111. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + u(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + u(x),$$

и стационарное уравнение Шредингера записывается как

$$\hat{H}\psi_E = E\psi_E: \quad \psi''_E(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - u(x)\right]\psi_E(x) = 0.$$

Его следует решать с граничными условиями:

а) ограниченность на бесконечности

$$|\psi(x)| < \infty, \quad x \to \pm\infty;$$

б) непрерывность $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ в точке $x = a_i$, где $u(x)$ терпит конечные скачки

$$\psi(a_i - 0) = \psi(a_i + 0), \quad \psi'(a_i - 0) = \psi'(a_i + 0);$$

в) обращение $\psi(x)$ в нуль в точке $x = b_j$, где $u(x)$ обращается в бесконечность

$$\psi(b_j) = 0.$$

При заданных граничных условиях уравнение Шредингера имеет решение при выбранных значениях E, которые составляют спектр гамильтониана, как энергетический спектр частицы.

Терминология:

1а) Если множество $\{E\}$ дискретно, то спектр – дискретный.

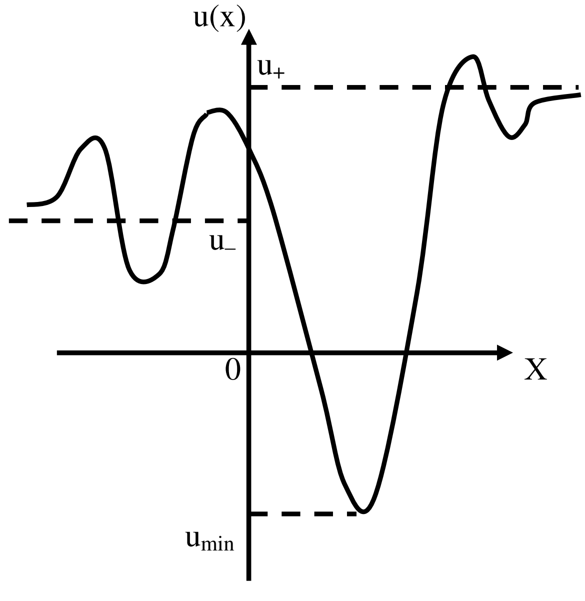
1б) Если множество $\{E\}$ континуально, то спектр – непрерывный.

2а) Если данному E отвечает одна ψ_E, то спектр – простой.

2б) Если данному E отвечает N линейно независимых $\psi_E^{(i)}$, то точка спектра N-кратно вырождена.

Точкам дискретного спектра отвечают квадратично интегрируемые волновые функции, точкам непрерывного спектра – ненормируемые решения.

Характер спектра полностью определяется видом потенциала. Достаточно общий случай – стабилизируюшийся потенциал.



(а) $-\infty < E < u_{min}$ -спектра нет (движение макрочастицы невозможно);

(б) $u_{min} < E < u_-$ - спектр простой дискретный (движение макрочастицы финитно);

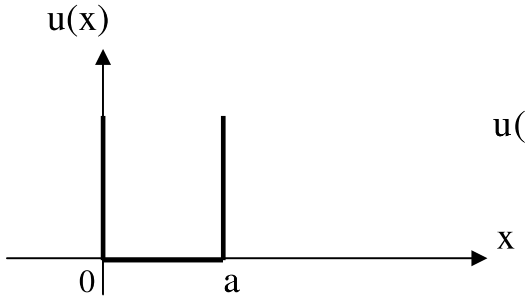
(в) $u_- < E < u_+$ - спектр простой непрерывный (движение макрочастицы инфинитно в одну сторону);

(г) $u_+ < E < \infty$ - спектр двойной непрерывный (движение макрочастицы инфинитно в обе стороны).

Случаи возрастающего в одну или в обе стороны потенциала получатся, если положить $u_+ = +\infty$, или $u_+ = u_- = \infty$.

1. Частица в бесконечной потенциальной яме.

Частица массы m движется в бесконечной прямоугольной потенциальной яме шириной a :



$$u(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \le x \le a \\ +\infty, & x > a \end{cases}.$$

1. Какова классическая модель движения?

   Ответ: движение по гладкой горизонтальной плоскости между двумя твердыми упругими стенками.

2. Выписать закон движения в классической задаче для первого периода.

   Ответ: $$x = \begin{cases} vt, & 0 < t < \dfrac{a}{v}; \\ a - v\left(t - \dfrac{a}{v}\right), & \dfrac{a}{v} < t < \dfrac{2a}{v}; \end{cases} \qquad v = \frac{|p|}{m} = \frac{\sqrt{2mE}}{m} = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

3. Выписать закон движения в классической задаче для произвольного момента времени.

   Ответ: $$x = \begin{cases} v\left(t - 2k\dfrac{a}{v}\right), & 2k\dfrac{a}{v} < t < (2k+1)\dfrac{a}{v} \\ a - v\left[t - (2k+1)\dfrac{a}{v}\right], & (2k+1)\dfrac{a}{v} < t < (2k+2)\dfrac{a}{v}; \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

4. Записать квантовый гамильтониан.

   Ответ: $$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + u(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + u(x),$$

5. Поставить задачу на отыскание энергетического спектра и волновых функций стационарных состояний.

   Ответ: $$\left.\begin{aligned} &\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x) = 0 \\ &\psi(0) = 0, \quad \psi(a) = 0 \end{aligned}\right\}.$$

6. Найти энергетический спектр частицы.

Решение: Из общей теории

$$E \ge 0: \quad \frac{2m}{\hbar^2} E \equiv K^2 \Rightarrow \psi''(x) + K^2\psi(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx; \quad \psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow \psi(x) = A\sin kx;$$

$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \sin ka = 0 \Rightarrow ka = \pi n \Rightarrow k^2 = \frac{\pi^2}{a^2} n^2 \Rightarrow \frac{2m}{\hbar^2} E_n = \frac{\pi^2}{a^2} \cdot n^2;$$

$$\boxed{E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \cdot n^2} \quad .$$

7. Найти нормированные волновые функции стационарных состояний.

$$1 = \int_0^a |\psi_n(x)|^2\, dx = |A_n|^2 \int_0^a \sin^2 \frac{\pi n}{a} x dx = |A_n|^2 \int_0^a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi n}{a} x\right) dx = |A_n|^2 \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A_n| = \sqrt{\frac{2}{a}} \Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot e^{i\alpha} \overset{(\alpha=0)}{\Rightarrow} A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}: \quad \boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi n}{a} x} \quad .$$

8. Какова кратность вырождения спектра? Какие значения пробегает квантовое число n ?

Решение.

Казалось бы, кратность вырождения каждого уровня равна 2, так как данному значению энергии отвечают два значения квантового числа n и $-n$, а значит две волновые функции: $\psi_n(x)$ и $\psi_{-n}(x)$. Однако,

$$\psi_{-n}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi(-n)}{a} x = -\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi n}{a} x = -\psi_n(x) \quad .$$

Как видно, эти функции отличаются только знаком, а потому они описывают одно и то же состояние. Таким образом, спектр в данной задаче является $\boxed{\text{простым}}$.

Особого рассмотрения требует случай $n = 0$, так как при $E = 0$ уравнение Шредингера имеет нестандартное решение:

$$\psi_0''(x) = 0 \Rightarrow \psi_0(x) = Ax + B$$

Условие $\psi(0) = 0$ дает $B = 0$, а условие $\psi_0(a) = 0$ – $A = 0$. Итак, в данном случае $\psi_0(x) = 0$, а значит значение $E = 0$ не отвечает никакому состоянию частицы.

Видим, что квантовое число n может принимать лишь значения из натурального ряда чисел: $\boxed{n = 1,2,3...}$.

9. Доказать непосредственным расчетом, что при $E < 0$ энергетический спектр отсутствует.

Решение.

$$E<0:\quad E=-|E|\Rightarrow \psi''(x)-\frac{2m}{\hbar^2}|E|\psi(x)=0:$$

$$\psi''(x)-\gamma^2\psi(x)=0,\quad \gamma=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m|E|}\quad :$$

$$\left.\begin{aligned}\psi(x)=Ae^{\gamma x}+Be^{-\gamma x}:\ \psi(0)=0\Rightarrow A+B=0\\ \psi(a)=0\Rightarrow Ae^{\gamma a}+Be^{-\gamma a}=0\end{aligned}\right\}\ B=-A\Rightarrow$$

$$A\left(e^{\gamma a}-e^{-\gamma a}\right)=0\Rightarrow e^{\gamma a}-e^{-\gamma a}=0\Rightarrow e^{2\gamma a}=1\Rightarrow 2\gamma a=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow \gamma=0\Rightarrow E=0,$ так что при E<0 спектра нет .

10. Чему равна координата в n - м стационарном состоянии?

Ответ: ничему – можно говорить лишь о вероятностном распределении значения координаты.

11. Построить вероятностные распределения значений координаты в трех первых стационарных состояниях.

12. Найти среднее значение координаты в n - м стационарном состоянии.

Решение:

$$\langle x\rangle_n=\left(\psi_n,\hat{X}\psi_n\right)=\frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2\frac{\pi n}{a}x\,dx=\frac{2}{a}\int_0^a\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\cos\frac{2\pi n}{a}x\right)dx=$$

$$=\frac{2}{a}\frac{x^2}{4}\Bigg|_0^a-\frac{1}{a}\int_0^a x\cos\frac{2\pi n}{a}x\,dx=\frac{2}{a}\frac{a^2}{4}-\frac{1}{a}\frac{a}{2\pi n}\int_0^a x\,d\left(\sin\frac{2\pi n}{a}x\right)=$$

$$=\frac{a}{2}-\frac{1}{2\pi n}x\cdot\sin\frac{2\pi n}{a}x\Bigg|_0^a+\frac{1}{2\pi n}\int_0^a\sin\frac{2\pi n}{a}x\,dx=\frac{a}{2}:\quad \boxed{\langle x\rangle_n=\frac{a}{2}}\ .$$

13. Найти среднее значение координаты классической частицы.

Решение.

$$\langle x\rangle_{кл}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=\frac{1}{\frac{2a}{v}}\left\{\int_0^{\frac{a}{v}}v\cdot t\,dt+\int_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}}\left[a-v\left(t-\frac{a}{v}\right)\right]dt\right\}=$$

$$=\frac{v}{2a}\left\{v\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{a}{v}}+2at\Big|_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}}-v\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}}\right\}=\frac{v}{2a}\left\{v\cdot\frac{a^2}{2v^2}+2a\cdot\frac{2a}{v}-2a\cdot\frac{a}{v}-\right.$$

$$\left.-v\cdot\frac{4a^2}{2v^2}+v\cdot\frac{a^2}{2v^2}\right\}=\frac{v}{2a}\cdot\frac{a^2}{v}=\frac{a}{2}:\quad\boxed{\langle x\rangle_{кл}=\frac{a}{2}}\ .$$

, в полном согласии с принципом соответствия.

14. Найти дисперсию координаты в n - м стационарном состоянии.

Решение:

$$D_n(x) = \left\langle x^2 \right\rangle_n - \left\langle x \right\rangle_n^2, \quad \left\langle x \right\rangle_n^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4};$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle_n = \left(\psi_n, X^2\psi_n\right) = \frac{2}{a}\int_0^a x^2 \sin^2\frac{\pi n}{a}x\,dx = \frac{1}{a}\int_0^a \left(x^2 - x^2\cos\frac{2\pi n}{a}x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{a}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^a - \frac{1}{a}\int_0^a x^2\cos\frac{2\pi n}{a}x\,dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{a^3}{3} - \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{2\pi n}\int_0^a x^2\cdot d\left(\sin\frac{2\pi n}{a}x\right) =$$

$$= \frac{a^2}{3} - \overbrace{\cancel{\frac{1}{2\pi n}x^2\sin\frac{2\pi n}{a}x\Bigg|_0^a}}^{=0} + \frac{1}{2\pi n}\cdot 2\cdot\int_0^a x\cdot\sin\frac{2\pi n}{a}x\,dx =$$

$$= \frac{a^2}{3} - \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{a}{2\pi n}\int_0^a x\,d\left(\cos\frac{2\pi n}{a}x\right) = \frac{a^2}{3} - \frac{a}{2\pi^2 n^2}x\cdot\cos\frac{2\pi n}{a}x\Bigg|_0^a +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2 n^2}\int_0^a \cos\frac{2\pi n}{a}x\,dx = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2 n^2}; \quad D_n(x) = \left(\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2 n^2}\right) - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{2\pi^2 n^2};$$

$$\boxed{D_n(x) = \frac{a^2}{12}\left(1 - \frac{6}{\pi^2 n^2}\right)}\ .$$

15. Найти дисперсию координаты классической частицы.

Решение:

$$D_{кл}(x) = \left\langle x^2 \right\rangle_{кл} - \left\langle x \right\rangle_{кл}^2, \quad \left\langle x \right\rangle_{кл}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4};$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle_{кл} = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{\frac{2a}{v}}\left\{\int_0^{\frac{a}{v}} (vt)^2\,dt + \int_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}} \left[a - v\left(t - \frac{a}{v}\right)\right]^2 dt\right\} =$$

$$= \frac{v}{2a}\left\{\int_0^{\frac{a}{v}} v^2t^2dt + \int_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}} 4a^2dt - \int_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}} 4avtdt + \int_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}} v^2t^2dt\right\} =$$

$$= \frac{v}{2a}\left\{v^2\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{a}{v}} + 4a^2t\Big|_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}} - 4av\frac{t^2}{2}\Bigg|_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}} + v^2\frac{t^3}{3}\Bigg|_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}}\right\} =$$

$$= \frac{v}{2a}\left\{\cancel{v^2\frac{a^3}{3v^3}} + \cancel{4a^2\frac{2a}{v}} - 4a^2\frac{a}{v} - \cancel{2av\frac{4a^2}{v^2}} + 2av\frac{a^2}{v^2} + v^2\frac{8a^2}{v^3} - \cancel{v^2\frac{a^2}{3v^3}}\right\} =$$

$$= \frac{v}{2a}\cdot\frac{2a^3}{3v} = \frac{a^3}{3}; \quad D_{кл}(x) = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4}: \quad \boxed{D_{кл}(x) = \frac{a^2}{12}}\ .$$

Принцип соответствия выполняется, так как $D_n(x) \to D_{кл}(x)$ при $n \to \infty$.

16. Частица находится в состоянии с минимальной энергией. Найти вероятность ее пребывания в интервале $\left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$.

Решение:

$$W_\psi\left(\frac{a}{3},\frac{2a}{3}\right)=\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\left|\psi_1(x)\right|^2dx=\frac{2}{a}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\sin^2\frac{\pi x}{a}dx=$$

$$=\frac{1}{a}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)dx=\frac{1}{a}\left\{x\Big|_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}-\frac{a}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{a}x\Big|_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{a}\left\{\frac{a}{3}-\frac{a}{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\ .\quad \boxed{W_\psi\left(\frac{a}{3},\frac{2a}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)\cong 0.61}\ .$$

17. Записывая $E_n=\dfrac{p_n^2}{2m}$, получим $p_n=\dfrac{\pi\hbar}{a}\cdot n$. Верно ли это?

Ответ: неверно, ибо ψ_n не есть собственная функция оператора $\hat{P}$, и импульс не имеет определенного значения, а к тому же он никогда не квантуется: в литературе же часто можно встретить противоположное (и неверное !) утверждение.

18. Найти вероятностное распределение значений импульса в n-м стационарном состоянии.

Ответ:

$$W_n(p)=\left|\left(\psi_p,\psi_n\right)\right|^2;\quad \left(\psi_p,\psi_n\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\int_0^a e^{-\frac{i}{\hbar}px}\cdot\sin\frac{\pi n}{a}xdx;$$

$$W_n(p)=\frac{4\pi a}{\hbar^2}\frac{n^2}{\left(\frac{p^2a^2}{\hbar^2}-\pi^2n^2\right)^2}\cdot\begin{cases}\cos^2\dfrac{pa}{2\hbar}, & n\text{ - нечётное}\\ \sin^2\dfrac{pa}{2\hbar}, & n\text{ - чётное}\end{cases}$$

Отсюда особенно четко видно, что импульс не имеет строго определенного значения в состоянии с определенной энергией.

19. Вычислить двумя разными способами среднее значение импульса в n-м стационарном состоянии.

Решение:

(а) Доказывали, что в любом стационарном состоянии дискретного спектра среднее значение импульса равно нулю.

(б) Докажем непосредственно:

$$\langle P\rangle_n=\left(\psi_n,\hat{P}\psi_n\right)=\int_0^a\psi_n^*(x)\hat{P}\psi_n(x)dx=-i\hbar\frac{2}{a}\int_0^a\sin\frac{\pi n}{a}x\cdot\frac{d}{dx}\left(\sin\frac{\pi n}{a}x\right)dx=$$

$$=-i\hbar\frac{2}{a}\frac{\pi n}{a}\int_0^a\sin\frac{\pi n}{a}x\cdot\cos\frac{\pi n}{a}xdx=-\frac{i\hbar}{a}\frac{\pi n}{a}\int_0^a\sin\frac{2\pi n}{a}xdx=0$$

$$\langle P\rangle_n=0$$

20. Докажем, что в любом состоянии с вещественной волновой функцией среднее значение импульса равно нулю.

Решение.

С одной стороны среднее значение любой наблюдаемой, а значит и импульса, вещественно. С другой стороны, в силу вещественности ψ и мнимости оператора $\hat{P}$ имеем:

$$\langle P\rangle_\psi=\left(\psi,\hat{P}\psi\right)=\int\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi(x)dx=-i\hbar\int\psi(x)\frac{d\psi(x)}{dx}dx\equiv iA\,,$$

т.е. среднее значение импульса должно быть чисто мнимым. Но вещественное число можно считать и мнимым тогда и только тогда, когда оно нуль.

Более непосредственное доказательство:

$$\langle P\rangle_\psi=-i\hbar\int\psi(x)\frac{d\psi}{dx}dx=-\frac{i\hbar}{2}\int\frac{d}{dx}\left[\psi(x)\right]^2dx=-\frac{i\hbar}{2}\psi^2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0\,,$$

где учтено, что на границах области интегрирования $\psi(x)$ должна обращаться в нуль.

21. Найти среднее значение импульса в классической задаче.

Решение.

$$P(t)=\begin{cases}|p|, & 0<t<\dfrac{a}{v}\\ -|p|, & \dfrac{a}{v}<t<\dfrac{2a}{v}\end{cases};\quad \langle P\rangle_{кл}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt=\frac{1}{\frac{2a}{v}}\left\{\int_0^{\frac{a}{v}}|p|dt+\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}}\{-|p|\}dt\right\}=\frac{v}{2a}\left\{|p|\cdot t\Big|_0^{\frac{a}{v}}-|p|\cdot t\Big|_{\frac{a}{v}}^{\frac{2a}{v}}\right\}=0\;:$$

$$\boxed{\langle P\rangle_{кл}=0}\,,$$

в полном согласии с принципом соответствия.

22. Найти дисперсию импульса в n - ом стационарном состоянии.

Решение:

$$D_n(P)=\langle P^2\rangle_n-\langle P\rangle_n^2,\;\langle P\rangle_n=0\Rightarrow D_n(P)=\langle P^2\rangle_n=\left(\psi_n,\hat{P}^2\psi_n\right)=$$

$$=2m\left(\psi_n,\frac{\hat{P}^2}{2m}\psi_n\right)=2m\left(\psi_n,\hat{H}\psi_n\right)=2mE_n\;:$$

$$\boxed{D_n(P)=2mE_n}\;.$$

Непосредственный расчет:

$$D_n(P)=\left(\psi_n,\hat{P}^2\psi_n\right)=-\hbar^2\cdot\frac{2}{a}\int_0^a\sin\frac{\pi n}{a}x\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin\frac{\pi n}{a}x\right)dx=$$

$$=+\hbar^2\cdot\frac{2}{a}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\cdot\int_0^a\sin^2\frac{\pi n}{a}xdx=\hbar^2\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi^2n^2}{a^2}\int_0^a\left(1-\cos\frac{2\pi n}{a}x\right)dx=$$

$$=\hbar^2\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi^2n^2}{a^2}\cdot a=\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}n^2=2m\cdot\left(\frac{\pi^2\cdot\hbar^2}{2ma^2}\cdot n^2\right)=2mE_n\;.$$

23. Вычислить дисперсию импульса в классической задаче.

Решение:

$$D_{кл}(P)=\langle P^2\rangle_{кл}-\langle P\rangle_{кл}^2=\langle P^2\rangle_{кл}=2m\left\langle\frac{P^2}{2m}\right\rangle_{кл}=$$

$$=2m\langle H\rangle_{кл}=2mE:\qquad\boxed{D_{кл}(P)=2mE}\,,$$

в полном согласии с принципом соответствия.

Более непосредственный расчет:

$$D_{кл}(P)=\left\langle P^2\right\rangle_{кл}=\frac{1}{T}\int_0^T p^2(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T |p|^2\,dt=|p|^2=p^2=2m\frac{p^2}{2m}=2mE\ .$$

24. Проверить справедливость соотношения неопределенностей Гейзенберга для n - го стационарного состояния.

Решение:

$$D_n(x)\cdot D_n(P)=\frac{a^2}{12}\left(1-\frac{6}{\pi^2 n^2}\right)\cdot 2mE_n=\frac{a^2}{12}\left(1-\frac{6}{\pi^2 n^2}\right)\cdot 2m\cdot\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2=$$

$$=\frac{\pi^2\hbar^2}{12}\cdot n^2\cdot\left(1-\frac{6}{\pi^2 n^2}\right)=\frac{\hbar^2}{4}\cdot\frac{\pi^2 n^2}{3}\left(1-\frac{6}{\pi^2 n^2}\right)=\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{\pi^2 n^2}{3}-2\right).$$

Самый «опасный» случай - $n = 1$, для которого имеем:

$$\frac{\pi^2}{3}-2>\pi-2>1\ ,$$

а значит, при любом n соотношение неопределенностей выполняется.

25. Может ли состояние частицы в яме описываться волновой функцией $\psi(x)=A\cdot x\cdot(a-x)$? Если может, то нормировать ее.

Решение:

Может, так как $\psi(x)$ удовлетворяет нужным граничным условиям, а функции $\psi_n(x)$ образуют полную систему в классе функций, для которых $\psi(0)=\psi(a)=0$, и рассматриваемое состояние можно представить в виде суперпозиции стационарный состояний. Нормируем: $1=\int_0^a|\psi|^2\,dx=A^2\int_0^a x^2(a-x)^2\,dx=A^2\int_0^a\left(a^2x^2-2ax^3+x^4\right)dx=$

$$=A^2\left(\frac{a^2x^3}{3}-\frac{ax^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^a=A^2\cdot a^5\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=A^2\cdot\frac{a^5}{30}\Rightarrow A^2=\frac{30}{a^5};\quad \boxed{\psi(x)=\sqrt{\frac{30}{a^5}}x(a-x)}\ .$$

26. Найти среднее значение энергии в состоянии $\psi(x)$. К какому собственному значению гамильтониана оно ближе всего?

Решение:

$$\left\langle H\right\rangle_\psi=\left(\psi,\hat{H}\psi\right)=\int_0^a\psi^*(x)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi(x)dx=-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{30}{a^5}\cdot\int_0^a x(a-x)\frac{d^2}{dx^2}\left[x(a-x)\right]dx=$$

$$=-\frac{30\hbar^2}{2ma^5}\int_0^a x(a-x)(-2)dx=\frac{30\hbar^2}{ma^5}\int_0^a\left(ax-x^2\right)dx=\frac{30\hbar^2}{ma^5}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{30\hbar^2}{ma^5}\cdot a^3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{30\hbar^2}{ma^2}\cdot\frac{1}{6}\ :\quad \boxed{\left\langle H\right\rangle_\psi=\frac{5\hbar^2}{ma^2}}\ .$$

Сравнивая с $E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\cdot n^2$ и учитывая, что $\frac{\pi^2}{2}\approx 5$,

заключаем, что $\left\langle H\right\rangle_\psi$ ближе всего к энергии $E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. Таким образом, можно ожидать, что $\psi(x)$ хорошо аппроксимирует волновую функцию $\psi_1(x)$ основного состояния.

27. Определить вероятность получить при измерении энергии в состоянии $\psi(x)$ её значение E_n . Вычислить соответствующие вероятности для трех первых уровней.

Решение: $(\psi_n,\psi)=\sqrt{\frac{30}{a^5}}\cdot\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^a x(a-x)\cdot\sin\frac{\pi n}{a}xdx=\frac{\sqrt{60}}{a^2}\int_0^a x\cdot\sin\frac{\pi n}{a}xdx-$

$$-\frac{\sqrt{60}}{a^3}\int_0^a x^2\sin\frac{\pi n}{a}xdx=-\frac{\sqrt{60}\cdot a}{a^2\cdot\pi\cdot n}\cdot\int_0^a xd\left(\cos\frac{\pi n}{a}x\right)+\frac{\sqrt{60}\cdot a}{a^2\cdot\pi n}\cdot\int_0^a x^2d\left(\cos\frac{\pi n}{a}x\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{60}}{\pi na}\cdot x\cdot\cos\frac{\pi n}{a}x\Big|_0^a+\frac{\sqrt{60}}{\pi na}\int_0^a\cos\frac{\pi n}{a}xdx+\frac{\sqrt{60}}{\pi na^2}x^2\cos\frac{\pi n}{a}x\Big|_0^a-$$

$$-\frac{2\sqrt{60}}{\pi na^2}\cdot\int_0^a x\cdot\cos\frac{\pi n}{a}xdx=-\cancel{\frac{\sqrt{60}}{\pi n}\cos\pi n}+\overbrace{\cancel{\frac{\sqrt{60}}{\pi na}\cdot\frac{a}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{a}x\Big|_0^a}}^{=0}+\cancel{\frac{\sqrt{60}}{\pi n}\cos\pi n}-$$

$$-\frac{\sqrt{240}}{\pi^2n^2a}\cdot\frac{a}{\pi n}\int_0^a xd\left(\sin\frac{\pi n}{a}x\right)=$$

$$=-\overbrace{\cancel{\frac{\sqrt{240}}{\pi^2\cdot n^2\cdot a}x\cdot\sin\frac{\pi n}{a}x\Big|_0^a}}^{=0}+\frac{\sqrt{240}}{\pi^2n^2a}\cdot\int_0^a\sin\frac{\pi n}{a}xdx=-\frac{\sqrt{240}}{\pi^2n^2a}\cdot\frac{a}{\pi n}\cdot\cos\frac{\pi n}{a}x\Big|_0^a=$$

$$=\frac{\sqrt{240}}{\pi^3n^3}\left[1-(-1)^n\right]:\ \boxed{W_\psi(E_n)=\left|(\psi_n,\psi)\right|^2=\frac{240}{\pi^6n^6}\left[1-(-1)^n\right]^2}\ .$$

$$\begin{cases}W_\psi(E_1)\cong 0{,}9986\\ W_\psi(E_2)=0\\ W_\psi(E_3)\cong 0{,}0013\end{cases}\qquad W_\psi(E_n)=\begin{cases}\dfrac{960}{\pi^6n^6}, & n\text{ - нечетное}\\ 0, & n\text{ - четное}\end{cases}$$

Таким образом, функция $\psi(x)$ прекрасно аппроксимирует волновую функцию основного состояния. Вероятность же пребывания частицы в состоянии ψ на двух первых уровнях равна 0,9999, и практически, не отличается от 1.

28. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$.

Решение:

Так как сумма всех вероятностей равна 1, то имеем:

$$1=\sum_n W_\psi(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{240}{\pi^6n^6}\cdot\left[1-(-1)^n\right]^2=\sum_{n-\text{неч.}}\frac{960}{\pi^6n^6}=\sum_{к=0}^{\infty}\frac{960}{\pi^6(2k+1)^6}:$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}}\ .$$

29. Найти среднее значение координаты в состоянии $\psi(x)$

Решение:

$$\langle x\rangle_\psi = \left(\psi, \hat{X}\psi\right) = \int x\left|\psi(x)\right|^2 dx = \frac{30}{a^5}\int_0^a x^3\left(a-x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{30}{a^5}\int_0^a \left(a^2x^3 - 2ax^4 + x^5\right)dx = \frac{30}{a^5}\left(\frac{a^2x^4}{4} - \frac{2ax^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{30}{a^5}\cdot a^6\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) = 30a\cdot\frac{1}{60}: \quad \boxed{\langle x\rangle_\psi = \frac{a}{2}} \ .$$

30. Найти среднее значение импульса в состоянии $\psi(x)$

Решение:

Так как $\psi(x)$ - вещественна, то $\langle P\rangle_\psi = 0$.

31. Какие физические величины сохраняются в данной задаче?

Ответ:

В одномерном случае имеет смысл говорить только об энергии и импульсе (и четности); энергия сохраняется, т.к. $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$, а импульс не сохраняется, ибо $\hat{P}$ не коммутирует с полным $\hat{H}$ (четность обсудим позже).

32.Каков полный набор наблюдаемых (квантовых чисел) системы?

Ответ:

Он включает одну наблюдаемую (квантовое число) – энергию $\hat{H}$ (число n); или собственное значение E_n (число n) однозначно задает базисное состояние, так как спектр простой.

33. Сохраняется ли четность в данной задаче?

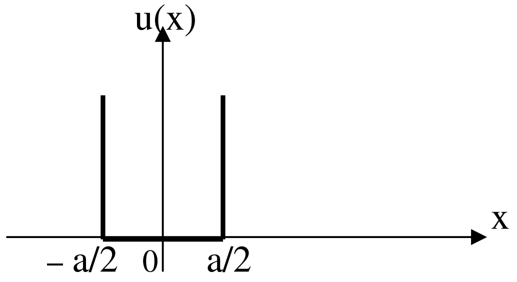
Ответ:

$u(x)$ не есть четная функция координат, а потому оператор $\hat{J}$ не коммутирует с $\hat{H}$, и значит четность не должна сохраняться: правда, все волновые функции стационарных состояний оказались нечетными, но это лишь формально: на самом деле $\psi_n(x) = 0$ при $x < 0$ и никакой четности у них нет.

34. Можно ли в данной задаче сделать четность хорошим квантовым числом?

Ответ:

Можно, помещая начало координат в центр ямы, т.е. делая замену переменных $x \to x - \frac{a}{2}$, после которой $u(x)$ станет четной функцией; волновые функции преобразуются так:



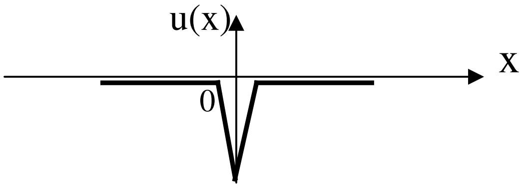
$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n}{a}x\to\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi n}{a}x-\frac{\pi n}{2}\right)=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi n}{a}x, & n\text{ - нечетн.}\\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n}{a}x, & n\text{ - четн.}\end{cases}$$

Так что $\eta=+1$ при $n = 2k–1$, а $\eta=-1$ при $n = 2k$, причем четность сохраняется.

2. Частица в дельта – образной потенциальной яме.

Частица массы m движется в дельта – образной потенциальной яме с интенсивностью взаимодействия α : $u(x)=-\alpha\delta(x)$ $/\,\alpha>0\,/$



1.Пусть $u(x)=\tilde{u}(x)-\alpha\delta(x)$, где $\tilde{u}(x)$ - плавная функция. Определить поведение волновой функции в окрестности точки $x=x_0$.

Решение: уравнение Шредингера:

$$\psi''(x)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-\tilde{u}(x)+\alpha\delta(x-x_0)\right]\psi(x)=0\ .$$

Если $\psi(x)$ разрывна при $x=x_0$, то $\psi'(x)$ имеет особенность типа $\delta(x-x_0)$, а $\psi''(x)$ - типа $\delta'(x-x_0)$. Этой особенности нечем скомпенсироваться, чтобы в правой части получился нуль, а потому $\psi(x)$ - непрерывна при $x=x_0$. Если производная $\psi'(x)$ разрывна, то $\psi''(x)$ получит особенность типа $\delta(x-x_0)$, которая может скомпенсироваться членом с $\delta(x-x_0)$ в потенциальной энергии, а потому $\psi'(x)$ должна иметь скачок при $x=x_0$. Чтобы найти его, проинтегрируем уравнение Шредингера по малому интервалу, включающему точку x_0 :

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\psi''(x)dx+\frac{2m}{\hbar^2}E\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\psi(x)dx-\frac{2m}{\hbar^2}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\tilde{u}(x)\psi(x)dx+\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)\psi(x)dx=0$$

$$\psi'(x)\Big|_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}+0+0+\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(x_0)=0:$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\psi(x_0-0)=\psi(x_0+0)\\&\psi'(x_0+0)-\psi'(x_0-0)=-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(x_0)\end{aligned}}\ .$$

2. Найти энергетический спектр частицы в исходной задаче.

Решение:

Полупрямая $0 < E < +\infty$ заполнена непрерывным двукратно вырожденным спектром. Найдем энергии связанных состояний в области $-\infty < E < 0$

Уравнение Шредингера

$$\psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\alpha\delta(x)\psi(x) = 0$$

при $x \neq 0$ имеет общее решение

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-\gamma x} + Ce^{\gamma x}, & x > 0 \\ Be^{\gamma x} + De^{-\gamma x}, & x < 0 \end{cases}; \quad \boxed{\gamma = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}} \;.$$

Из условия ограниченности при $x \to \pm\infty$ имеем C = 0 и D = 0, так что

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-\gamma x}, & x > 0 \\ Be^{\gamma x}, & x < 0 \;. \end{cases}$$

Условия сшивки при $x = 0$ дают:

$$\psi(-0) = \psi(+0) \Rightarrow A = B: \qquad \psi(x) = \begin{cases} Ae^{-\gamma x}, & x > 0 \\ Ae^{\gamma x}, & x < 0 \end{cases};$$

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0) \Rightarrow -\gamma A - \gamma A = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}A \Rightarrow \gamma =$$

$$= \frac{m\alpha}{\hbar^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} = \frac{m\alpha}{\hbar^2} \Rightarrow -\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{m^2\alpha^2}{\hbar^4} \;.$$

Таким образом, имеется всего один уровень с отрицательной энергией

$$\boxed{E = -\frac{m}{2\hbar^2}\alpha^2} \;.$$

3. Найти нормированную волновую функцию стационарного состояния.

Решение:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = |A|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{2\gamma x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2\gamma x}dx \right\} = 2|A|^2 \int_{0}^{\infty} e^{-2\gamma x}dx =$$

$$= -|A|^2 \frac{1}{\gamma} e^{-2\gamma x}\Big|_0^{\infty} = |A|^2 \frac{1}{\gamma} \Rightarrow |A|^2 = \gamma \Rightarrow A = \sqrt{\gamma}e^{i\beta} \overset{\beta=0}{\Rightarrow}$$

$$A = \sqrt{\gamma} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} \;:\; \boxed{\psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}\left\{\begin{matrix} e^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}x}, & x > 0 \\ e^{\frac{m\alpha}{\hbar^2}x}, & x < 0 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{m\alpha}{\hbar^2}} \cdot e^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}|x|}} \;.$$

Волновая функция (и плотность вероятности) убывают с ростом $|x|$ по экспоненциальному закону, и частица локализована вблизи точки $x = 0$.

4. Каковы размеры области локализации частицы? Вычислить вероятность ее пребывания в интервале $\left(-\frac{\hbar^2}{2m\alpha}, \frac{\hbar^2}{2m\alpha}\right)$ и в интервале $\left(-\frac{\hbar^2}{m\alpha}, \frac{\hbar^2}{m\alpha}\right)$?

Решение:

Плотность вероятности $W_\psi(x) = |\psi(x)|^2 = \dfrac{m\alpha}{\hbar^2} e^{-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}|x|}$

убывает в e раз на расстоянии

$$R = \frac{\hbar^2}{2m\alpha}$$

от начала координат, а потому размеры области локализации

$$\boxed{L = 2R = \frac{\hbar^2}{m\alpha}}\ .$$

Вычисляем вероятность пребывания в интервале (-a, a) :

$$W_\psi(-a,a) = 2W_\psi(0,a) = 2\int_0^a |\psi(x)|^2 dx = 2\frac{m\alpha}{\hbar^2}\int_0^a e^{-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}x} dx =$$

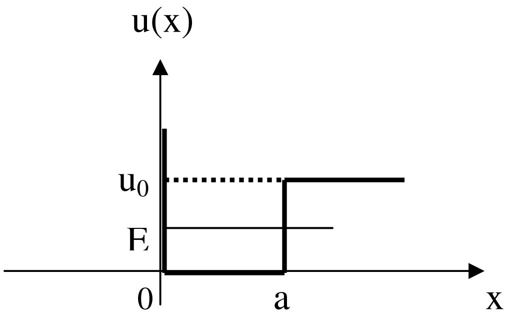
$$= -e^{-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}x}\Big|_0^a = 1 - e^{-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}a};$$

$$a = \frac{\hbar^2}{2m\alpha}: \quad W_1 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{W_1 \approx 0,64}$$

$$a = \frac{\hbar^2}{m\alpha}: \quad W_2 = 1 - e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2} \Rightarrow \boxed{W_2 \approx 0,87}\ .$$

3.Частица в полубесконечной потенциальной яме

Частица массы m движется в поле с потенциальной энергией, изображенной на рисунке



$$u(x) = \begin{cases} +\infty\ , & -\infty < x < 0 \\ 0\ , & 0 \le x \le a \\ u_0\ , & a < x < \infty\ . \end{cases}$$

1. Найти дискретные энергетические уровни частицы.

Решение:

Согласно общей теории, при $E < 0$ спектра нет, при $0 < E < u_0$ спектр дискретный и простой, при $E > u_0$ спектр непрерывный и простой. Рассматриваем вторую область. Уравнение Шредингера – общее решение:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\begin{Bmatrix} E, & 0<x<a \\ E-u_0, & x>a \end{Bmatrix}\psi = 0; \quad \psi'' + \begin{Bmatrix} k^2\psi \\ -\gamma^2\psi \end{Bmatrix} = 0; \quad \psi = \left\{ \begin{array}{l|l} A\sin kx + B\cos kx & k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x} & k = \dfrac{\sqrt{2m(u_0 - E)}}{\hbar} \end{array} \right. .$$

Учитываем граничные условия:

$$\left.\begin{array}{l} \psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \psi(+\infty) < +\infty \Rightarrow D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} A\sin kx, & 0 < x < a \\ C\cdot e^{-\gamma x}, & a < x < +\infty \end{cases};$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi(a-0) = \psi(a+0) \\ \psi'(a-0) = \psi'(a+0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A\sin ka = Ce^{-\gamma a} \\ kA\cos ka = -\gamma Ce^{-\gamma a} \end{array}\right\} \downarrow : \ \mathrm{tg}ka = -\frac{k}{\gamma} .$$

Уравнение следует решать графически, но в таком виде оно не совсем удобно: входит тангенс и (главное) справа стоит дробно-иррациональная функция энергии. Перейдем к синусу:

$$\mathrm{ctg}ka = -\frac{\gamma}{k} \Rightarrow \mathrm{ctg}^2 ka = \frac{\gamma^2}{k^2} = \frac{u_0 - E}{E} = \frac{u_0}{E} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 ka} - 1 = \frac{u_0}{E} - 1 \Rightarrow$$

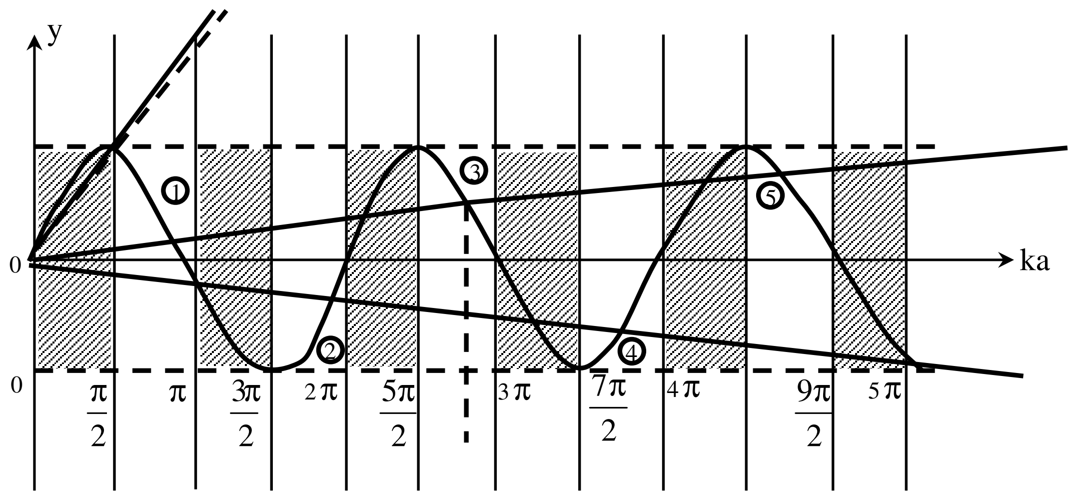
$$\sin^2 ka = \frac{E}{u_0} \equiv \frac{2mE}{\hbar^2} a^2 \cdot \frac{\hbar^2}{2ma^2} \cdot \frac{1}{u_0} = (ka)^2 \cdot \frac{\hbar^2}{2ma^2 u_0}$$

$$\sin(ka) = \pm\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2 u_0}} \cdot (ka) .$$

При этом, так как $\mathrm{tg}(ka) < 0$, величина ka должна лежать в четных квадрантах. Решаем графически, отыскивая точки пересечения графиков

$$y_1 = \pm\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2 u_0}} \cdot (ka) , \ y_2 = \sin(ka) \ \ [\mathrm{tg}ka < 0, \ ka > 0] .$$

Картинка имеет следующий вид:



Точки пересечения в незаштрихованных областях определяют значения $(ka)_n$, а значит и E_n . На рисунке поместилось пять точек пересечения, отвечающих пяти энергетическим уровням.

2. Доказать прямым расчетом, что при E < 0 спектр отсутствует.
Решение:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\begin{Bmatrix} E \\ E-u_0 \end{Bmatrix}\psi = 0 \overset{\varepsilon=-|E|}{\Rightarrow} \psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\begin{Bmatrix} -\varepsilon \\ -\varepsilon-u_0 \end{Bmatrix}\psi = 0 \underset{\gamma_2=\frac{\sqrt{2m(\varepsilon+u_0)}}{\hbar}}{\overset{\gamma_1=\frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}}{\Rightarrow}} \psi'' + \begin{Bmatrix} -\gamma_1^2\psi \\ -\gamma_2^2\psi \end{Bmatrix} = 0:$$

$$\psi = \begin{cases} A\,\mathrm{sh}\gamma_1 x + B\,\mathrm{ch}\gamma_1 x, & 0<x<a \\ Ce^{-\gamma_2 x} + De^{+\gamma_2 x}, & a<x<\infty \end{cases};$$

$$\left.\begin{aligned} \psi(a-0) &= \psi(a+0) \\ \psi'(a-0) &= \psi'(a+0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A\,\mathrm{sh}\gamma_1 a &= C\cdot e^{-\gamma_2 a} \\ \gamma_1 A\,\mathrm{ch}\gamma_1 a &= -\gamma_2 C\cdot e^{-\gamma_2 a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathrm{th}(\gamma_1 a) = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$$

Так как γ_1 и γ_2 - строго положительны, то слева стоит положительная величина, а справа – отрицательная. Поэтому уравнение не имеет решения ни при одном значении ε, а значит и ни при одном значении E.

2. Найти условия существования точно одного энергетического уровня.
Решение:
Первый уровень появляется в случае, отвечающем на рисунке полуштриховой прямой, точка пересечения которой с синусоидой имеет абсциссу $ka = \frac{\pi}{2}$. Отсюда получаем условие существования хотя бы одного уровня:

$$\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2u_0}}\cdot\frac{\pi}{2} \le 1 \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2ma^2u_0}\cdot\frac{\pi^2}{4} \le 1 \Rightarrow a^2u_0 \ge \frac{\pi^2\hbar^2}{8m}$$

Второй уровень появляется, когда нижняя прямая пересекает синусоиду в точке $ka = \frac{3\pi}{2}$. Поэтому условие отсутствия второго уровня гласит:

$$-\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2u_0}}\cdot\frac{3\pi}{2} < -1 \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2ma^2u_0}\cdot\frac{9\pi^2}{4} > 1 \Rightarrow a^2u_0 < \frac{9\pi^2\hbar^2}{8m}.$$

Объединяя неравенства, получим искомый ответ:

$$\frac{1}{8}\frac{\pi^2\hbar^2}{m} \le a^2u_0 < \frac{9}{8}\frac{\pi^2\hbar^2}{m}$$

Если яма очень узкая и мелкая, то в ней не будет ни одного уровня.

4. При каком значении a^2u_0 появляется n - й энергетический уровень? Сколько уровней у частицы в яме с $a^2u_0 = 75\hbar^2/m$?
Решение:
Уровень с номером n появляется, если одна из прямых пересекает синусоиду в точке с абсциссой $ka = (2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2}\right\}=\pm\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2u_0}}(2n-1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow 1=\frac{\hbar^2}{2ma^2u_0}(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{a^2u_0=(2n-1)^2\frac{\pi^2\hbar^2}{8m}}.$$

$$\frac{75\hbar^2}{m}=(2n-1)^2\frac{\pi^2\hbar^2}{8m}\Rightarrow(2n-1)^2=\frac{8\cdot 75}{\pi^2}\Rightarrow 2n-1=\frac{10\sqrt{6}}{\pi}\cong 7{,}4\Rightarrow n\cong 4{,}2\Rightarrow\boxed{N=4}$$

5. Известно, что у частицы один уровень, причем его энергия $E=\frac{u_0}{2}$.

Найти вероятность пребывания частицы вне ямы.

Решение:

Сначала используем результаты решения задачи 1:

$$W=\frac{\int\limits_0^\infty|\psi(x)|^2\,dx}{\int\limits_0^a|\psi(x)|^2\,dx+\int\limits_a^\infty|\psi(x)|^2\,dx}=\frac{C^2\cdot\int\limits_0^\infty e^{-2\gamma x}dx}{A^2\int\limits_0^a\sin^2 kadx+C^2\int\limits_a^\infty e^{-2\gamma x}dx}=$$

$$=\frac{C^2\cdot\frac{1}{2\gamma}\cdot e^{-2\gamma a}}{A^2\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2k}\sin 2ka\right)+C^2\cdot\frac{1}{2\gamma}e^{-2\gamma a}}=\frac{C^2e^{-2\gamma a}}{A^2\frac{\gamma}{k}(ka-\sin 2ka)+C^2e^{-2\gamma a}};$$

$$A\sin ka=Ce^{-\gamma a}\Rightarrow C=A\cdot e^{\gamma a}\sin ka:$$

$$W=\frac{A^2\cdot e^{2\gamma a}\cdot\sin^2 ka\cdot e^{-2\gamma a}}{A^2\frac{\gamma}{k}(ka-\sin 2ka)+A^2e^{-2\gamma a}\cdot e^{2\gamma a}\cdot\sin^2 ka}=$$

$$=\frac{\sin^2 ka}{\sin^2 ka+\frac{\gamma}{k}(ka-\sin 2ka)};\quad k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}=\frac{\sqrt{mu_0}}{\hbar};\quad \gamma=\frac{\sqrt{2m(u_0-E)}}{\hbar}=\frac{\sqrt{mu_0}}{\hbar}=k:$$

$$W=\frac{\sin^2 ka}{\sin^2 ka+\frac{\gamma}{k}(ka-\sin 2ka)}.$$

На последнем этапе использовано условие $E=\frac{u_0}{2}$. Используем теперь его более полно, учитывая, что уровень всего один:

$$ka\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right);\quad ka=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a=\frac{\sqrt{mu_0}}{\hbar}a=\sqrt{\frac{ma^2u_0}{\hbar^2}};$$

$$\sin(ka)=\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2u_0}}(ka)\Rightarrow \sin(ka)=\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2u_0}}\cdot\sqrt{\frac{ma^2u_0}{\hbar^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

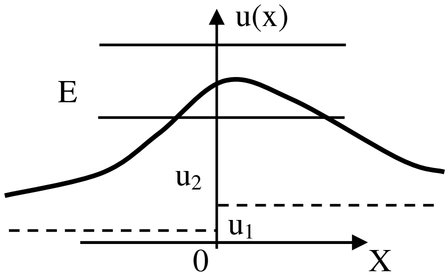
$$ka=\frac{3\pi}{4};\quad \sin^2 ka=\frac{1}{2},\ \sin 2ka=1\Rightarrow$$

$$W=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\left(\frac{3\pi}{4}+1\right)}=\frac{1}{1+2\left(\frac{3\pi}{4}+1\right)}=\frac{1}{1+2\left(\frac{3\pi}{4}+1\right)}=\frac{1}{3\left(1+\frac{\pi}{2}\right)};$$

$$\boxed{W\cong 0{,}13}\ .$$

4.Барьерные эффекты.

Пусть потенциальная энергия имеет вид, изображенный на рисунке, и из $-\infty$
вправо движется частица с $E>u_2$. Ищем решение следующей задачи:



$$\psi''(x)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-u(x)\right]\psi(x)=0$$

$$\psi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}Ce^{ik_2x},\quad k_2=\frac{\sqrt{2m(E-u_2)}}{\hbar}$$

Асимптотика решения при $x\to-\infty$ будет такой

$$\psi(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x},\quad k_1=\frac{\sqrt{2m(E-u_1)}}{\hbar}.$$

Отсюда находим падающий, прошедший и отраженный токи:

$$j_{пад}=\frac{\hbar k_1}{m}|A|^2,\ \ j_{отр}=-\frac{\hbar k_1}{m}|B|^2,\ \ j_{прош.}=\frac{\hbar k_2}{m}|C|^2.$$

Тогда коэффициенты прохождения и отражения будут вычисляться как

$$T\equiv\frac{|j_{прош.}|}{|j_{пад}|}=\frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{|C|^2}{|A|^2},\quad R\equiv\frac{|j_{отр}|}{|j_{пад}|}=\frac{|B|^2}{|A|^2}\ .$$

Достаточно найти один из них, так как

$$R+T=1$$

1. Доказать последнее утверждение.

Решение:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial j}{\partial x}=0\Rightarrow j=Const\Rightarrow j_{-\infty}=j_{+\infty}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow j_{пад}+j_{отр}=j_{прош.}\Rightarrow|j_{пад}|-|j_{отр}|\Rightarrow 1-\frac{|j_{отр}|}{|j_{пад}|}=\frac{|j_{прош}|}{|j_{пад}|}\Rightarrow 1-R=T$$

2. Доказать, что при $E<u_2$ частица претерпевает полное отражение.

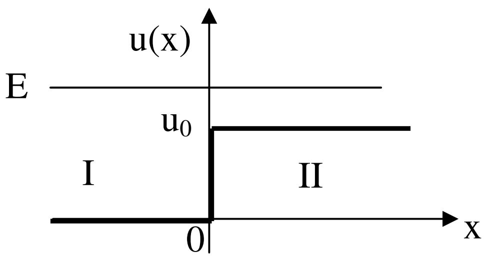
Решение:

Асимптотика ограниченного решения при $x\to+\infty$ имеет вид

$$\psi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}Ce^{-\gamma x},\quad \gamma=\frac{\sqrt{2m(u_2-E)}}{\hbar}\ ,$$

т.е. $\psi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Поэтому $j_{прош} = j_{+\infty} = 0$, а значит T=0, и, как следствие, R=1.

3. Вычислить коэффициент надбарьерного отражения от потенциальной ступеньки:



$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ u_0, & x > 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_I'' + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_I = 0 \\ &\psi_{II}'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-u_0)\psi_{II} = 0 \\ &\psi_{II}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} Ce^{ik_{II}x} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\psi_I(x) = Ae^{ik_Ix} + Be^{-ik_Ix}, k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ &\psi_{II}(x) = C\cdot e^{ik_{II}x} + De^{-ik_{II}x}, k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E-u_0)}}{\hbar}; \\ &\psi_{II}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} Ce^{ik_{II}x} \Rightarrow D = 0 \end{aligned}$$

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0), \quad \psi_I'(0) = \psi_{II}'(0) \; \Big| \; \psi_I(x) = Ae^{ik_Ix} + Be^{-ik_Ix}, \; \psi_{II}(x) = Ce^{ik_{II}x}.$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) \\ \psi_I'(0) = \psi_{II}'(0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A + B = C \\ ik_I(A-B) = ik_{II}C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A + B = C \\ A - B = \frac{k_{II}}{k_I}C \end{aligned}\right\} 2A = \left(1 + \frac{k_{II}}{k_I}\right)C = \frac{k_I + k_{II}}{k_I}\cdot C$$

$$\Rightarrow C = \frac{2k_I}{k_I + k_{II}}A \Rightarrow |C|^2 = \frac{4k_I^2}{(k_I + k_{II})^2}|A|^2 : \; T = \frac{k_{II}}{k_I}\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{k_{II}}{k_I}\cdot\frac{4k_I^2}{(k_I + k_{II})^2} = \frac{4k_Ik_{II}}{(k_I + k_{II})^2};$$

$$R = 1 - T = 1 - \frac{4k_Ik_{II}}{(k_I + k_{II})^2} = \frac{(k_I + k_{II})^2 - 4k_I\cdot k_{II}}{(k_I + k_{II})^2} = \frac{(k_I - k_{II})^2}{(k_I + k_{II})^2}:$$

$$\boxed{R = \left(\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E-u_0} - \sqrt{E}}{\sqrt{E-u_0} + \sqrt{E}}\right)^2 = \frac{u_0^2}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E-u_0}\right)^4}}\,.$$

При E $\to u_0$ коэффициент отражения стремится к 1 по закону

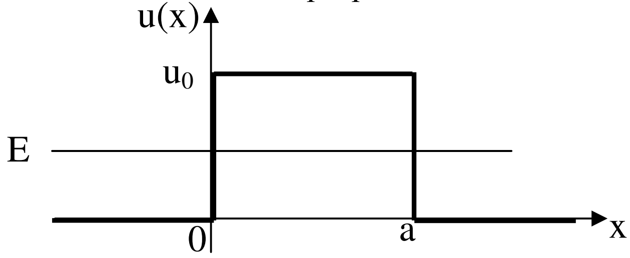
$$R \underset{E\to u_0}{\sim} 1 - 4\sqrt{\frac{E-u_0}{u_0}} \to 1$$

(произведено разложение в ряд Тейлора), а при E $\to \infty$ коэффициент отражения стремится к нулю по закону обратного квадрата:

$$R \underset{E\to\infty}{\sim} \frac{u_0^2}{16E^2} \to 0$$

Наличие надбарьерного отражения затрудняет, в частности, термоэлектронную эмиссию из металла.

4. Вычислить коэффициент туннельного прохождения частицы через потенциальный барьер



$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ u_0, & 0 \le x \le a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{T = \dfrac{4k^2\gamma^2}{4k^2\gamma^2 + \left(k^2+\gamma^2\right)^2 \operatorname{sh}^2\gamma a}}$; $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\gamma = \dfrac{\sqrt{2m(u_0 - E)}}{\hbar}$

5. Вспомнить примеры проявления и применения туннельного эффекта.
Ответ: холодная эмиссия, контактная разность потенциалов, альфа-распад.

6. Вычислить коэффициент надбарьерного прохождения в задаче 4.

Решение: достаточно сделать замену $\gamma = ik_1$, где $k_1 = \dfrac{\sqrt{2m(E - u_0)}}{\hbar}$:

$$T' = \frac{4k^2k_1^2}{4k^2k_1^2 + \left(k_1^2 - k^2\right)^2 \sin k_1 a}\ .$$

Когда $\sin^2 k_1 a = 0$, барьер становится прозрачным: $T' = 1$.
Это происходит при

$$k_1 a = \pi n \Rightarrow a = n\cdot\frac{\pi}{k_1} = n\cdot\frac{1}{2}\frac{2\pi}{k_1} = n\frac{\lambda_1}{2},$$

т.е. когда на ширине барьера укладывается целое число полуволн де Бройля – возникает резонансное явление.

7. Вычислить коэффициент прохождения частицы над прямоугольной потенциальной ямой глубиной $-u_0$ и шириной a .

Решение: Достаточно в предыдущей формуле заменить u_0 на $-u_0$:

$$T'' = \frac{4k^2\cdot k_2^2}{4k^2\cdot k_2^2 + \left(k_2^2 - k^2\right)^2 \sin^2 k_2 a}\ ,\quad k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E+u_0)}\ .$$

Условие полной прозрачности имеет прежний вид с заменой k_1 на k_2 :

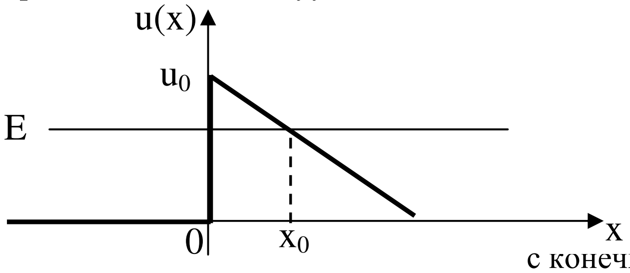
$$k_2 a = \pi n \Rightarrow k_2^2 a^2 = \pi^2 n^2 \Rightarrow \frac{2m(E+u_0)}{\hbar^2} a^2 = \pi^2 n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - u_0\ .$$

Эти значения энергии частицы называются ее виртуальными или резонансными уровнями. Их положение совпадает (с точностью до начала отсчета) с положением уровней в бесконечной яме шириной a .

7. Найти зависимость тока холодной эмиссии от величины внешнего электрического поля.

<u>Решение</u>: Холодная эмиссия возникает при включении сильного внешнего однородного электрического поля ε, благодаря которому ступенька u_0 на границе металл – вакуум заменяется потенциальным барьером



$$u(x) = u_0 - e\varepsilon x$$

с конечной шириной. Через этот барьер электроны диффундируют путем туннельного перехода. Ясно. Что сила тока пропорциональна коэффициенту прохождения T., который будем вычислять в квазиклассическом приближении

$$T \approx e^{-\frac{2}{\hbar}\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m[u(x)-E]}dx}$$

Имеем: $I = AT \approx A\cdot e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int\limits_{0}^{x_0}\sqrt{u_0 - e\varepsilon x - E}dx} \equiv A\cdot e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}J}$:

$$E = u_0 - e\varepsilon x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{u_0 - E}{e\varepsilon};$$

$$I \equiv \int\limits_0^{x_0}\sqrt{u_0 - e\varepsilon x - E}dx = -\frac{2}{3e\varepsilon}\left(u_0 - e\varepsilon x - E\right)^{3/2}\Big|_0^{x_0} =$$

$$= -\frac{2}{3e\varepsilon}\left(u_0 - e\varepsilon x - E\right)^{3/2} + \frac{2}{3e\varepsilon}\left(u_0 - E\right)^{3/2} = \frac{2}{3e\varepsilon}\left(u_0 - E\right)^{3/2} \;;$$

$$\alpha \equiv \frac{4\sqrt{m}\left(u_0 - E\right)^{3/2}}{3e\hbar};\quad I = A\cdot e^{\frac{-4\sqrt{m}(u_0 - E)^{3/2}}{3e\hbar\varepsilon}};\quad \boxed{I = A\cdot e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}}},$$

что находится в хорошем согласии с опытными данными. Конечно, при точном расчете нужно учесть распределение электронов по энергиям.