frac{d}{dx}\Bigg\{$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\tilde{\psi}(p)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp\right\}=-i\hbar\frac{i}{\hbar}\int p\tilde{\psi}(p)\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi^*(x)\cdot e^{\frac{i}{\hbar}px}dx\right\}dp=$$

$$=\int p\tilde{\psi}(p)\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}px}dx\right\}dp=\int p\tilde{\psi}(p)\tilde{\psi}(p)^*dp=\int p\left|\tilde{\psi}(p)\right|^2dp=$$

$$=\int pW(p)dp=\int pdW_\psi(p)$$

Задача 6. Проверить коммутационное соотношение Гайзенберга

$$\left[\hat{x},\hat{P}\right]=i\hbar\hat{I}\,.$$

Задача 7. Вычислить коммутаторы:

А) $\left[\hat{P}^2,\hat{x}\right]$ б) $\left[\hat{P},\sigma\left(\hat{x}\right)\right]$.

Ответ: А) $-2i\hbar\hat{P}$ б) $i\hbar\dfrac{d\sigma\left(\hat{x}\right)}{d\hat{x}}$.

Задача 8. Найти оператор $\hat{P}$, зная $\hat{X}$ и коммутационное соотношение Гайзенберга.

Решение: $\left[\hat{x},\hat{P}\right]=i\hbar\hat{I}\Rightarrow\hat{x}\hat{P}-\hat{P}\hat{x}=i\hbar\hat{I}\Rightarrow\left(\psi_y\left\{\hat{x}\hat{P}-\hat{P}\hat{x}\right\}\psi_z\right)=i\hbar\left(\psi_y,\hat{I}\psi_z\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(\psi_y,\hat{X}\hat{P}\psi_z\right)-\left(\psi_y,\hat{P}\hat{X}\psi_z\right)=i\hbar\left(\psi_y,\psi_z\right)\Rightarrow\left(\hat{x}\psi_y,\hat{P}\psi_z\right)-\left(\psi_y,\hat{P}\hat{X}\psi_z\right)=i\hbar\delta(y-z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(y-z)\left(\psi_y,\hat{P}\psi_z\right)=i\hbar\delta(y-z)\Rightarrow(y-z)\int\delta(x-y)\hat{P}_x\delta(x-z)dx=i\hbar\delta(y-z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(y-z)\left\{\hat{P}_y\delta(y-z)\right\}=i\hbar\delta(y-z)\Rightarrow\hat{P}_y\delta(y-z)=-i\hbar\delta'(y-z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\hat{P}\delta(x-y)=-i\hbar\frac{d}{dx}\delta(x-y)=-i\hbar D_x\delta(x-y)$$

$$\hat{P}\psi(x)=\hat{P}_x\int\psi_y\delta(y-x)dy=\int\psi(y)\hat{P}_x\psi_y\delta(y-x)dy=-i\hbar\int\psi(y)\hat{D}_x\delta(x-y)dy=$$

$$=+i\hbar\int\psi(y)\hat{D}_y\delta(y-x)dy=i\hbar\int\psi(y)\delta'(y-x)dy=-i\hbar\psi'(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\hat{P}\psi(x)=-i\hbar\frac{d\psi(x)}{dx}\Rightarrow\boxed{\hat{P}=-i\hbar\frac{d}{dx}}\,.$$

Вопрос 6. Какова строгая формулировка соотношения неопределенностей Гейзенберга?

Ответ:

$$\sqrt{\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle_\psi} \cdot \sqrt{\left\langle (\Delta P)^2 \right\rangle_\psi} \ge \frac{\hbar}{2} \quad .$$

Задача 9. Найти волновые функции, минимизирующие соотношение неопределенностей Гейзенберга.

Решение:

Согласно результату задачи,

$$\left(\frac{\langle F \rangle_\psi}{2\left\langle \left(\hat{\Delta}F_1\right)^2 \right\rangle_\psi} \hat{\Delta}F_1 + i\hat{\Delta}F_2 \right)\psi = 0$$

Полагая $\hat{F}_1 = \hat{X}$ и $\hat{F}_2 = \hat{P}$, имеем:

$$\left(\frac{\hbar}{2\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle} \hat{\Delta}x + i\hat{\Delta}P \right)\psi = 0$$

Будем считать, что $\langle x \rangle = 0$ (выбор начала координат) и $\langle P \rangle = 0$ (выбор движущейся системы отсчета). Тогда,

$$\left(\frac{\hbar}{2\langle x^2 \rangle} \hat{X} + i\hat{P} \right)\psi = 0$$

Подставляя операторы $\hat{X}$ и $\hat{P}$, придем к дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{1}{2\langle x^2 \rangle} x + \frac{d}{dx} \right)\psi(x) = 0$$

Его общее решение имеет вид $\boxed{\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{4\langle x^2 \rangle}}}$,

где A - нормировочная постоянная.

Таким образом, волновые функции, минимизирующие соотношение неопределенностей, имеет гауссовскую форму. Величина $\langle x^2 \rangle$ играет роль произвольной константы, которую можно обозначить как a^2 . Задаваясь ее значением, будем получать разные волновые функции. Вычисляя дисперсию координаты в данном состоянии (а так как $\langle x \rangle = 0$, то она совпадает со средним значением x^2), то мы получим для нее a^2 .

Задача 10. Для предыдущей задачи вычислить нормировочную константу и дисперсию координаты.

Указание: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Задача 11. Вычислить коммутатор $\left[\hat{H}, \hat{x}\right]$ в случае одномерного движения частицы.

Ответ: $-\frac{i\hbar}{m}\hat{P}$.

Задача 12. Доказать, что для одномерного движения в стационарном состоянии дискретного спектра среднее значение импульса равно нулю.

Решение: $\langle P \rangle_E = \left(\psi_E, \hat{P}\psi_E\right) = \frac{im}{\hbar}\left(\psi_E, \left[\hat{H}, \hat{x}\right]\psi_E\right) = \frac{im}{\hbar}\left\{\left(\psi_E, \hat{H}\psi_E\right) - \left(\psi_E, \hat{X}\hat{H}\psi_E\right)\right\} =$

$$= \frac{im}{\hbar}\left\{\left(\hat{H}\psi_E, \hat{X}\psi_E\right) - \left(\psi_E, \hat{X}\hat{H}\psi_E\right)\right\} = \frac{im}{\hbar} \cdot \left\{E\left(\psi_E, \hat{X}\psi_E\right) - E\left(\psi_E, \hat{X}\psi_E\right)\right\} = 0$$

Задача 13. Получить строгую оценку для энергии основного состояния одномерного гармонического осциллятора.

Решение: Исходим из соотношения неопределенностей

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle_E \cdot \left\langle (\Delta P)^2 \right\rangle_E \geq \frac{\hbar^2}{4} \ .$$

Так как в стационарном состоянии $\langle P \rangle_E = 0$, то

$$\left\langle (\Delta P)^2 \right\rangle_E = \left\langle P^2 \right\rangle_E - \left\langle P \right\rangle_E^2 = \left\langle P^2 \right\rangle_E \ .$$

Из физических соображений очевидно, что в любом стационарном состоянии осциллятора $\langle x \rangle_E = 0$ (это строго доказывается в лекциях, в связи с понятием четности), а потому

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle_E = \left\langle x^2 \right\rangle_E \ .$$

В итоге соотношение неопределенностей записывается как

$$\left\langle x^2 \right\rangle_E \cdot \left\langle P^2 \right\rangle_E \geq \frac{\hbar^2}{4} \ .$$

Для энергии стационарного состояния теперь имеем:

$$E \equiv E(\psi_E, \psi_E) = (\psi_E, E\psi_E) = (\psi_E, \hat{H}\psi_E) = \left(\psi_E, \left\{ \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right\} \psi_E \right) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left\langle \hat{P}^2 \right\rangle_E + \frac{m\omega^2}{2}\left\langle \hat{x}^2 \right\rangle_E \geq \frac{\hbar^2}{8m\left\langle \hat{x}^2 \right\rangle} + \frac{m\omega^2}{2}\left\langle x^2 \right\rangle_E \equiv f\left(\left\langle x^2 \right\rangle_E \right) \ .$$

Минимизируем функцию

$$f(\eta) = \frac{\hbar^2}{8m\eta} + \frac{m\omega^2}{2}\eta \ ,$$

для чего приравниваем нулю ее производную:

$$0 = f'(\eta_0) = -\frac{\hbar^2}{8m\eta_0^2} + \frac{m\omega^2}{2} \Rightarrow \eta_0^2 = \frac{4m^2\omega^2}{\hbar^2} \Rightarrow \eta_0 = \frac{2m\omega}{\hbar} \ , \ \eta_0^{-1} = \frac{\hbar}{2m\omega} \ .$$

В результате получаем

$$f_{min}(\eta) = f(\eta_0) = \frac{\hbar^2}{8m}\frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{\hbar\omega}{4} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\hbar\omega}{2} \ ,$$

т.е.

$$\boxed{E_0 \geq \frac{\hbar\omega}{2}} \ .$$

В действительности в основном состоянии осциллятора реализуется минимум функции $f(\eta)$, т.е. $E_0 \geq \frac{\hbar\omega}{2}$.

Это связано с тем, что это состояние описывается волновой функцией гауссовского типа, т.е. волновой функцией из задачи 9 .