4. Уравнение Шредингера.

Вопрос 1. Записать уравнение Шредингера для:

А). Одномерного движения изолированной частицы;

Б). Одномерного гармонического осциллятора.

В). Частицы с одной степенью свободы в однородном поле.

Г). Одномерного гармонического осциллятора в однородном поле.

Ответ: $i\hbar\dfrac{\partial\psi(x\,|\,t)}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi(x\,|\,t)}{\partial x^2}+u(x)\psi(x\,|\,t),$ где

А). $u=0$; Б). $u=\dfrac{m\omega^2x^2}{2}$ В). $u=-e\varepsilon x$ Г). $u=\dfrac{m\omega^2x^2}{2}-e\varepsilon x$

Вопрос 2. Записать стационарное уравнение Шредингера для систем А) – Г).

Ответ: $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\psi''_E(x)+u(x)\psi_E(x)=E\psi_E(x)$

С указанными выражениями для $u(x)$

Вопрос 3. Записать уравнение Шредингера для частицы с одной степенью свободы в однородном поле, гармонически меняющемся во времени с амплитудой ε_0 и частотой ω. Записать для этой системы стационарное уравнение Шредингера.

Ответ: $i\hbar\dfrac{\partial\psi(x\,|\,t)}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi(x\,|\,t)}{\partial x^2}-\varepsilon_0\cos\omega t\cdot\psi(x\,|\,t)$

Стационарное уравнение Шредингера не имеет смысла, так как $\partial\hat{H}/\partial t\neq 0$ и энергия не сохраняется.

Вопрос 4. Показать, что стационарное уравнение Шредингера для частицы с одной степенью свободы в поле $u(x)=\text{Const}\equiv u_0$ сводится к одномерному стационарному уравнению Шредингера для изолированной частицы.

Ответ. $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\psi''_E(x)=E'\psi_E(x),\quad E'=E-u_0$

Вопрос 5. Записать уравнение Шредингера для

А) Трехмерного движения изолированной частицы.

Б). Трехмерного изотропного осциллятора.

В). Трехмерного движения частицы в однородном поле.

Г) Электрона в атоме водорода.

Д). Электрона в атоме водорода, помещенного в однородное электрическое поле.

Ответ: $i\hbar\dfrac{\partial\psi(\bar{r}\,|\,t)}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\bar{r}\,|\,t)+u(\bar{r})\psi(\bar{r}\,|\,t)$, где

А). $u=0$ Б). $u=\dfrac{m\omega^2}{2}r^2$ В). $u=-e(\bar{\varepsilon}\;\bar{r})$

Г). $u=-\dfrac{e^2}{r}$ Д). $u=-\dfrac{e^2}{r}+e(\bar{\varepsilon}\;\bar{r})$

Вопрос 6. Записать стационарное уравнение Шредингера для систем А) – Д).

Ответ. $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_E(\bar{r})+u(\bar{r})\psi_E(\bar{r})=E\psi_E(\bar{r})$.

Вопрос 7. Записать стационарное уравнение Шредингера для атома водорода, учитывая конечность массы ядра.

Ответ: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_R^2\right)\psi_E(\bar{r},\bar{R})+\frac{-e^2}{|\bar{r}-\bar{R}|}\psi_E(\bar{r},\bar{R})=E\psi_E(\bar{r},\bar{R})$

Вопрос 8. Записать уравнение Шредингера для атома гелия, считая ядро бесконечно тяжелым.

Ответ: $i\hbar\frac{\partial\psi(\bar{r}_1,\bar{r}_2\,|\,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla_1{}^2+\nabla_2{}^2\right)\psi(\bar{r}_1,\bar{r}_2\,|\,t)+\left\{-\frac{e^2}{r_1}-\frac{e^2}{r_2}+\frac{e^2}{|\bar{r}_1-\bar{r}_2|}\right\}\psi(\bar{r}_1,\bar{r}_2\,|\,t)$

Вопрос 9. Записать стационарное уравнение Шредингера для многоэлектронного атома, считая ядро бесконечно тяжелым.

Ответ: $-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\sum_{k=1}^{z}\nabla_k^2\right)\psi_E(\bar{r}_1,...,\bar{r}_z)+\left\{\sum_{k=1}^{z}\frac{-ze^2}{r_k}+\sum_{k<l}^{z}\frac{e^2}{|\bar{r}_k-\bar{r}_l|}\right\}\psi_E(\bar{r}_1,...,\bar{r}_z)=E\psi_E(\bar{r}_1,\bar{r}_2,...,\bar{r}_z)$

Вопрос 10. Чему равна плотность тока вероятности?
Ответ

$$\bar{j}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\bar{\nabla}\psi^*-\psi^*\nabla\psi\right)$$

Вопрос 11. Чему равна плотность тока вероятности для одномерного движения?

Ответ: $j=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{d\psi^*}{dx}-\psi^*\frac{d\psi}{dx}\right)$.

Вопрос 12. Записать плотность тока вероятности для одномерного движения частицы, обладающей определенным импульсом.

Ответ: $\psi(x)=A\cdot e^{\frac{i}{\hbar}px};\ \ j=|A|^2\frac{p}{m}=|A|^2 v\Rightarrow\begin{cases}\frac{p}{2\pi\hbar m}=\frac{v}{2\pi\hbar}, & A=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\\ \frac{p}{m}=v; & A=1\end{cases}$.

Вопрос 13. Волновая функция частицы есть $\psi(\bar{r})=\frac{1}{2\pi}\sin ky\cdot e^{-\alpha r^2}$.

Чему равна плотность тока вероятности?

Ответ: Для любой вещественной волновой функции $j=0$.

Вопрос 14. Волновая функция частицы, рассеянной на силовом центре, имеет вдали от него вид расходящейся сферической волны:

$$\psi(\bar{r})=f\left(\theta,\varphi\,|\,k\right)\frac{e^{ikr}}{r},\ \ k\equiv\frac{p}{\hbar}\ .$$

Вычислить радиальный компонент плотности тока вероятности.

Ответ: $$j_r = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi \frac{d\psi^*}{dr} - \psi^* \frac{d\psi}{dr}\right) = \frac{p}{m}\frac{\left|f\left(\theta,\varphi \,|\, k\right)\right|^2}{r^2}\ .$$