I. ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ МИКРООБЪЕКТОВ.

Поведение микрообъектов отличают от классического следующие особенности:
1. корпускулярно-волновой дуализм,
2. дискретность состояний микросистем,
3. ограничения на точность измерения физических величин,
4. вероятностный характер закономерностей.

1. Корпускулярно-волновой дуализм.

Согласно гипотезе Эйнштейна, свет состоит из фотонов, которые обладают не только волновыми свойствами ω и $\boldsymbol{\kappa}$ ($\lambda = 2\pi/\kappa$), но и корпускулярными свойствами E и **p** , причем

$$E = \hbar \cdot \omega, \quad \mathbf{p} = \hbar \cdot \boldsymbol{\kappa}$$

Согласно гипотезе де Бройля, частицы обладают не только корпускулярными свойствами E и **p ,** но и волновыми свойствами ω и $\boldsymbol{\kappa}$ ($\lambda=2\pi/\kappa$) , причем

$$\omega = E/\hbar \qquad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{p}/\hbar \qquad (\lambda = 2\pi\hbar/p).$$

Коль скоро электрону можно сопоставить какую-то волну, можно ожидать, что у него будут лишь строго определенные состояния: они соответствуют стационарным орбитам, на которых укладывается целое или полуцелое число длин волн де Бройля.

Задача 1. При какой кинетической энергии электрона его дебройлевская и комптоновская длины волн равны?

$\lambda_e = \lambda_{c,l} \Rightarrow 2\pi\hbar/p = \hbar/mc \Rightarrow p = 2\pi mc \cong mc$, т.е. электрон релятивистский

и $T = E - mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 = \sqrt{4\pi^2 m^2c^4 + m^2c^4} - mc^2$.

$T \cong mc^2(\sqrt{4\pi^2+1} - 1)$, где $mc^2 \cong 0{,}51$МэВ.

Таким образом, $T \cong mc^2(\sqrt{4\pi^2+1} - 1) \cong 2{,}7$ МэВ.

Задача 2. Исходя из гипотезы де Бройля, оценить возможные значения энергии частицы массы m в бесконечной прямоугольной яме шириной a.

$$\left.\begin{aligned} &E = \frac{p^2}{2m} \\ &a = n\cdot\frac{\lambda}{2} = \frac{n}{2}\frac{2\pi\hbar}{p} \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_n = \frac{\pi\hbar}{a}n \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2}.$$

– результат точный.

Задача 3. Исходя из гипотезы де Бройля, оценить энергию основного состояния частицы массы m в бесконечно глубокой сферической яме радиуса R.

$$\left.\begin{array}{l} E=\dfrac{p^2}{2m} \\ 2\pi R = n\lambda \overset{(n=1)}{\Rightarrow} \lambda=\dfrac{2\pi\hbar}{p} \end{array}\right\} \Rightarrow p=\frac{\hbar}{R} \Rightarrow \boxed{E_{min}=\frac{\hbar^2}{2mR^2}}.$$

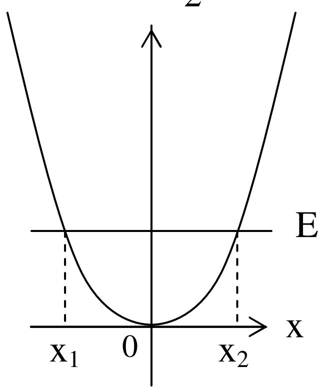
Результат отличается от точного множителем π^2 .

Задача 4. С помощью гипотезы де Бройля обосновать условие квантования Бора для круговых орбит.

$$2\pi r = n\lambda = n\frac{2\pi\hbar}{p} = n\frac{2\pi\hbar}{mv} \Rightarrow \boxed{mvr = n\hbar}$$

Задача 5. Исходя из гипотезы де Бройля, оценить возможные значения энергии одномерного гармонического осциллятора массы m с собственной частотой ω .

$$u=\frac{m\omega^2x^2}{2}$$



$$\frac{m\omega^2x^2}{2}=E \Rightarrow x_{1,2}=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \Rightarrow l = x_2 - x_1 =$$

$$=2\cdot\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \;\; ; \;\; p\sim\sqrt{2mE} \;\; ;$$

$$l \sim n\lambda \Rightarrow 2\cdot\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sim n\frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} \Rightarrow \sqrt{\frac{E}{m\omega^2}} \sim$$

$$\sim n\frac{\hbar}{\sqrt{E}} \Rightarrow E\sim\hbar\omega\cdot n \Rightarrow E_n = A\hbar\omega n \; .$$

Константу находим из принципа соответствия:

$$\lim_{n\to\infty}(E_{n+1}-E_n)=\hbar\omega_{кл} \;\; \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left\{A\hbar\omega(n+1)-A\hbar\omega n\right\}=\hbar\omega \Rightarrow A=1$$

Результат отличается от точного на слагаемое $E_0=\dfrac{\hbar\omega}{2}$.

$$\boxed{E_n = A\hbar\omega n}.$$

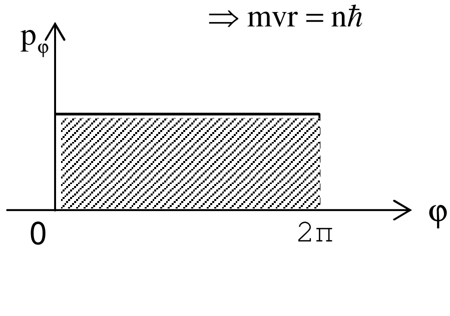
2. Дискретность состояний (квантование по Бору)

Задача 6. Определить энергетический спектр атома водорода, предсказываемый теорией Бора .

$$\left.\begin{array}{l} E=\dfrac{mv^2}{2}-\dfrac{e^2}{r} \\ m\dfrac{v^2}{r}=\dfrac{e^2}{r^2} \\ \oint p_\varphi d\varphi = n\cdot 2\pi\hbar \end{array}\right\}$$

$$\oint p_\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} L d\varphi = mvr\cdot 2\pi = n2\pi\hbar \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mvr = n\hbar$$



$$\left.\begin{aligned} &E=-\frac{e^2}{2r}\\ &mv^2=\frac{e^2}{r}\\ &mvr=n\hbar \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &v=n\frac{\hbar}{mr}\\ &n^2\frac{\hbar^2}{mr^2}=\frac{e^2}{r}\\ &E=-\frac{e^2}{2r} \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\begin{aligned} &r_n=\frac{\hbar^2}{me^2}n^2\\ &v_n=\frac{e^2}{\hbar}\cdot\frac{1}{n}\\ &E_n=-\frac{me^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \end{aligned}} \quad -$$

– результат точный.

Для основного состояния (n = 1):

$$r_1=\frac{\hbar^2}{me^2}\equiv a_0\cong 0{,}53\cdot 10^{-8}\text{см}$$ – радиус Бора;

$$v_1=\frac{e^2}{\hbar}\equiv\frac{e^2}{\hbar c}\cdot c=\alpha c\equiv v_0=$$ 1/137 С – таким образом, $v_0=1\%$ С, что

оправдывает принятое нерелятивистское приближение;

$$E_1=-\frac{me^2}{2\hbar^2}\equiv E_0\equiv -E_{Ry}=-13{,}6\ \text{эВ}$$ – энергия основного состояния, по

модулю равная ридберговской энергии и энергии ионизации.

<u>Задача 7.</u> Найти частоты спектральных линий света, испускаемого возбужденными водородоподобными атомами с порядковым номером Z, т.е. (Z – 1)- кратно ионизированными атомами.

$$E_n=-z^2\frac{me^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\equiv -z^2E_{Ry}\frac{1}{n^2}\ ,\quad \omega_{kn}=\frac{E_k-E_n}{\hbar};$$

$$\boxed{\omega_{kn}=z^2\frac{me^2}{2\hbar^3}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)\equiv z^2\cdot Ry\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)},$$

где Ry - постоянная Ридберга. Для водорода (Z = 1) и для разных n получаем разные спектральные серии:

n = 1 – Лайман, n = 2 – Бальмер, n = 3 – Пашен, n = 4 – Брэккет, n = 5 – Пфунд.

Изучаются и переходы на гораздо более возбужденные энергетические уровни.

<u>Задача 8.</u> Спектры излучения атомарного водорода и дейтерия обладают одинаковой структурой, но несколько сдвинуты друг относительно друга. Объяснить явление и определить величину изотопического сдвига.

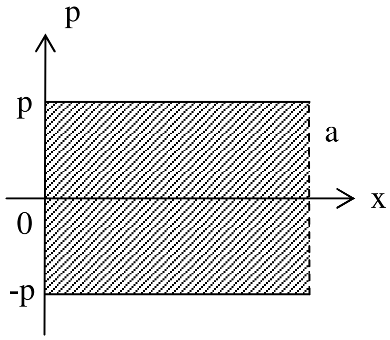
$$m\to\mu=\frac{m_e+M_я}{M_я+m_e};\qquad (m_e\equiv m,\ m_p\approx m_n\equiv M);\qquad m \begin{cases} \nearrow\ \mu_H=\dfrac{mM}{M+m}\\ \searrow\ \mu_D=\dfrac{m\cdot 2M}{m+2M} \end{cases}$$

$$\Delta\omega_{kn}=\omega_{kn}^D-\omega_{kn}^H=\frac{e^4}{2\hbar^3}\left(\frac{2mM}{2M+m}-\frac{mM}{M+m}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)=$$

$$=\frac{me^4}{2\hbar^3}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)\frac{mM}{(M+m)(2M+m)}=\omega_{kn}^{\infty}\frac{mM}{(M+m)(2M+m)};$$

$$\boxed{\Delta\omega_{kn}\cong\frac{1}{2}\frac{m}{M}\omega_{kn}^{\infty}\cong\frac{1}{2}\frac{m}{M}\omega_{kn}^{H}}\ .$$

<u>Задача 9</u>. Найти энергетический спектр частицы массы m в бесконечной прямоугольной яме шириной a.



$$\left.\begin{aligned}E&=\frac{p^2}{2m}\\ \oint p\,dx&=n\cdot 2\pi\hbar\end{aligned}\right\}\quad \oint p\,dx=\int_0^a p\,dx+\int_a^0(-p)\,dx=2pa=n\cdot 2\pi\hbar\ .$$

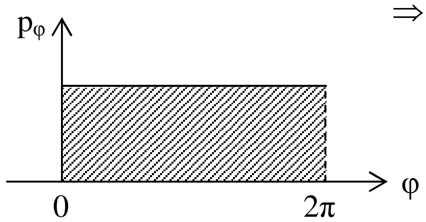
$$\left.\begin{aligned}E&=\frac{p^2}{2m}\\ p&=n\frac{\pi\hbar}{a}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2}\ .$$

Результат точный.

<u>Задача 10</u>. Найти энергетический спектр плоского ротатора, т.е. частицы массы m, движущейся свободно по окружности радиуса R. (Более реалистическая модель – свободная гантель, например, двухатомная молекула длиной R с массами m на концах).

$$u(r)=u(R)=\mathrm{Const}=0\Rightarrow E=T=\frac{mv^2}{2}=\frac{mR^2\varphi^2}{2}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}L&=T-U\\ \text{ф}&-\text{ция Лагранжа}\end{aligned}\right|\Rightarrow p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=mR^2\dot\varphi\ =\mathrm{Const}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow E=\frac{p_\varphi^2}{2mR^2}=\frac{p_\varphi^2}{2J};\ \ p_\varphi=L$$

$$\oint p_\varphi\cdot d\varphi=p_\varphi\cdot 2\pi=n\cdot 2\pi\hbar\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_\varphi=n\hbar;\ \ \boxed{E_n=\frac{\hbar^2}{2J}n^2}\ .$$

Точный расчет даёт: $E_l=\frac{\hbar^2}{2J}l(l+1),\ \ l=0,1,2,...$

<u>Задача 11</u>. Найти энергетический спектр одномерного осциллятора массы m с собственной частотой ω .

Задачу можно решить множеством способов.

1)

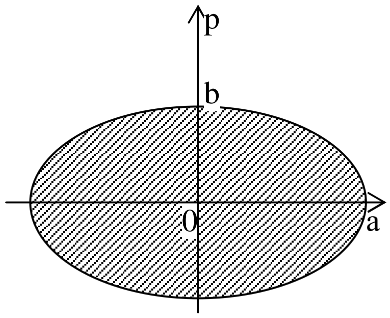
$$\left.\begin{aligned}E&=\frac{m\dot x^2}{2}+\frac{kx^2}{2}\\ m\ddot x&=-kx\\ \oint p\,dx&=n\cdot 2\pi\hbar\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&\ddot x+\omega^2x=0\Rightarrow x=A\cdot\cos(\omega t+\alpha);\\ &E=\frac{m\dot x^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m\omega^2}{2}A^2;\\ &\oint p\,dx=m\oint\dot x\,dx=m\int_0^T\dot x\frac{dx}{dt}dt=m\int_0^T\dot x^2dt=mA^2\omega^2\int_0^T\sin^2(\omega t+\alpha)\,dt=\end{aligned}$$

$$= \frac{m\omega^2 A^2}{2} T = E \cdot T = n \cdot 2\pi\hbar$$

$$E = n \cdot \frac{2\pi\hbar}{T} \Rightarrow \boxed{E_n = \hbar\omega \cdot n} \ .$$

2)

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \\ p &= m\dot{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \ - \end{aligned}$$



– это эллипс с полуосями:

$$b = \sqrt{2mE}, \quad a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \ .$$

$$\oint p dq = S = \pi ab = \pi\sqrt{2mE} \cdot \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \frac{2\pi E}{\omega} =$$

$$= n \cdot 2\pi\hbar \Rightarrow \boxed{E_n = \hbar\omega \cdot n}$$

Точный результат гласит: $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Таким образом, теория Бора не даёт нам энергию “ нулевых колебаний “.

$$E_n = \hbar\omega/2 \ .$$

При переходе осциллятора с данного уровня на соседний испускается или поглощается энергия

$$\varepsilon \equiv \Delta E_{n+1,n} = \hbar\omega \ ,$$

в полном соответствии с гипотезой Планка (он считал, что вещество стенок представляет собой набор несвязанных осцилляторов с различными частотами).

<u>Задача12.</u> Найти энергетический спектр трехмерного изотропного осциллятора массы m с собственной частотой ω .

Условия квантования записываются так же, как в задаче про атом водорода:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2} \\ m\frac{v^2}{r} &= kr \\ mvr &= n\hbar \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} E &= kr^2 \\ mv^2 &= kr^2 \\ m^2v^2r^2 &= n^2\hbar^2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} mr^2 &= n^2\frac{\hbar^2}{kr^2} \\ kmr^4 &= n^2\hbar^2 \\ k^2r^4 &= \frac{k}{m}\hbar^2 n^2 = \omega^2\hbar^2 n^2 \\ kr^2 &= \omega\hbar n \end{aligned}$$

$$\boxed{E_n = \hbar\omega \cdot n}$$

Считали, что частица движется по окружности. Результат можно получить иначе, рассматривая трехмерный осциллятор как набор трех одномерных, которые независимы. Тогда сразу получаем:

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + n_3) \Rightarrow E_n = \hbar\omega \cdot n$$

Формально результат совпадает с результатом предыдущей задачи, причем он опять не содержит " нулевую энергию"

3.<u>Ограничения на точность измерений.</u>

<u>Задача 13.</u> Исходя из соотношений неопределенностей, объяснить устойчивость атома водорода.

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{-e^2}{r};\ r \sim R \ \Rightarrow\ p \sim \frac{\hbar}{r} \sim \frac{\hbar}{R} \ \Rightarrow\ E = \frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{e^2}{R};$$

$E \to +\infty$ при $R \to 0$.

<u>Задача 14.</u> В некоторой Вселенной электростатическая сила взаимодействия равна $-\alpha/r^\gamma$. При каких γ может существовать такая Вселенная? $(\alpha > 0)$

$$F = -\frac{\alpha}{r^\gamma} \Rightarrow u = -\frac{\beta}{r^{\gamma-1}} \Rightarrow\ E = \frac{p^2}{2m} - \frac{\beta}{r^{\gamma-1}};$$

$$p \sim \frac{\hbar}{R}\ \Rightarrow\ E \sim \frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{\beta}{R^{\gamma-1}} : E \to +\infty \text{ при } R \to 0 : \gamma - 1 < 2\ \Rightarrow\ \boxed{\gamma < 3}$$

<u>Задача 15.</u> Оценить энергию основного состояния частицы массы m в бесконечной прямоугольной яме шириной a.

$$E = \frac{p^2}{2m};\ p \sim \Delta p\ \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \sim \frac{\hbar}{a} \Rightarrow \boxed{E_0 \sim \frac{\hbar^2}{2ma^2}}$$

Точный результат

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \cdot n^2$$

при n = 1 даёт

$$E_0 = \pi^2 \frac{\hbar^2}{2ma^2}\ ,$$

т.е. мы ошиблись в 10 раз, что не так уж плохо.

<u>Задача 16.</u> Оценить энергию основного состояния ротатора.

$$E = \frac{p^2}{2m};\ p \sim \Delta p\ \sim \frac{\hbar}{\Delta l} \sim \frac{\hbar}{R} \Rightarrow E_0 \sim \frac{\hbar^2}{2mR^2} \Rightarrow \boxed{E_0 \sim \frac{\hbar^2}{2J}}\ .$$

<u>Задача 17.</u> Оценить энергию основного состояния осциллятора.

$$E=\frac{p^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2x^2}{2};\ p\sim\Delta p\ \sim\frac{\hbar}{\Delta x}\sim\frac{\hbar}{A}\Rightarrow$$

$$E\sim\frac{\hbar^2}{2mA^2}+\frac{m\omega^2A^2}{2}\equiv\frac{\hbar^2}{2ma}+\frac{m\omega^2a}{2}\equiv f(a);\ \left(a\equiv A^2\right);$$

$$0=\left.\frac{df}{da}\right|_{a=a_0}=-\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}+\frac{m\omega^2}{2}\Rightarrow a_0^2=\frac{\hbar^2}{m^2\omega^2}\Rightarrow a_0=\frac{\hbar}{m\omega};$$

$$E_0\sim f(a_0)=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{m\omega}{\hbar}+\frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Rightarrow\boxed{E_0\sim\hbar\omega}\ .$$

Точный результат

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

даёт при n = 0

$$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega\ ,$$

т.е. мы ошиблись в 2 раза, что весьма неплохо.

<u>Задача 18.</u> Оценить энергию основного состояния атома водорода.

$$E=\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{r};\ p\sim\Delta p\ \sim\frac{\hbar}{\Delta r}\sim\frac{\hbar}{r}\Rightarrow E\sim\frac{\hbar^2}{2mr^2}-\frac{e^2}{r}\equiv f(r);$$

$$0=\left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0}=-\frac{\hbar^2}{mr_0^3}+\frac{e^2}{r_0^2}\Rightarrow\boxed{r_0=\frac{\hbar^2}{me^2}\equiv a_0}\ ;$$

$$E_0\sim f(a_0)=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{m^2e^4}{\hbar^4}-e^2\frac{me^2}{\hbar^2}\Rightarrow\boxed{E_0=-\frac{me^4}{2\hbar^2}\equiv E_{Ry}}\ ,$$

т.е. точный результат.

<u>Задача 19 .</u> Оценить энергию основного состояния гелиеподобного атома, т.е. иона с двумя электронами.

$$E=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}-\frac{ze^2}{r_1}-\frac{ze^2}{r_2}+\frac{e^2}{\left|\overline{r_1}-\overline{r_2}\right|};\ p_1\sim\frac{\hbar}{r_1},p_2\sim\frac{\hbar}{r_2}\Rightarrow$$

$$E\sim\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)-ze^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+\frac{e^2}{r_1+r_2}\ .$$

Минимум при $r_1 = r_2 = r$:

$$E \sim \frac{\hbar^2}{mr^2} - \frac{2ze^2}{r} + \frac{e^2}{2r} = \frac{\hbar^2}{mr^2} - \frac{\left(2z - \frac{1}{2}\right)e^2}{r} \equiv$$

$$\equiv \frac{\hbar^2}{m} x^2 - \left(2z - \frac{1}{2}\right) e^2 x \equiv f(x);$$

$$0 = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{2\hbar^2}{m} x_0 - \left(2z - \frac{1}{2}\right) e^2 \Rightarrow x_0 = \frac{\left(2z - \frac{1}{2}\right) e^2 m}{2\hbar^2};$$

$$E_0 \sim -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{\left(2z - \frac{1}{2}\right)^2}{2} \equiv -E_{Ry} \frac{\left(2z - \frac{1}{2}\right)^2}{2} \; .$$

Несмотря на грубость оценки (а точного решения задача не имеет), согласие с опытом оказывается весьма хорошим, что иллюстрирует приводимая таблица.

Атом	H^-	He	Li^+	Be^{++}	B^{3+}	C^{4+}
$-E_0^{Выч} / E_{Ry}$	1,125	6.125	15,12	28,12	45,12	66,12
$-E_0^{Эксп} / E_{Ry}$	1,05	5,807	14,56	27,31	44,06	64,8

Задача 20. (В.Гейзенберг,1927г.)

Исходя из соотношения неопределенностей, установить несостоятельность протонно-электронной модели ядра, принятой до 1932 г.

$$p \sim \Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta r} \sim \frac{\hbar}{R}, \text{ но } R \approx 5 \cdot 10^{-15} \text{м} \Rightarrow p \sim 2 \cdot 10^{-20} \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{c}^{-1},$$

$$\text{тогда как } \; mc \approx 1{,}8 \cdot 10^{-22} \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{c}^{-1} \Rightarrow p \gg mc, \; \text{т.е.}$$

движение ультрарелятивистское:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \approx p^2c^2 \Rightarrow E \approx pc, \text{ но } p \sim \frac{\hbar}{R}:$$

$$E \approx \frac{\hbar c}{R} \Rightarrow R \sim \frac{\hbar c}{E} \begin{array}{l} \nearrow R \approx 5 \cdot 10^{-15} \text{м} \Rightarrow E \sim 40 \text{ МэВ}, \text{ а не } E \sim 5 \text{ МэВ} \\ \searrow E \approx 5 \text{ МэВ} \Rightarrow R \sim 10^{-13} \text{м}, \text{ а не } R \sim 5 \cdot 10^{-15} \text{м} \; . \end{array}$$

Задача 21. Слабое взаимодействие переносится промежуточными бозонами $W^{\pm}$ и Z^0, открытыми в 1983 г. Их масса m ~ 100 ГэВ ($m_W \approx$ 80 ГэВ, $m_Z \approx$ 90 ГэВ). Оценить радиус слабого взаимодействия.

Закон сохранения энергии запрещает испускание данной частицей промежуточного бозона (даже фотона – вспомним СТО). Но если он быстро поглощается другой частицей, т.е. существует время Δt, то энергия допускает разброс значений ΔE, причем $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E \sim mc^2 \\ \Delta t \sim \dfrac{R}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow mc^2 \cdot \frac{R}{c} \sim \hbar \Rightarrow$$

$$R \sim \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} \sim \frac{10^{-27} \cdot 10^{10}}{10^2 \cdot 10^9 \cdot 10^{-12}} \sim 10^{-16}\,\text{см} \Rightarrow \boxed{R \sim \frac{\hbar}{mc} \Leftrightarrow m \sim \frac{\hbar}{Rc}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R \sim 10^{-18}\,\text{м}}$$

Задача 22 . (Х. Юкава, 1935 г.).

Предсказать вместе с Юкавой существование мезонов – частиц, тяжелее электронов, но легче протонов.

Х.Юкава предположил, что ядерные силы переносятся некоторыми частицами, для массы которых из предыдущей задачи имеем

$$m \sim \frac{\hbar}{R_S \cdot c}$$

Учитывая, что радиус ядерных сил $R \sim 10^{-15}$ м, найдем

$$\boxed{m \sim (200 \div 300)\, m_e}$$

А это и есть мезоны

$$\left(\pi^+, \pi^-, \pi^0 :\ m_\pi \approx 270\, m_e\right).$$

Задача 23. В таблице элементарных частиц сказано, что ширина Γ у частицы Δ^{++} равна 120 МэВ. Что это значит? Чему равно время жизни этой частицы?

Крайне нестабильные частицы обладают чрезвычайно малыми временами жизни τ, а потому не имеют определенной энергии покоя mc^2 , а значит массы m . Они проявляются в виде размытых максимумов в сечениях рассеяния и называются резонансами. Согласно соотношению неопределенностей $\Delta E\, \Delta t \sim \hbar$ ширина резонанса Γ, которая и приводится в таблицах, связана с временем жизни τ равенством

$$\Gamma \tau = \hbar \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}}\ .$$

Для частицы (резонанса) Δ^{++} имеем:

$$\tau = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-27}\ \text{эрг} \cdot \text{с}}{1{,}2 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \text{эрг}} \Rightarrow \boxed{\tau \cong 5{,}2 \cdot 10^{-24}\ \text{с}}$$

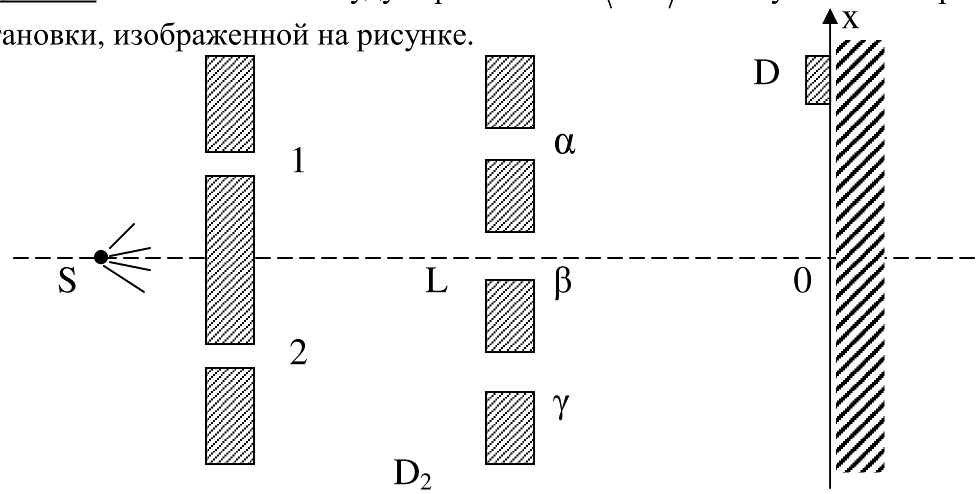
4 Вероятностный характер поведения микрообъектов.

Задача 24. Как следует модифицировать выражение для амплитуды в случае несимметричного расположения щелей 1 и 2?

$$\langle x|S\rangle_{12} = \alpha_1 \langle x|S\rangle_1 + \alpha_2 \langle x|S\rangle_2 \ ,$$

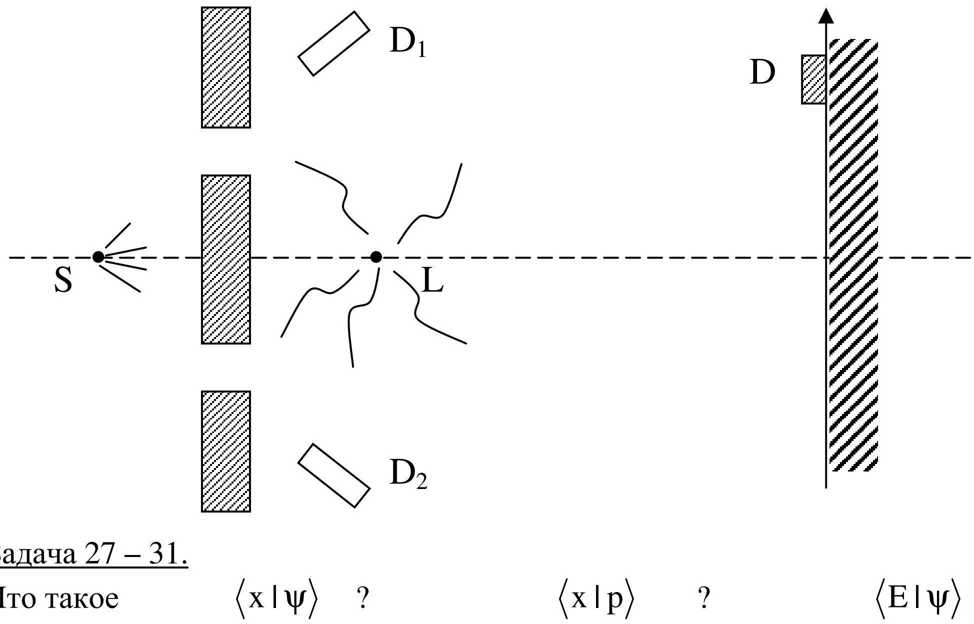
где $|\alpha_1|^2$ и $|\alpha_2|^2$ - вероятности прохождения электроном щели 1 и щели 2, соответственно. (В симметричном случае эти вероятности равны, и мы их положили равными 1, хотя из соображений нормировки следовало бы написать коэффициенты α_1 и $\alpha_2 = 1/\sqrt{2}$.)

Задача 25. Расписать амплитуду вероятности $\langle x|S\rangle$ в случае симметричной установки, изображенной на рисунке.



Задача 26. Пусть симметричная установка с двумя щелями дополнена источником света L и двумя фотонными детекторами D_1 и D_2 , которые могут фиксировать фотоны, отраженные электронами в моменты прохождения ими щели 1 или щели 2. Найти плотность вероятности того, что электрон попадет из S в x , а фотон, испущенный источником L и рассеянный на электроне, будет зарегистрирован либо в D_1 , либо в D_2 . Проанализировать предельные случаи идеальной подсветки и отсутствия подсветки.

См. « Методические разработки…», с. 28 – 30.



Задача 27 – 31.

Что такое $\langle x|\psi\rangle$? $\langle x|p\rangle$? $\langle E|\psi\rangle$?

$\langle x|E\rangle$? $\langle p|\psi\rangle$?

Задача 32- 33.

Выразить $\langle x \mid \psi \rangle$ через $\langle p \mid \psi \rangle$;

Выразить $\langle p \mid \psi \rangle$ через $\langle x \mid \psi \rangle$.