1V.МОМЕНТ ИМПУЛЬСА.

Операторы орбитального момента импульса имеют вид:

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{R}} \times \hat{\vec{P}} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}, \quad \hat{\vec{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 .$$

В декартовых координатах

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) .$$

В сферических координатах

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \hat{\vec{L}}^2 = -\hbar^2\nabla_\Omega^2 = -\hbar^2\left\{ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right\} .$$

Коммутационные соотношения:

$$\left[\hat{L}_j, \hat{X}_k \right] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\cdot X_l \; ; \; \left[\hat{L}_j, \hat{P}_k \right] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\cdot \hat{P}_l \; ; \; \left[\hat{L}_j, \hat{L}_k \right] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\cdot \hat{L}_l \; ; \; \left[\hat{L}_j, \hat{L}^2 \right] = 0 .$$

Собственные функции операторов $\hat{\vec{L}}^2$ и $\hat{L}_z$ - сферические гармоники $y_m^l(\theta,\varphi)$

Собственные значения $\hat{\vec{L}}^2$ - неотрицательные целые числа $l^2 = \hbar^2 l(l+1)$,

собственные значения $\hat{L}_z$ - целые числа $l_z = \hbar m$ в интервале $-l \le m \le l$.

Операторы спина электрона имеют вид:

$$\hat{S}_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j \; ; \; \hat{\vec{S}}^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \right) \; ; \; \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Их коммутационные соотношения – те же, что и у $\hat{L}_j$. Они действуют на индексы двухкомпонентной волновой функции.

Если у одной частицы полный момент импульса равен j_1 , а у другой он равен j_2 , то момент системы может принимать значения

$$j = |j_1 - j_2|, \; |j_1 - j_2| + 1, \; ..., \; |j_1 + j_2| .$$

При этом проекции момента строго складываются:

$$M = m_1 + m_2$$

1. Получить выражение для $\hat{L}_z$ в сферических координатах.

Решение.

$$x = r\cdot\sin\theta\cos\varphi, \; y = r\cdot\sin\theta\sin\varphi, \; z = r\cdot\cos\theta; \; d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz; \;\; r,\theta = Const:$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot r\cdot\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot r\cdot\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot 0 = x\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x};$$

$$\hat{L}_z\psi = -i\hbar\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\varphi};$$

$$\boxed{\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}}$$

2. Получить выражение для $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ и $\hat{\vec{L}}^2$ в сферических координатах.

3. Проверить коммутационные соотношения $\hat{L}_j$ и $\hat{X}_k$.

Решение. Надо установить, что коммутатор $\hat{L}_j$ со своей координатой равен 0, коммутатор $\hat{L}_j$ с чужой координатой – (с точностью до $\hbar$) равен совсем чужой координате. Имеем в качестве примеров:

$$\left[\hat{L}_x, x\right] = \hat{L}_x x - x\hat{L}_x = \left(y\hat{P}_z - z\hat{P}_y\right)x - x\left(y\hat{P}_z - z\hat{P}_y\right) = x\left(y\hat{P}_z - z\hat{P}_y\right) - x\left(y\hat{P}_z - z\hat{P}_y\right) = 0$$

$$\left[\hat{L}_x, y\right] = \hat{L}_x y - y\hat{L}_x = \left(y\hat{P}_z - z\hat{P}_y\right)y - y\left(y\hat{P}_z - z\hat{P}_y\right) = y\hat{P}_z y - z\hat{P}_y y - y^2\hat{P}_z + yz\hat{P}_y =$$

$$= z\left[y, \hat{P}_y\right] = i\hbar z \ .$$

4. Проверить коммутационные соотношения $\hat{L}_j$ с $\hat{P}_k$.
Решение такое же, как в задаче 3.

5. Получить выражение для оператора момента импульса из симметрийных соображений.
Решение. Повернем систему координат на малый угол $\bar{\alpha}$. При этом

$$\delta\bar{r} = [\bar{r}, \bar{\alpha}] \equiv \alpha[\bar{r}, \bar{n}] \ .$$

Таким образом,

$$\bar{r}' = g(\bar{r}) = \bar{r} + \alpha[\bar{r}, \bar{n}], \quad g^{-1}(\bar{r}) = \bar{r} - \alpha[\bar{r}, \bar{n}] = \bar{r} + \alpha[\bar{n}, \bar{r}] \ .$$

Находим изменение волновой функции:

$$\psi'(\bar{r}) = \left\{\hat{I} + i\left(\bar{\alpha}, \hat{\bar{F}}\right)\right\}\psi(\bar{r}) = \left\{\hat{I} + i\alpha\left(\bar{n}, \hat{\bar{F}}\right)\right\}\psi(\bar{r}) =$$

$$= \psi\left(g^{-1}\bar{r}\right) = \psi\left(\bar{r} + \alpha[\bar{n}, \bar{r}]\right) = \psi(\bar{r}) + \alpha\left([\bar{n}, \bar{r}], \nabla\right)\psi(\bar{r}) =$$

$$= \psi(\bar{r}) + \alpha\left(\bar{n}, \left[\bar{r}, \bar{\nabla}\right]\right)\psi(\bar{r}) = \left\{\hat{I} + \alpha\left(\bar{n}, \left[\bar{r}, \bar{\nabla}\right]\right)\right\}\psi(\bar{r}) \ ,$$

а потому векторный генератор вращения есть

$$\hat{\bar{F}} = -i\left[\bar{r}, \bar{\nabla}\right] \equiv \frac{1}{\hbar}\left(\bar{r} \times -i\hbar\bar{\nabla}\right) = \frac{1}{\hbar}\hat{\bar{R}} \times \hat{\bar{P}} \ .$$

Так как в классической механике вращения связаны с моментом импульса, это должно быть справедливым и в квантовой механике, откуда $\hat{\bar{F}} = \alpha \cdot \hat{\bar{L}}$. Так как в классике $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$, то достаточно положить $\alpha = \dfrac{1}{\hbar}$:

$$\boxed{\hat{\bar{F}} = \frac{1}{\hbar}\hat{\bar{L}} \ , \quad \hat{\bar{L}} = \hat{\bar{R}} \times \hat{\bar{P}}} \ .$$

6. Получить выражение для $\hat{L}_z$, используя сферические координаты.
Решение.

$$\bar{r}' = g\bar{r}: \ (r,\theta,\varphi) \to (r,\theta,\varphi - \alpha); \ \ g^{-1}\bar{r}: \ (r,\theta,\varphi) \to (r,\theta,\varphi + \alpha),$$

$$\psi'(\bar{r}) = \left\{\hat{I} + i\alpha\hat{F}_z\right\}\psi(\bar{r}) =$$

$$\psi\left(g^{-1}\bar{r}\right) = \psi(r,\theta,\varphi+\alpha) = \psi(r,\theta,\varphi) + \alpha\left.\frac{\partial\psi(r,\theta,\varphi+\alpha)}{\partial\varphi}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \left\{\hat{I} + i\alpha\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}\psi(r,\theta,\varphi) \Rightarrow \hat{F}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} = \alpha \cdot \hat{L}_z = \frac{1}{\hbar}\hat{L}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}} \ .$$

7. Выяснить смысл оператора

$$\hat{R}(\alpha) = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{L}_z} \ .$$

Решение.

$$\hat{R}(\alpha)\psi(\bar{r}) = e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}}\cdot\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left\{\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}^n}{n!}\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\partial^n\psi(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^n} = \psi(r,\theta,\varphi+\alpha)\ .$$

Таким образом, $\boxed{\hat{R}(\alpha)\psi(r,\theta,\varphi)=\psi(r,\theta,\varphi+\alpha)}$,

т.е. $\hat{R}(\alpha)$ – оператор вращения вокруг оси OZ на угол α.

8. Найти оператор вращения вокруг $\bar{n}$ на угол α.

Ответ. $\hat{\hat{R}}_{\bar{n}}(\alpha) = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha(\bar{n},\bar{L})} \equiv e^{\frac{i}{\hbar}(\bar{\alpha},\bar{L})}$.

9. Почему операторы компонентов импульса взаимно коммутируют, а операторы компонентов момента не коммутируют друг с другом?

Решение. Операторы компонентов импульса связаны с трансляциями вдоль соответствующих осей, которые взаимно перестановочны. Операторы компонентов момента связаны с вращениями вокруг соответствующих осей, которые не перестановочны.

10. Известно, что возможные проекции момента на ось Z равны -l,-l+1, …, l (например, из решения задачи на собственные значения $\hat{L}_z$). С помощью элементарных формул установить, что

$$\overline{l^2} = l(l+1).$$

<u>Решение</u>. Рассмотрим состояние с определенным значением $\overline{l^2}$ и с равновероятными значениями m. Тогда $\overline{l^2}$ будет равно среднему значению оператора $\hat{\hat{L}}^2$. В силу равноправности всех направлений

$$\overline{l^2} = \left\langle \bar{L}^2 \right\rangle = \left\langle L^2{}_x \right\rangle + \left\langle L^2{}_y \right\rangle + \left\langle L^2{}_z \right\rangle = 3\left\langle L^2{}_z \right\rangle.$$

Всего разных проекций 2l+1, и в силу равновероятности их значений

$$\left\langle L^2{}_z \right\rangle = \frac{1}{2l+1}\sum_{n=-l}^{l} m^2 .$$

Поэтому $\overline{l^2} = \dfrac{3}{2l+1}\displaystyle\sum_{n=-l}^{l} m^2$.

Осталось вычислить сумму. Это можно сделать школьными методами, но проще так

$$\sum_{m=-l}^{l} m^2 = 2\sum_{m=0}^{l} m^2 = 2\frac{d^2}{d\alpha^2}\sum_{m=0}^{l} e^{\alpha m} = 2\left\{\frac{d^2}{d\alpha^2}\frac{1-e^{\alpha(l+1)}}{1-e^{\alpha}}\right\}_{\alpha=0} = \frac{l(l+1)(2l+1)}{3}.$$

Подстановка в предыдущую формулу и дает ответ.

11. Доказать, что в состоянии ψ_m с определенным значением проекции $m = \frac{l_z}{\hbar}$ имеют место равенства $\left\langle L_x \right\rangle = \left\langle L_y \right\rangle = 0$. Они очень наглядно трактуются в векторной модели.

<u>Указание</u>: вспомнить, как доказывалось равенство нулю среднего импульса в стационарном состоянии.

Решение.

$$\langle L_x\rangle_m=\left(\psi_{m,}\hat{L}_x\psi_m\right)=\frac{1}{i\hbar}\left(\psi_{m,}\left[\hat{L}_{y,}\hat{L}_z\right]\psi_m\right)=\frac{1}{i\hbar}\left\{\left(\psi_{m,}\hat{L}_y\hat{L}_z\psi_m\right)-\left(\psi_{m,}L_zL_y\psi_m\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{i\hbar}\left\{\left(\psi_{m,}\hat{L}_y\hat{L}_z\psi_m\right)-\left(\hat{L}_z\psi_{m,}\hat{L}_y\psi_m\right)\right\}=\frac{1}{i\hbar}\left\{m\left(\psi_{m,}\hat{L}_y\psi_m\right)-m\left(\psi_{m,}\hat{L}_y\psi_m\right)\right\}=0$$

Аналогично для $\hat{L}_y$.

12. Проверить соотношения для матриц Паули:
$\left[\sigma_j,\sigma_k\right]=2\varepsilon_{jkl}\cdot\sigma_k$; $\sigma_j^2=e$; $\left[\sigma_j,\sigma_k\right]=2\delta_{jkl}$; $\sigma_j^+=\sigma_j$; $Sp\sigma_j=0$.

13. Найти действие операторов $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$, $\hat{S}^2$, а также $\hat{S}_\pm=\hat{S}_x\pm i\hat{S}_y$ на волновые функции электрона χ_+ и χ_-, которые описывают его состояния с $S_z=\frac{1}{2}$ и $S_z=-\frac{1}{2}$

Ответ.

$$\chi_+=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}:\ \hat{S}_x\chi_+=\frac{\hbar}{2}\chi_-,\ \hat{S}_y\chi_+=\frac{i\hbar}{2}\chi_-,\ \hat{S}_z\chi_+=\frac{\hbar}{2}\chi_+,\ \hat{S}^2\chi_+=\frac{3}{4}\hbar^2\chi_{+,}\ \hat{S}_+\chi_+=0,\ \hat{S}_-\chi_+=\hbar\chi_-.$$

$$\chi_-=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}:\ \hat{S}_x\chi_-=\frac{\hbar}{2}\chi_+,\ \hat{S}_y\chi_-=-\frac{i\hbar}{2}\chi_+,\ \hat{S}_z\chi_-=-\frac{\hbar}{2}\chi_-,\ \hat{S}^2\chi_-=\frac{3}{4}\hbar^2\chi_{-,}\ \hat{S}_+\chi_-=\hbar\chi_+;\ \hat{S}_-\chi_-=0.$$

14. Проекция спина на ось z с достоверностью равна $+\frac{1}{2}$. Найти среднее значение проекции спина на ось z', составляющую с z угол θ. Каковы вероятности того, что проекции спина электрона на эту ось равны $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

<u>Решение</u>. Среднее значение момента импульса обладает всеми свойствами обычного вектора, а потому

$$\langle S_{z'}\rangle=\langle S_z\rangle\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}\cos\theta\ \Rightarrow\ \boxed{\langle S_{z'}\rangle=\frac{1}{2}\cos\theta};$$

$$\left.\begin{aligned}\langle S_{z'}\rangle&=\frac{1}{2}W_+-\frac{1}{2}W_-\\1&=W_++W_-\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}W_+-W_-&=\cos\theta\\W_++W_-&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow W_+=\frac{1+\cos\theta}{2},\ W_-=\frac{1-\cos\theta}{2};$$

$$\boxed{W_+=\cos^2\frac{\theta}{2},\ W_-=\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

15. Найти нормированную спиновую функцию электрона с проекцией спина $S_x=-\frac{1}{2}$. Определить вероятность того, что S_z в этом состоянии равно $\frac{1}{2}$.

<u>Решение</u>.

$$\hat{S}_x \cdot \chi = \lambda\chi \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\chi_2 \\ \frac{1}{2}\chi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\chi_1 \\ \lambda\chi_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} \lambda\chi_1 - \frac{1}{2}\chi_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}\chi_1 + \lambda\chi_2 = 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2};$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}:\; -\frac{1}{2}\chi_1 - \frac{1}{2}\chi_2 = 0 \;\Rightarrow\; \chi_2 = -\chi_1 \equiv \alpha \;\Rightarrow\; \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$1 = \left(\chi_{-\frac{1}{2}}, \chi_{-\frac{1}{2}}\right) = |\alpha|^2 (1,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = |\alpha|^2 \cdot 2 \;\Rightarrow\; |\alpha|^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\chi_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}};$$

$$W_{\chi_{-\frac{1}{2}}}\left(S_z = +\frac{1}{2}\right) = \left|\left(\chi_{S_z=+\frac{1}{2}}, \chi_{S_z=-\frac{1}{2}}\right)\right|^2 = \left|(1,0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2};\quad \boxed{W = \frac{1}{2}}$$

16. Получить оператор вращения спиновой волновой функции на угол α вокруг оси OZ. Найти преобразованную волновую функцию. Чему она равна после полного оборота на угол 2π?

<u>Решение</u>. Согласно результату задачи 7

$$\hat{R}_z(\alpha) = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{S}_z}$$

Вычисляем в явном виде

$$\hat{R}_z(\alpha) = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{S}_z} = e^{i\frac{\alpha}{2}\sigma_z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}{n!}(\sigma_z)^n =$$

$$= \sum_{n=2k}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k}\cdot I + \sum_{n=2k+1} i\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+1}\cdot\sigma_z =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}\cdot I + i\sin\frac{\alpha}{2}\sigma_z =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & -\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\hat{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha;}{2}} \end{pmatrix}};$$

$$\chi' = \hat{R}_z(\alpha)\chi = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & \chi_1 \\ e^{-i\frac{\alpha}{2}} & \chi_2 \end{pmatrix};$$

$$\alpha=2\pi:\ \chi'=\begin{pmatrix} e^{i\pi} & \chi_1 \\ e^{-i\pi} & \chi_2 \end{pmatrix}=e^{i\pi}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}=-\chi;\ \underline{R_z(2\pi)\chi=-\chi}\ .$$

17. Получить первую формулу в задаче 14 строго.

<u>Решение</u>. Ось z' получается из z поворотом системы координат вокруг оси OX на угол θ, а потому вектор χ_+ переходит в

$$\chi'=\hat{R}_x(\theta)\chi_+=e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x}\chi_+.$$

Оператор вращения вычисляется, как в задаче 16 :

$$\hat{R}_x(\theta)=\cos\frac{\theta}{2}\cdot I+i\sigma_x\cdot\sin\frac{\theta}{2}\ .$$

Учитывая, что

$$\sigma_x\cdot\chi_+=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\chi_-;\ I\chi_+=\chi_+\ ,$$

получаем

$$\chi'=\cos\frac{\theta}{2}\chi_++i\sin\frac{\theta}{2}\chi_-$$

Далее

$$\langle S_{z'}\rangle=\left(\chi',\hat{S}_z\chi'\right)=\left(\cos\frac{\theta}{2}\chi_++i\sin\frac{\theta}{2}\chi_-\ ,\hat{S}_z\left\{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right\}\chi_-\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{\theta}{2}\chi_++i\sin\frac{\theta}{2}\chi_-\ ,\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\chi_+-\frac{i}{2}\sin\frac{\theta}{2}\chi_-\right)=$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\left(-i\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(-\frac{i}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\cos\theta\ .$$

18. Имеются две частицы с орбитальными моментами $l_1=2$ и $l_2=3$. Чему равен полный орбитальный момент системы?

<u>Ответ</u>. Он не имеет определенного значения, а может быть равным:

$$L = 1, 2, 3, 4, 5\ .$$

19. Частица имеет орбитальный момент l. Найти возможные значения ее полного момента, если это (а) электрон ($S=\frac{1}{2}$), (б) промежуточный бозон (S=1), (в) Ω^- - гиперон $\left(S=\frac{3}{2}\right)$.

Ответ. (а) $l=0,\ j=\frac{1}{2};\ l\geq 1,\ j=l+\frac{1}{2},\ l-\frac{1}{2};$

(б) $l=0,\ j=1;\ \ l\geq 1,\ j=l-\frac{1}{2},\ l,\ l+\frac{1}{2};$

(в) $l=0,\ j=\frac{3}{2};\ \ l=1,\ \ j=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\ .$

$l\geq 2,\ j=l-\frac{3}{2},\ l-\frac{1}{2},\ l+\frac{1}{2},\ l+\frac{3}{2}.$

20. Ядерные силы зависят от спина, так что для двух нуклонов

$$\hat{U} = V_1(r)\hat{I} + V_2(r)\left(\hat{\hat{S}}_1, \hat{\hat{S}}_2\right).$$

Доказать, что в этом приближении суммарный спин сохраняется. Найти энергию взаимодействия нуклонов в синглетном и триплетном состояниях.

<u>Решение</u>. Оператор суммарного спина $\hat{\hat{S}} = \hat{\hat{S}}_1 + \hat{\hat{S}}_2$ возводим в квадрат и используем то, что $\hat{\hat{S}}^2 = \frac{3}{4}\hat{I}$:

$$\left(\hat{\hat{S}}_1, \hat{\hat{S}}_2\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{\hat{S}}^2 - \frac{3}{2}\hat{I}\right) \Rightarrow \boxed{\hat{U} = \left[V_1(r) - \frac{3}{4}V_2(r)\right]\hat{I} + \frac{1}{2}V_2(r)\hat{\hat{S}}^2}$$

Оператор $\hat{U}$ коммутирует с $\hat{\hat{S}}^2$ и $\hat{S}_z$, а, значит, суммарный спин и его проекция сохраняются.

В синглетном состоянии (спины антипараллельны) $S = 0$, и СЗ $\hat{\hat{S}}^2$ равно 0. В триплетном состоянии (спины параллельны) $S = 1$ и СЗ $\hat{\hat{S}}^2$ равно 1(1+1) = 2. Поэтому СЗ энергии взаимодействия в этих состояниях равны

$$V_S = V_1(r) - \frac{3}{4}V_2(r),\ V_T = V_1(r) + \frac{1}{4}V_2(r).$$

Они различны, а потому различны и свойства синглетного и триплетного состояния. В частности, в системе p-n существует связанное состояние с $S = 1$ (дейтерон), но не существует связанного состояния с $S = 0$.

21. Ядерные силы являются нецентральными и содержат член

$$\hat{U}_T = V(r)\left\{3\left(\hat{\hat{S}}_1, \hat{\bar{n}}\right)\left(\hat{\hat{S}}_2, \hat{\bar{n}}\right) - \left(\hat{\hat{S}}_1, \hat{\hat{S}}_2\right)\right\},\ \bar{n} \equiv \frac{\bar{r}}{r}.$$

Доказать, что это взаимодействие не сохраняет суммарный спин и $\hat{\bar{L}}^2$.

Решение.

$$\left(\hat{\hat{S}}, \bar{n}\right) = \left(\hat{\hat{S}}_1, \bar{n}\right) + \left(\hat{\hat{S}}_2, \bar{n}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\hat{\hat{S}}, \bar{n}\right)^2 = \left(\hat{\hat{S}}_1, \bar{n}\right)^2 + \left(\hat{\hat{S}}_2, \bar{n}\right)^2 + 2\left(\hat{\hat{S}}_1, \bar{n}\right)\left(\hat{\hat{S}}_2, \bar{n}\right) \\ \left(\hat{\hat{S}}_a, \bar{n}\right)^2 = \hat{S}_{az}^2 = \left(\frac{1}{2}\sigma_z\right)^2 = \frac{1}{4}\hat{I} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\hat{\hat{S}}_1, \bar{n}\right)\left(\hat{\hat{S}}_2, \bar{n}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\hat{\hat{S}}, \bar{n}\right)^2 - \frac{1}{2}\hat{I}\right\} \\ \left(\hat{\hat{S}}_1, \hat{\hat{S}}_2\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{\hat{S}}^2 - \frac{3}{2}\hat{I}\right) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{U}_T = \frac{1}{2}V(r)\left\{\left(\hat{\hat{S}}, \hat{\bar{n}}\right)^2 - \hat{\hat{S}}\right\}} \begin{array}{l} \Rightarrow \left[\hat{\hat{S}}^2, \hat{U}_T\right] = 0 \\ \Rightarrow \left[\hat{S}_z, \hat{U}_T\right] \neq 0\ \ (!) \end{array}$$

$\left[\hat{U}_T, \hat{\bar{L}}^2\right] \neq 0$ (!) из-за $\bar{n}$ - смешивание с разными L.